ADITYA RANJAN
PUBLICATIONS

3rd Edition

हिन्दी माध्यम

संपूर्ण गणित

ब्रह्मास्त्र

FORMULA BOOK

- CONCEPTS
- CLASS NOTES
- SHORT TRICKS
- SOLVED EXAMPLES
- CALCULATION TRICKS

GUARANTEED 25 LAKHS+ BOOKS SOLD ORIGINAL

USEFUL FOR

SSC, RAILWAYS, CET,
DEFENCE, BANKING,
& ALL GOVT. EXAMS

आदित्य रंजन सर
(EXCISE INSPECTOR)

Selected हैं Selection दिलायेंगे

Click Here To Join our Telegram Channel

विषय सूची

एडवांस मैथ्स

क्र.म.	अध्याय का नाम	पृष्ठ संख्या
01	ज्यामिति	01-47
02	द्विविमीय क्षेत्रमिति	48-63
03	त्रिविमीय क्षेत्रमिति	64-82
04	संख्या पद्धति	83-94
05	ल.स.प. और म.स.प.	95-99
06	अनुक्रम और श्रेणी	100-104
07	सरलीकरण	105-111
08	घातांक एवं करणी	112-115
09	बीजगणित	116-128
10	त्रिकोणमिति	129-140

Click Here To Join our Telegram Channel

11	ऊँचाई और दूरी	141-148
12	निर्देशांक ज्यामिति	149-158

अंकगणित

13	डिजिटल योग	160-167
14	प्रतिशतता	168-180
15	लाभ और हानि	181-187
16	बट्टा/ छूट	188-191
17	साधारण ब्याज	192-196
18	चक्रवृद्धि ब्याज	197-205
19	अनुपात और समानुपात	206-212
20	साझेदारी	213-215
21	मिश्रण	216-217
22	एलिगेशन	218-220

23	औसत	221 – 227
24	समय और कार्य	228 – 232
25	नल और टंकी	233 – 236
26	समय और दूरी	237 – 242
27	रेलगाड़ी	243 – 245
28	रैखिक और वृत्तीय चाल	246 – 248
29	नाव और धारा	249 – 251
30	क्रमचय और संचय	252 – 257
31	प्रायिकता	258 – 272
32	सांख्यिकी	273 – 281
33	लघुगणक	282 – 283
34	गणना	284 – 292

ॐ

यथा शिखा मयूराणा, नागानां मणयो यथा।
तद्वद् वेदाङ्गशास्त्राणां गणितं मूर्धनि संस्थितम्॥

(महर्षि लगध कृत 'वेदांग ज्योतिष')

जैसे मोरों में शिखा और नागों में मणि का स्थान सबसे ऊपर है,
वैसे ही सभी वेदांग और शास्त्रों में गणित का स्थान सबसे ऊपर है।

Just as the crest on the heads of peacocks and the gems on the heads of serpents is in the highest position, in the same way the place of mathematics in the Vedangashastras is at the top.

Join Telegram: @yct_publication

अध्याय 01

ज्यामिति

ज्यामिति
- रेखाएँ और कोण
- त्रिभुज
- चतुर्भुज
- बहुभुज
- वृत्त

रेखाएँ और कोण

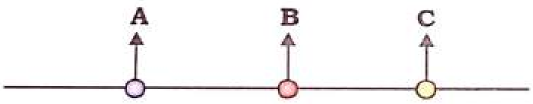
बिंदु

एक बिंदु शून्य त्रिज्या का एक वृत्त होता है जो एक स्थान निर्धारित करता है। इसे प्रायः एक बड़े अक्षर से दर्शाया जाता है।

बिंदु के प्रकार
- संरेख बिंदु
- असंरेख बिंदु
- प्रतिच्छेद बिंदु

(a) **संरेख बिंदु:** यदि तीन या तीन से अधिक बिंदु एक सीधी रेखा पर स्थित होते हैं, तो इन बिंदुओं को संरेख बिंदु कहते हैं।

उदाहरण: बिंदु A, B और C संरेख हैं।



(b) **असंरेख बिंदु:** यदि तीन या तीन से अधिक बिंदु एक सीधी रेखा पर स्थित नहीं होते हैं, तो इन बिंदुओं को असंरेख बिंदु कहते हैं।

(c) **प्रतिच्छेदी बिंदु:** जब दो या दो से अधिक रेखाएँ एक उभयनिष्ठ बिंदु पर एक-दूसरे को काटती हैं या मिलती हैं, तो उस बिंदु को प्रतिच्छेदी बिंदु कहते हैं।

रेखा

एक रेखा अनंत बिंदुओं से मिलकर बनी होती है और इसमें केवल लंबाई होती है, अर्थात इसमें कोई मोटाई (या चौड़ाई) नहीं होती है। एक रेखा अंतहीन होती है, इसलिए इसे दोनों दिशाओं में बढ़ाया जा सकता है।

रेखाखंड: एक रेखाखंड के दो अंत बिंदु होते हैं; सामान्यतः रेखाखंड को रेखा भी कहा जाता है।

किरण: एक किरण किसी दिए गए बिंदु से एक ही दिशा में अनिश्चित रूप से बढ़ती है, उसे किरण कहते हैं।

नाम	रेखा	रेखा खंड	किरण
प्रतीक	$\overleftrightarrow{AB}$	$\overline{AB}$	$\overrightarrow{AB}$
अंतिम बिंदु	कोई अंतिम बिंदु नहीं	दो अंतिम बिंदु	एक अंतिम बिंदु

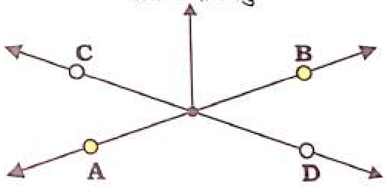
रेखाओं के प्रकार

(a) **सीधी रेखा:** एक रेखा जो किसी भी बिंदु पर अपनी दिशा नहीं बदलती है, उसे सीधी रेखा कहते हैं।

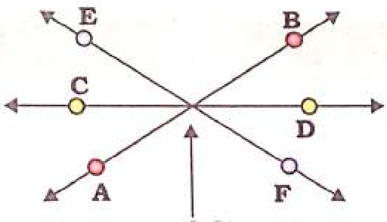
(b) **वक्र रेखा:** एक रेखा जो अपनी दिशा बदलती है, उसे वक्र रेखा कहते हैं।

(c) **प्रतिच्छेदी रेखाएँ:** यदि दो या दो से अधिक रेखाएँ एक-दूसरे को काटती हैं, तो उन्हें प्रतिच्छेदी रेखाएँ कहते हैं। चित्र में, AB और CD प्रतिच्छेदी रेखाएँ हैं। दो रेखाएँ अधिकतम एक बिंदु पर प्रतिच्छेद कर सकती हैं।

प्रतिच्छेदी बिंदु

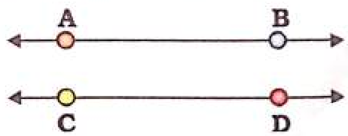


(d) **संगामी रेखाएँ:** यदि तीन या तीन से अधिक रेखाएँ एक बिंदु से होकर गुजरती हैं, तो उन्हें संगामी रेखाएँ कहते हैं और जिस बिंदु से ये सभी रेखाएँ गुजरती हैं, उसे संगामी बिंदु कहते हैं।



संगामी बिंदु

(e) **समांतर रेखाएँ:** दो सरल रेखाएँ समांतर कहलाती हैं यदि वे एक ही तल में स्थित हों और अनंत तक बढ़ाए जाने पर भी एक-दूसरे को कभी नहीं काटती हैं। दो समांतर रेखाओं के बीच की लंबवत दूरी सभी स्थानों पर हमेशा समान होती है।



चित्र में, AB और CD समांतर रेखाएँ हैं।

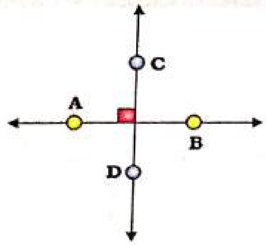
समान्तर रेखाओं का प्रतीक || है।

$\therefore$ AB || CD.

@apna_channels
Join Telegram: @apna_rwa

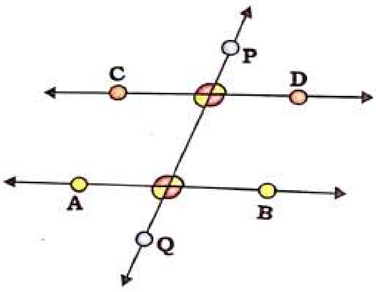
Join Telegram: @yct_publication

(f) लंबवत रेखाएँ: यदि दो रेखाएँ एक-दूसरे को समकोण पर काटती हैं, तो उन्हें लंबवत रेखाएँ कहते हैं। निम्नलिखित चित्र में, AB और CD लंबवत रेखाएँ हैं।



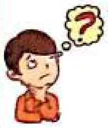
इसका सांकेतिक निरूपण AB ⊥ CD के रूप में किया जाता है या हम यह भी कह सकते हैं कि CD ⊥ AB है।

(g) तिर्यक रेखाएँ: एक रेखा जो दो या दो से अधिक दी गई रेखाओं को अलग-अलग बिंदुओं पर काटती है, उसे दी गई रेखाओं की तिर्यक रेखा कहते हैं।



चित्र में, सरल रेखाएँ AB और CD एक तिर्यक रेखा PQ द्वारा प्रतिच्छेदित की गई हैं।

रेखाओं के महत्वपूर्ण बिंदु



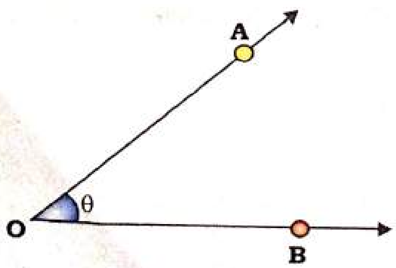
- दो भिन्न बिंदुओं से होकर केवल एक ही रेखा गुजरती है।
- दो या दो से अधिक रेखाएँ समतलीय कहलाती हैं यदि वे एक ही तल में स्थित हों और समांतर, प्रतिच्छेदित या अतिव्याप्त हो सकती हैं, अन्यथा उन्हें असमतलीय कहा जाता है।
- दो तलों का प्रतिच्छेद एक रेखा होती है।

@apna_channels

कोण

एक कोण दो असंरेख रेखाओं का मिलन होता है, जिनका एक उभयनिष्ठ प्रारंभिक बिंदु होता है। कोण बनाने वाली दोनों रेखाओं को कोण की भुजाएँ कहते हैं और उभयनिष्ठ प्रारंभिक बिंदु को कोण का शीर्ष कहते हैं।

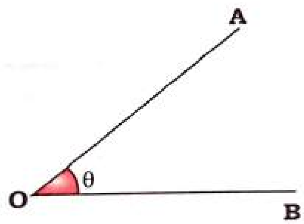
- कोण AOB को ∠AOB से दर्शाया जाता है, यह रेखा OA और OB से बनता है और बिंदु O कोण का "शीर्ष" है।



(I) **कोणों के प्रकार**

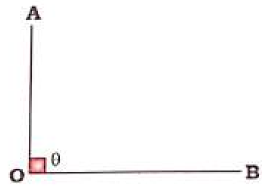
- न्यून कोण
- समकोण
- अधिक कोण
- ऋजु कोण
- प्रतिवर्ती कोण
- पूर्ण कोण

न्यून कोण: यदि किसी कोण का माप 90° से कम होता है, तो वह एक न्यून कोण होता है।



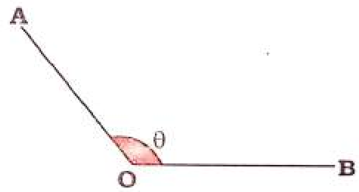
0° < θ < 90° (∠AOB एक न्यून कोण है।)

समकोण: यदि किसी कोण का माप 90° के बराबर होता है, तो वह एक समकोण होता है।



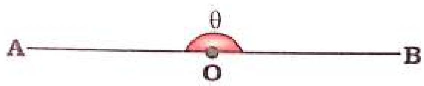
θ = 90° (∠AOB एक समकोण है।)

अधिक कोण: यदि किसी कोण का माप 90° से अधिक लेकिन 180° से कम होता है, तो वह एक अधिक कोण होता है।



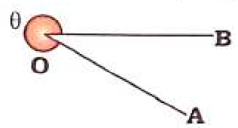
90° < θ < 180° (∠AOB एक अधिक कोण है।)

ऋजु कोण: यदि किसी कोण का माप 180° के बराबर होता है, तो वह एक ऋजु कोण होता है।



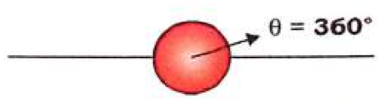
θ = 180° (∠AOB एक ऋजु कोण है।)

प्रतिवर्ती कोण: यदि किसी कोण का माप 180° से अधिक लेकिन 360° से कम होता है, तो वह एक प्रतिवर्ती कोण होता है।



180° < θ < 360° (∠AOB एक प्रतिवर्ती कोण है।)

पूर्ण कोण: यदि किसी कोण का माप 360° होता है, तो वह एक पूर्ण कोण होता है।



Join Telegram: @apna_rwa

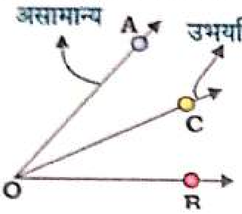
Join Telegram: @yct_publication

(II) **कोणों के युग्म**

आसन्न कोण | रैखिक कोण | पूरक कोण | संपूरक कोण

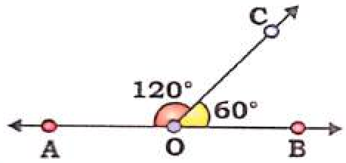
आसन्न कोण: दो कोणों को आसन्न कोण कहा जाता है, यदि:

- उनका शीर्ष एक ही होता है,
- उनकी एक उभयनिष्ठ भुजा होती है।
- असामान्य भुजाएँ उभयनिष्ठ भुजा के दोनों ओर होती हैं।

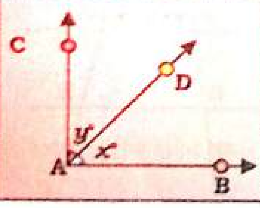
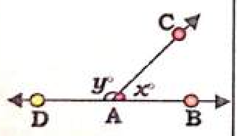


- इस आकृति में, ∠AOC और ∠BOC का उभयनिष्ठ शीर्ष O है। साथ ही, उनकी एक उभयनिष्ठ भुजा OC है और अलग-अलग भुजाएँ OA और OB, उभयनिष्ठ भुजा OC के दोनों ओर स्थित हैं।

रैखिक कोण युग्म: दो आसन्न कोणों को रैखिक कोण युग्म कहा जाता है, यदि उनकी गैर-उभयनिष्ठ भुजाएँ दो विपरीत रेखाएँ हों।



- चित्र में, OA और OB दो विपरीत रेखाएँ हैं, ∠AOC और ∠BOC आसन्न कोण हैं। इसलिए, ∠AOC और ∠BOC एक रैखिक युग्म बनाते हैं।
- यदि एक रेखा किसी दूसरी रेखा पर खड़ी हो, तो इस प्रकार बने आसन्न कोणों का योग 180° होता है।

कोण	पूरक	संपूरक
परिभाषा	यदि दो कोणों का योग 90° के बराबर है, तो उन दो कोणों को पूरक कोण कहते हैं।" • ∠BAD और ∠DAC पूरक कोण हैं, यदि $x^\circ + y^\circ = 90^\circ$	यदि दो कोणों का योग 180° के बराबर है, तो उन दो कोणों को संपूरक कोण कहते हैं।" • ∠BAC और ∠DAC संपूरक कोण हैं, यदि $x^\circ + y^\circ = 180^\circ$
निरूपण		

Ex. उस कोण का माप जिसके लिए उसके संपूरक कोण का माप, उसके पूरक कोण के माप का चार गुना है:

HINTS माना कोण = x है।

∴ पूरक कोण = $90^\circ - x$, संपूरक कोण = $180^\circ - x$

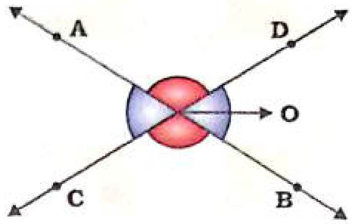
प्रश्नानुसार,

4 × पूरक कोण = संपूरक कोण

$\Rightarrow 4 \times (90^\circ - x) = 180^\circ - x \Rightarrow x = 60^\circ$

(III) **शीर्षाभिमुख कोण**

यदि दो कोणों की भुजाएँ दो विपरीत किरणों के जोड़े बनाती हैं, तो उन दो कोणों को शीर्षाभिमुख कोण कहते हैं।



- दूसरे शब्दों में, जब दो रेखाएँ एक-दूसरे को काटती हैं, तो शीर्षाभिमुख कोणों के दो युग्म बनते हैं। शीर्षाभिमुख कोणों का प्रत्येक युग्म बराबर होता है।
- चित्र में, दो रेखाएँ AB और CD एक-दूसरे को O पर प्रतिच्छेद करती हैं। हम पाते हैं कि ∠AOC और ∠BOD शीर्षाभिमुख कोण हैं।

⇒ ∠AOC = ∠BOD

इसी प्रकार, ∠BOC और ∠AOD शीर्षाभिमुख कोण हैं।

⇒ ∠BOC = ∠AOD

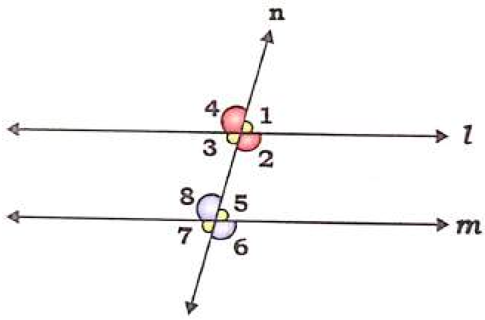
(IV) **तिर्यक रेखाओं द्वारा बनाए गए कोण**

संगत कोण | एकांतर कोण | क्रमागत अंतः कोण

जब दो समांतर रेखाओं को एक तिर्यक रेखा द्वारा प्रतिच्छेदित किया जाता है, तो वे संगत कोण, एकांतर कोण, और क्रमागत अंतः कोणों के युग्म बनाते हैं।

रेखा 'l' और 'm' को तिर्यक रेखा 'n' द्वारा प्रतिच्छेदित किया गया है।

तब,



संगत कोण

∠1 = ∠5, ∠4 = ∠8, ∠3 = ∠7 और ∠2 = ∠6

अन्तः एकांतर कोण

∠3 = ∠5 और ∠2 = ∠8

बाह्य एकांतर कोण

∠1 = ∠7 और ∠4 = ∠6

क्रमागत अंतः कोण

∠2 + ∠5 = 180° और ∠3 + ∠8 = 180°

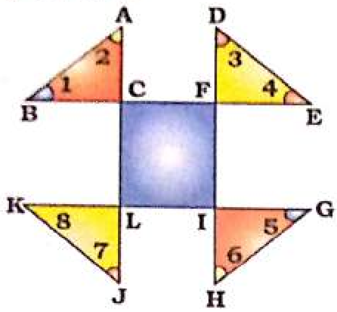
इसके विपरीत, यदि एक तिर्यक रेखा दो रेखाओं को इस प्रकार प्रतिच्छेद करती है कि एकांतर अंतः कोणों का एक युग्म बराबर हो, तो दोनों रेखाएँ समांतर होती हैं।

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. दिए गए चित्र में कोण दिखाए गए है $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 + \angle 7 + \angle 8$ का मान क्या है?



HINTS $\angle C = 180° - (\angle 1 + \angle 2)$

$\angle F = 180° - (\angle 3 + \angle 4)$

$\angle I = 180° - (\angle 5 + \angle 6)$

$\angle L = 180° - (\angle 7 + \angle 8)$

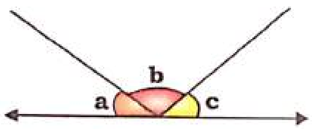
CFIL एक चतुर्भुज है।

$\therefore$ CFIL के कोणों का योग 360°

$\Rightarrow 720° - (\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 + \angle 7 + \angle 8) = 360°$

$\Rightarrow 360° = (\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 + \angle 7 + \angle 8)$

Ex. दी गई आकृति में, यदि $\frac{b}{a} = 5$ और $\frac{c}{a} = \frac{6}{5}$ है तो b का मान क्या है?



HINTS b : a = (5 : 1) × 5 = 25 : 5

c : a = 6 : 5

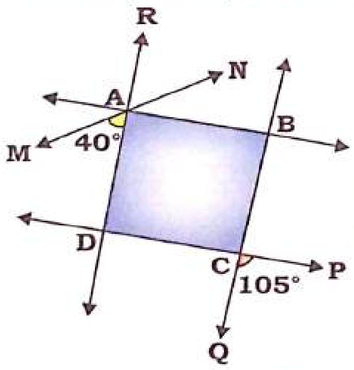
$\therefore$ a : b : c = 5 : 25 : 6

$\angle a + \angle b + \angle c = 180°$ (सरल रेखा)

$\Rightarrow$ 36 इकाई = 180° $\Rightarrow$ 1 इकाई = 5°

$\therefore \angle b$ = 25 इकाई = 125°

Ex. दिए गए चित्र में, AB, CD के समांतर है और AD, BC के समांतर है। यदि $\angle MAD = 40°$ और $\angle PCQ = 105°$, तो $\angle NAB$ का मान क्या है?



HINTS $\angle BCD = \angle PCQ = 105°$ (शीर्षाभिमुख कोण)

$\angle CDA = 180° - 105° = 75°$

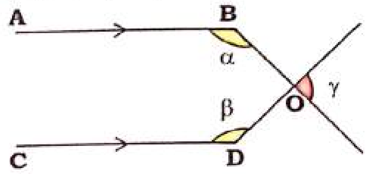
$\angle RAB = \angle CDA = 75°$ (संगत कोण)

$\angle RAN = \angle MAD = 40°$ (शीर्षाभिमुख कोण)

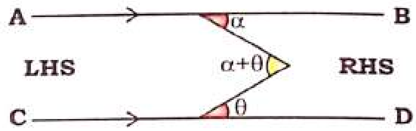
$\therefore \angle NAB = \angle RAB - \angle RAN = 75° - 40° = 35°$

कुछ महत्वपूर्ण परिणाम

☞ यदि AB||CD तब $\alpha + \beta + \gamma = 360°$



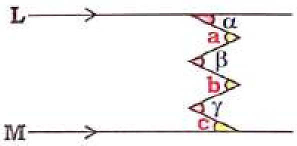
☞ यदि AB||CD है, तो बाईं ओर (LHS) के कोणों का योग दाईं ओर (RHS) के कोणों के योग के बराबर होता है।



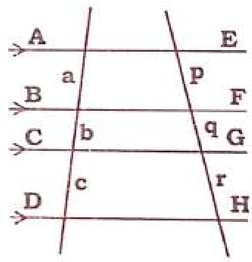
RHS = LHS

$\Rightarrow \theta + \alpha = \alpha + \theta$

☞ यदि L || M, $a + b + c = \alpha + \beta + \gamma$



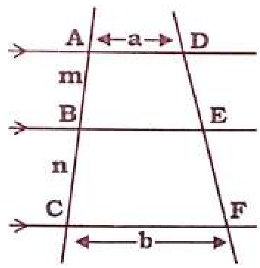
☞ जब AE || BF || CG || DH हैं और इन रेखाओं को दो तिर्यक रेखाओं द्वारा काटा जाता है।



तब, a : b : c = p : q : r

$\frac{a}{a+b+c} = \frac{p}{p+q+r}$

☞ जब AD || BE || CF हैं और इन रेखाओं को दो तिर्यक रेखाओं द्वारा काटा जाता है।



तब, $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF} = \frac{m}{n}$

$BE = \frac{an + bm}{m + n}$

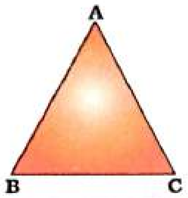
@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

त्रिभुज

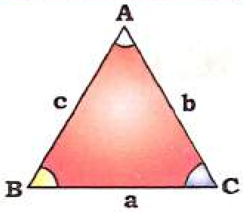
त्रिभुज तीन भुजाओं और तीन कोणों वाला एक बहुभुज होता है। यह ज्यामिति में तीन असंरेखीय बिंदुओं को जोड़कर बनने वाली मूलभूत आकृति है।



त्रिभुज के मूलभूत गुण

☞ त्रिभुज के तीनों कोणों का योग सदैव 180° होता है

$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$



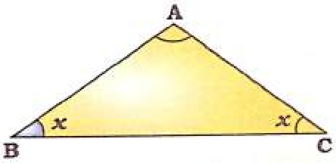
Ex. एक त्रिभुज का एक कोण 108° है और अन्य दो कोण बराबर हैं। इन बराबर कोणों में से प्रत्येक का माप क्या है?

HINTS हम जानते हैं,

$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

$\Rightarrow 108° + x + x = 180°$

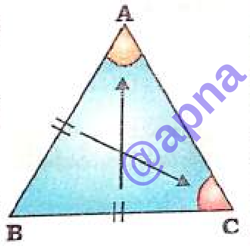
$\Rightarrow 2x = 72° \Rightarrow x = 36°$



2. (i) त्रिभुज की बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।

(ii) त्रिभुज के बराबर कोणों के सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं।

- ΔABC में, यदि AB = BC, तो ∠A = ∠C
- ΔABC में, यदि ∠A = ∠C, तो AB = BC

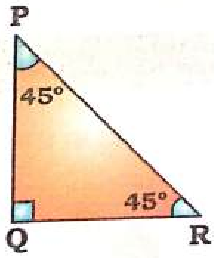


Ex. ΔPQR में, ∠Q = 90°, PQ = 8 सेमी और ∠PRQ = 45° है। QR की लंबाई ज्ञात कीजिए।

HINTS

गुणधर्म 2 (ii) का उपयोग करते हुए,

QR = PQ = 8 सेमी



☞ (i) बड़ी भुजा के विपरीत कोण सदैव छोटी भुजा के विपरीत कोण से बड़ा होता है।

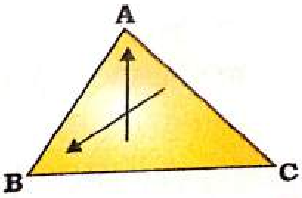
(ii) बड़े कोण के विपरीत भुजा सदैव छोटे कोण के विपरीत भुजा से बड़ी होती है।

ΔABC में, यदि BC > AC,

तो ∠A > ∠B

ΔABC में, यदि ∠A > ∠C,

तो BC > AB



Ex. एक ΔPQR के कोणों ∠P, ∠Q और ∠R का अनुपात 2 : 4 : 9 है, तो निम्नलिखित में से कौन सा सत्य है?

(a) PQ > QR > RP

(b) PQ > RP > QR

(c) QR > RP > PQ

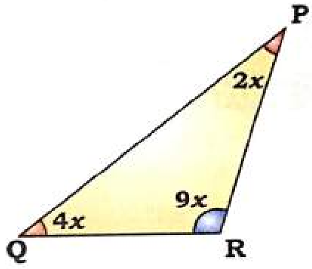
(d) PR > PQ > QR

HINTS

यहाँ ΔPQR में

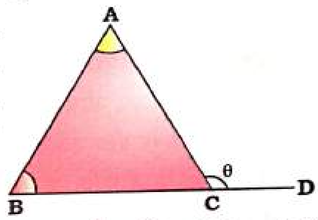
यहाँ, $9x > 4x > 2x$

इसलिए, PQ > PR > QR



☞ यदि त्रिभुज की एक भुजा को बढ़ाया जाए, तो बनने वाला बाह्य कोण दो सम्मुख अंतः कोणों के योग के बराबर होता है।

∠ACD = ∠CAB + ∠ABC



Ex. ΔABC की भुजा BC को D तक बढ़ाया गया है। यदि ∠ACD = 112° और ∠B = ∠A का $\frac{3}{4}$ है, तो ∠B का माप ज्ञात कीजिए।

HINTS हम जानते हैं,

बाह्य कोण (∠ACD)

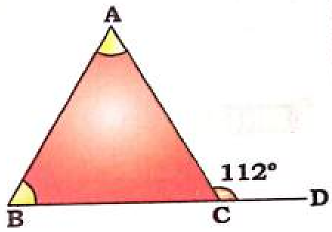
$= \angle A + \angle B$

$\because \angle B = \frac{3}{4} \angle A$

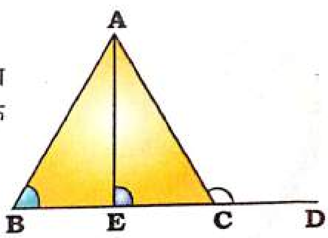
$\Rightarrow \angle A = \frac{4}{3} \angle B$ ....(i)

$\therefore 112° = \frac{4}{3} \angle B + \angle B$

$\Rightarrow \angle B = \frac{3}{7} \times 112° = 48°$



5. ΔABC में, भुजा BC को D तक बढ़ाया जाता है और ∠A का कोण समद्विभाजक BC से E पर मिलता है, तो ∠ABC + ∠ACD = 2 ∠AEC.



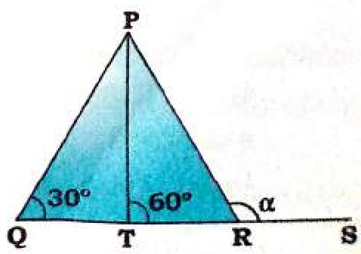
Ex. ΔPQR की भुजा QR को बिंदु S तक बढ़ाया गया है। ∠P का समद्विभाजक भुजा QR से T पर मिलता है। यदि ∠PQR = 30° और ∠PTR = 60° है, तो ∠PRS ज्ञात कीजिए।

HINTS

∠PQR + ∠PRS = 2 × ∠PTR

$\Rightarrow 30° + \alpha = 2 \times 60°$

$\Rightarrow \alpha = 120° - 30° = 90°$



@apna_channels

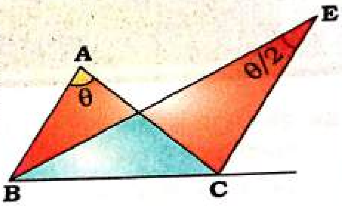
Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

☞ एक त्रिभुज में, एक आधार कोण के आंतरिक द्विभाजक और दूसरे आधार कोण के बाह्य द्विभाजक के बीच बना कोण शेष शीर्ष कोण का आधा होता है।

इस गुण के अनुसार,

$\angle BEC = \frac{\angle A}{2}$.



Ex. ΔABC में, ∠B = 72° और ∠C = 44° है। भुजा BC को D तक बढ़ाया गया है। तब ∠B और ∠ACD के समद्विभाजक E पर मिलते हैं। ∠BEC का माप क्या है?

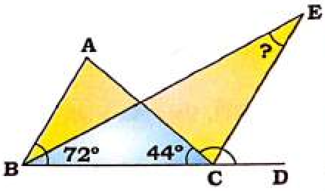
HINTS हम जानते हैं,

$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

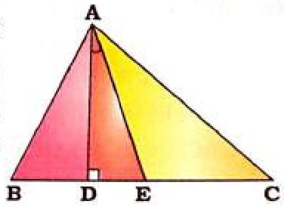
$\Rightarrow \angle A = 180° - 72° - 44°$

$\Rightarrow \angle A = 64°$

$\therefore BEC = \frac{\angle A}{2} = \frac{64°}{2} = 32°$



7. किसी शीर्ष से विपरीत भुजा पर खींचे गए लंब तथा उस शीर्ष कोण के कोण समद्विभाजक के बीच का कोण, शेष दो शीर्ष कोणों के बीच के अंतर का आधा होता है।



यदि AD ⊥ BC और AE, ∠A का कोण समद्विभाजक है, तो

$\angle DAE = \left|\frac{\angle B - \angle C}{2}\right|$

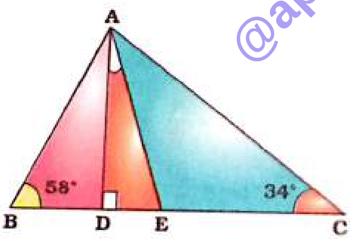
Ex. ΔABC में, AD, BC पर लंबवत है और AE, ∠BAC का समद्विभाजक है। यदि ∠ABC = 58° और ∠ACB = 34° है, तो ∠DAE का माप ज्ञात कीजिए।

HINTS

$\angle DAE = \frac{\angle B - \angle C}{2}$

$= \frac{58° - 34°}{2} = \frac{24°}{2}$

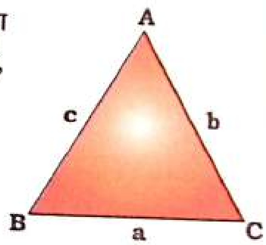
$= 12°$



8. (i) त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं का योग सदैव तीसरी भुजा से अधिक होता है, अर्थात्

$a + b > c,\ b + c > a$

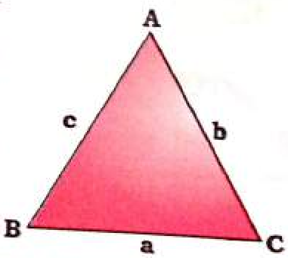
$c + a > b$



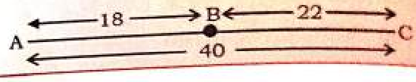
(ii) किसी त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं की लंबाई का अंतर सदैव तीसरी भुजा से छोटा होता है।

$|a - b| < c$, $|b - c| < a$

$|c - a| < b$



1. यदि किसी त्रिभुज की एक भुजा अन्य दो भुजाओं के योग से बड़ी है, तो त्रिभुज नहीं बन सकता।
2. जब एक भुजा की लंबाई अन्य दो भुजाओं की लंबाई के योग के बराबर होती है, तो बिंदु संरेख होते हैं और त्रिभुज नहीं बनता (केवल एक सीधी रेखा आगे-पीछे)। अर्थात्, यदि a + b = c तो बिंदु A, B और C संरेख होते हैं।

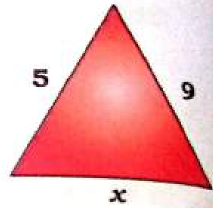


Ex. एक त्रिभुज की तीन भुजाएँ 5 सेमी, 9 सेमी और x सेमी हैं। x का न्यूनतम पूर्णांक मान क्या है?

HINTS

x का मान 4 < x < 14 के बीच है

इस प्रकार, x का न्यूनतम पूर्णांक मान 5 है।



Ex. यदि किसी त्रिभुज की भुजाएँ 7, 12 और x हैं, तथा x एक पूर्णांक है, तो x के संभावित मानों की संख्या ज्ञात कीजिए।

HINTS $12 + 7 > x > 12 - 7$

$\Rightarrow 19 > x > 5$

$x = (19 - 5) - 1 = 13$

@apna_channels

वैकल्पिक विधि

x के संभावित मानों की संख्या = 2 × सबसे छोटी भुजा – 1

= 2 × 7 – 1 = 13

"x के संभावित मानों की संख्या = 2 × सबसे छोटी भुजा – 1"

त्रिभुज का क्षेत्रफल

(A) ΔABC का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × आधार × ऊँचाई

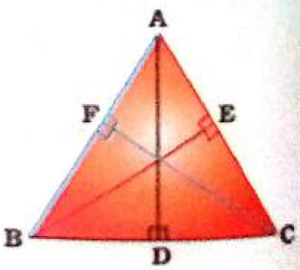
ΔABC का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए, हम किसी भी भुजा को आधार और शीर्ष से आधार तक संगत लंब को ऊँचाई मानते हैं।

ΔABC में,

AD ⊥ BC, BE ⊥ AC और CF ⊥ AB.

क्षेत्रफल (ΔABC) = $\frac{1}{2}$ × BC × AD

$= \frac{1}{2} \times AC \times BE = \frac{1}{2} \times AB \times CF$



Join Telegram: @apna_rwa

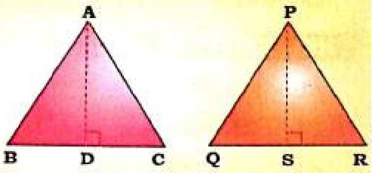
Join Telegram: @yct_publication

(i) यदि दो त्रिभुजों की ऊँचाई समान हो, तो उनके क्षेत्रों का अनुपात उनकी आधारों के अनुपात के समानुपाती होता है।

- यदि AD = PS, तो क्षेत्रफल (ΔABC) : क्षेत्रफल (ΔPQR) = BC : QR

(ii) यदि दो त्रिभुजों के आधार समान हों, तो उनके क्षेत्रों का अनुपात उनकी ऊँचाइयों के अनुपात के समानुपाती होता है।

- यदि BC = QR, तो क्षेत्रफल (ΔABC) : क्षेत्रफल (ΔPQR) = AD : PS



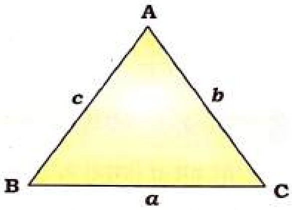
(B) विषमबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल

ΔABC का क्षेत्रफल

$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

(हेरोन का सूत्र)

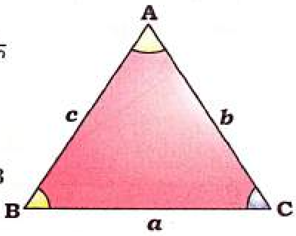
जहाँ, अर्ध परिमाप (s) = $\dfrac{a+b+c}{2}$



(C) जब दो भुजाएँ और इन दोनों भुजाओं के बीच का कोण दिया गया हो

ΔABC का क्षेत्रफल:

$\frac{1}{2}$ ab sinC = $\frac{1}{2}$bc sinA = $\frac{1}{2}$ac sinB



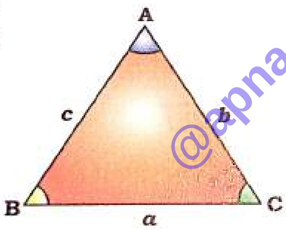
ज्या & कोज्या नियम (Sine & Cosine Rule)

(a) ज्या का नियम (Sine Rule)

एक त्रिभुज के सम्मुख कोण की भुजा और (sine) ज्या का अनुपात परिवृत्त की त्रिज्या के दोगुने के बराबर होता है।

$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R;$

जहाँ, R त्रिभुज की परित्रिज्या है।



(b) कोज्या का नियम (Cosine Rule)

यदि दो भुजाएँ और उन भुजाओं के बीच का कोण दिया गया है, तो हम (cosine) कोज्या नियम द्वारा विपरीत भुजा ज्ञात कर सकते हैं।

$\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

$\cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

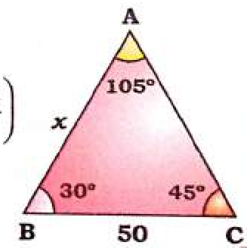
Ex. ΔABC में, ∠B = 30° और ∠C = 45° है। यदि BC = 50 सेमी है, तो AB की लंबाई ज्ञात कीजिए।

HINTS

$\Rightarrow \dfrac{50}{\sin 105^\circ} = \dfrac{x}{\sin 45^\circ}$

$\Rightarrow \dfrac{50}{\frac{(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{2}}} = \dfrac{x}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ $\left(\because \sin 105^\circ = \dfrac{(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{2}}\right)$

$\Rightarrow x = \dfrac{100}{(\sqrt{3}+1)} \times \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = 50(\sqrt{3}-1)$



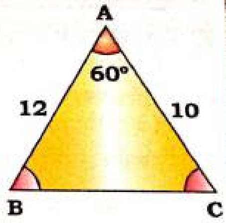
Ex. ΔABC में, AB = 12 सेमी और AC = 10 सेमी, तथा ∠BAC = 60° है। भुजा BC की लंबाई क्या है?

HINTS $\cos A = \dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2\times AB\times AC}$

$\Rightarrow \cos 60^\circ = \dfrac{(12)^2+(10)^2-BC^2}{2\times 12\times 10}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{144+100-BC^2}{2\times 120}$

$\Rightarrow 120 = 244 - BC^2 \Rightarrow BC^2 = 124 \Rightarrow BC = 2\sqrt{31}$ सेमी



त्रिभुजों में सर्वांगसमता और समरूपता

त्रिभुजों की सर्वांगसमता

- दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं, यदि

(i) उनके संगत कोण बराबर हैं

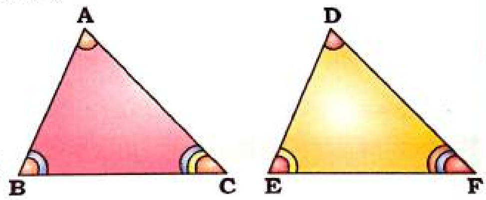
∠A = ∠D,

∠B = ∠E,

∠C = ∠F

(ii) उनकी संगत भुजाएँ बराबर हैं।

AB = DE, BC = EF, CA = FD



त्रिभुजों की समरूपता

- दो त्रिभुज समरूप हैं, यदि

(i) उनके संगत कोण बराबर हैं

∠A = ∠D, ∠B = ∠E, ∠C = ∠F

(ii) उनकी संगत भुजाएँ समान अनुपात (या समानुपात) में होती हैं।

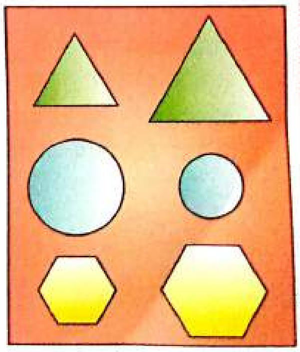
$\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{CA}{FD}$

@apna_channels

सभी सर्वांगसम आकृतियाँ समान होती हैं, लेकिन सभी समान आकृतियाँ सर्वांगसम नहीं होतीं।

नियमित आकृतियों की समरूपता

समरूपता और सर्वांगसमता की जाँच के लिए किन्हीं दो आकृतियों का परीक्षण किया जा सकता है। नियमित आकृतियों के मामले में, यह सबसे आसान है - समान भुजाओं वाली कोई भी दो नियमित आकृतियाँ एक-दूसरे के समान होंगी।



उदाहरण के लिए यदि हम दो सम षट्भुज, या दो वृत्त, या दो समबाहु त्रिभुज, या दो वर्ग, या दो सम पंचभुज लें, तो आकृतियों का प्रत्येक जोड़ा बिना किसी अतिरिक्त जांच के समान होगा।

"आकृति हमेशा समरूप नहीं दिख सकती है-यह सुनिश्चित करने के लिए परीक्षण करना चाहिए।"

Join Telegram: @apna_rwa

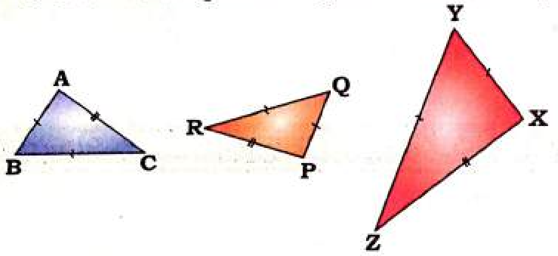
Join Telegram: @yct_publication

त्रिभुजों की सर्वांगसमता और समरूपता की शर्तें

भुजा-भुजा-भुजा परीक्षण (SSS Test)

यदि हम दो त्रिभुजों की तीन भुजाओं की जाँच करें, तो त्रिभुज हैं

- **सर्वांगसम :-** यदि दो त्रिभुजों की भुजाओं के तीन युग्म लंबाई में बराबर हों तो वे सर्वांगसम होते हैं।
- "**समरूप :-** यदि दो त्रिभुजों की संगत भुजाओं की लंबाई एक ही अनुपात में हो।"



ΔABC और ΔPQR में: AB = PQ, BC = QR, AC = PR

∴ ΔABC ≅ ΔPQR

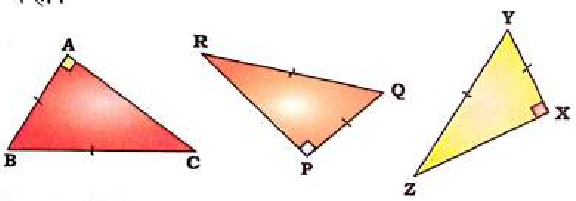
ΔPQR और ΔXYZ में: $\frac{PQ}{XY} = \frac{QR}{YZ} = \frac{PR}{XZ}$

∴ ΔPQR ~ ΔXYZ

समकोण-कर्ण-भुजा परीक्षण (RHS Test)

यदि हम दो समकोण त्रिभुजों की भुजाओं की जाँच करें, तो त्रिभुज हैं

- "**सर्वांगसम :-** यदि कर्ण और एक छोटी भुजा की लंबाई बराबर हो।"
- **समरूप :-** यदि कर्ण और एक जोड़ी छोटी भुजाओं की लंबाई एक ही अनुपात में हो।



ΔABC और ΔPQR में: AB = PQ, BC = RQ

∴ ΔABC ≅ ΔPQR

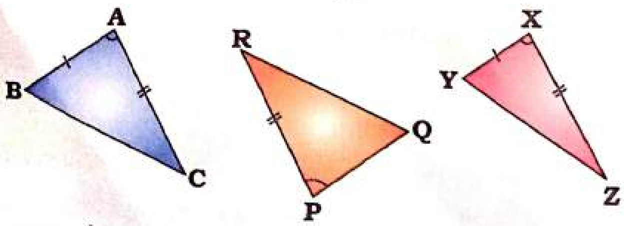
ΔPQR और ΔXYZ में: $\frac{PQ}{XY} = \frac{QR}{YZ}$

∴ ΔPQR ~ ΔXYZ

भुजा-कोण-भुजा परीक्षण (SAS Test)

यदि हम दो त्रिभुजों की दो भुजाओं और उनके सम्मिलित कोण की जाँच करें तो त्रिभुज हैं

- **सर्वांगसम:-** यदि दोनों भुजाएँ बराबर लंबाई की हों तथा बराबर भुजाओं के बीच का कोण भी बराबर हो
- **समरूपता :-** तब होता है जब दोनों भुजाओं की लम्बाई समान अनुपात में हो तथा उनके बीच का कोण बराबर हो।



ΔABC और ΔPQR में: AB = PQ, AC = PR, ∠A = ∠P

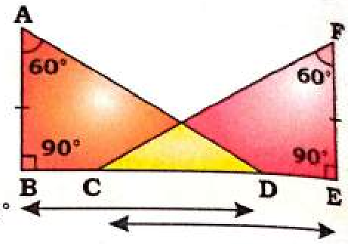
∴ ΔABC ≅ ΔPQR

ΔPQR और ΔXYZ में: $\frac{PQ}{XY} = \frac{QR}{YZ}$, ∠P = ∠X

∴ ΔPQR ~ ΔXYZ

Ex. ΔABD और ΔFEC में, ∠BAD = 60°, *l*(BD) = *l*(EC), ∠ABD = ∠FEC = 90°, और *l*(AB) = *l*(FE) है। ∠BAD और ∠FCE का अनुपात ज्ञात कीजिए।

HINTS ΔABD और ΔFEC में,



AB = FE (दिया हैं)

BD = CE (दिया हैं)

∠B = ∠E = 90°

ΔABD ≅ ΔFEC (SAS से)

⇒ ∠F = 60°

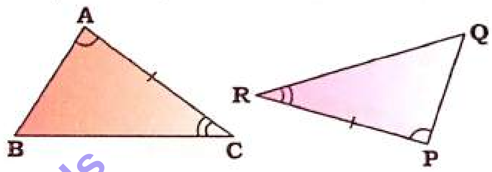
∴ ∠FCE = 180° – 90° – 60° = 30°

∴ $\frac{\angle BAD}{\angle FCE} = \frac{60°}{30°} = \frac{2}{1} = 2:1$

कोण-भुजा-कोण परीक्षण (ASA Test)

यदि हम दो त्रिभुजों के दो कोणों और सम्मिलित भुजा की जाँच करें तो त्रिभुज हैं

- **सर्वांगसम:-** यदि कोणों के दो युग्मों का माप समान हो और केवल एक भुजा लंबाई में बराबर हो।

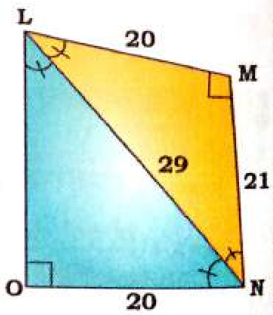


ΔABC और ΔPQR में: BC = QR, ∠A = ∠P, ∠C = ∠R

ΔABC ≅ ΔPQR

Ex. ΔLON और ΔLMN दो समकोण त्रिभुज हैं जिनका कर्ण LN उभयनिष्ठ है और ∠LON = 90° और ∠LMN = 90° है। LN, ∠OLM का समद्विभाजक है। यदि LN = 29 सेमी और ON = 20 सेमी है, तो ΔLMN का परिमाप (सेमी में) क्या है?

HINTS



ΔLON और ΔLMN में,

∠LON = ∠LMN = 90°

LN = LN(उभयनिष्ठ भुजा)

∠OLN = ∠MLN (कोण द्विभाजक)

∴ ΔLON ≅ ΔLMN (कोण-भुजा-कोण द्वारा)

ΔLMN में,

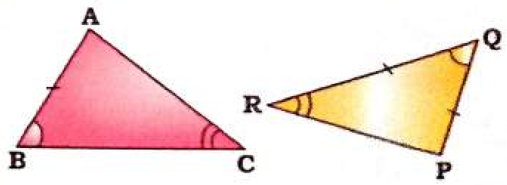
$MN^2 = 29^2 - 20^2 \Rightarrow MN = 21$

∴ ΔLMN का परिमाप = 29 + 20 + 21 = 70 सेमी

कोण-कोण-भुजा परीक्षण (AAS Test)

यदि हम दो त्रिभुजों के दो कोणों और एक संगत गैर-शामिल भुजा की जाँच करें तो त्रिभुज हैं

- **सर्वांगसम:-** यदि दो कोणों के युग्मों का माप समान हो और केवल एक भुजा लंबाई में बराबर हो।



@apna_channels
Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

ΔABC और ΔPQR में:

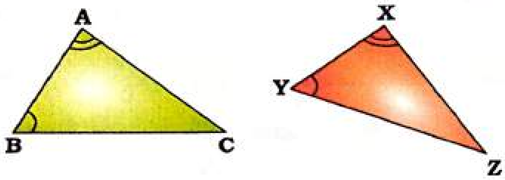
AB = PQ, ∠B = ∠Q, ∠C = ∠R

ΔABC ≅ ΔPQR

कोण-कोण परीक्षण (AA Test)

यदि हम दो त्रिभुजों के कोणों की जाँच करें तो त्रिभुज हैं

- इसी प्रकार यदि त्रिभुज के दो कोण बराबर हों तो दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं।



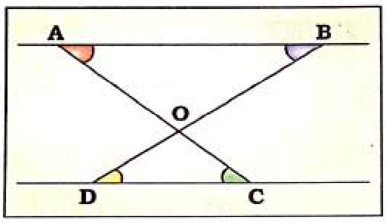
ΔABC और ΔPQR में:

∠A = ∠X, ∠B = ∠Y

ΔABC ~ ΔXYZ

समरूपता और सर्वांगसमता की पहचान

- ज्यामिति में समानता (और सर्वांगसमता) की पहचान करना अत्यंत महत्वपूर्ण है, विशेष रूप से समस्याओं को देखने के लिए।
- समानता को पहचानने की कुंजी समान कोणों को पहचानना है।



स्थिति 01: समांतर रेखाएं

- जब आप दो समांतर रेखाओं को एक तिर्यक रेखा (transversal) द्वारा प्रतिच्छेदित होते हुए देखते हैं, तो तुरंत समरूप त्रिभुजों को खोजें।
- ऐसा इसलिए है क्योंकि समानांतर रेखाएं समान कोणों के कई जोड़े बनाती हैं (उदाहरण के लिए, एकांतर आंतरिक कोण, संगत कोण)।

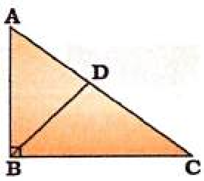
@apna_channels

समांतर रेखाएँ AB और CD, तथा तिर्यक रेखाएँ AC और BD जो O पर प्रतिच्छेद करती हैं, दी गई हैं:

- त्रिभुज ΔAOB और ΔCOD समरूप हैं क्योंकि इनमें बराबर कोणों के दो युग्म हैं:
  - ➤ ∠OAB = ∠OCD (एकांतर अंतः कोण)
  - ➤ ∠OBA = ∠ODC (एकांतर अंतः कोण)
  - ➤ ∠AOB = ∠COD (शीर्षाभिमुख कोण)

स्थिति 02: समकोण त्रिभुज में कर्ण पर शीर्षलंब

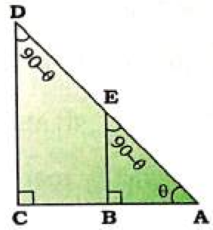
जब आप किसी समकोण त्रिभुज के समकोण शीर्ष से कर्ण तक ऊँचाई खींचते हैं, तो इससे तीन समरूप त्रिभुज बनते हैं:



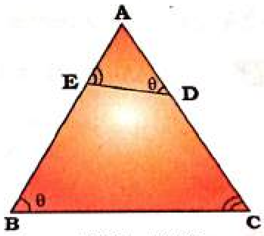
- मूल समकोण त्रिभुज.
- ऊंचाई से बने दो छोटे त्रिभुज।
- उदाहरण (ΔABC को B पर समकोण बनाते हुए, BD को AC पर ऊँचाई मानते हुए):
- ΔABC ~ ΔADB (वे ∠A साझा करते हैं, और दोनों का कोण समकोण है)।
- ΔABC ~ ΔBDC (वे ∠C साझा करते हैं, और दोनों का कोण समकोण है)।
- इसलिए, तीनों त्रिभुज एक दूसरे के समरूप हैं:

ΔABC ~ ΔADB ~ ΔBDC.

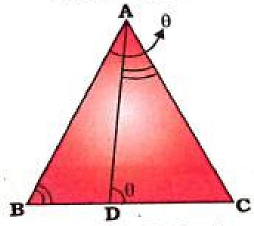
कुछ समरूप आकृतियाँ



ΔABE ~ ΔACD



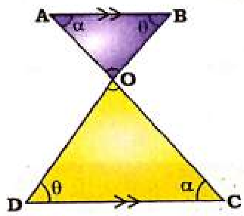
ΔADE ~ ΔABC



∠ADC = ∠BAC = θ

∠DAC = ∠ABC (Given)

ΔBAC ~ ΔADC



ΔAOB ~ ΔCOD

Ex. ΔABC में, ∠B = 87° और ∠C = 60° है। बिंदु D और E क्रमशः भुजाओं AB और AC पर इस प्रकार हैं कि ∠DEC = 93° और DAE है।

HINTS

∠DEA = ∠ABC

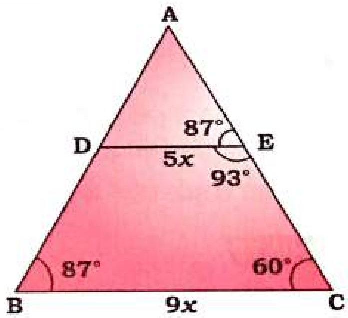
∠A = उभयनिष्ठ

⇒ ΔAED ~ ΔABC

$\frac{AE}{AB} = \frac{ED}{BC} = \frac{AD}{AC}$

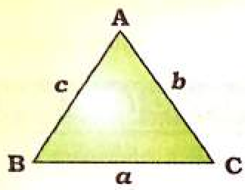
⇒ $\frac{AE}{14.4} = \frac{5}{9}$

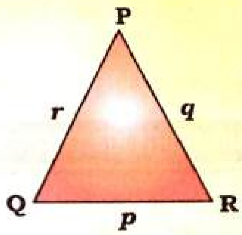
⇒ AE = 8 सेमी



समरूप त्रिभुजों के गुणधर्म

यदि ΔABC और ΔPQR समरूप हैं, तो





(i) $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}$

(ii) संगत भुजाओं का अनुपात
= परिमाप का अनुपात
= अर्ध-परिधि(s) का अनुपात
= संगत माध्यिकाओं का अनुपात
= अंतःत्रिज्या का अनुपात
= परित्रिज्या का अनुपात

(iii) क्षेत्रफल का अनुपात
= संगत भुजाओं के वर्गों का अनुपात
= परिमाप के वर्ग का अनुपात
= अर्ध-परिमाप के वर्ग का अनुपात
= संगत माध्यिकाओं के वर्ग का अनुपात
= अंतःत्रिज्या के वर्ग का अनुपात
= परित्रिज्या के वर्ग का अनुपात

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. यदि दो समरूप त्रिभुजों की संगत भुजाओं का अनुपात $\sqrt{3}:\sqrt{2}$ है, तो दोनों त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात क्या होगा?

HINTS क्षेत्रफल (ΔABC) : क्षेत्रफल(ΔPQR) = $(\sqrt{3})^2 : (\sqrt{2})^2 = 3:2$

Ex. माना ΔABC ~ ΔQPR और $\frac{ar(\Delta ABC)}{ar(\Delta QPR)} = \frac{64}{169}$. यदि AB = 10 सेमी, BC = 7 सेमी और AC = 16 सेमी, तो QR (सेमी में) बराबर है:

HINTS यहाँ, ΔABC ~ ΔQPR & $\frac{ar(\Delta ABC)}{ar(\Delta QPR)} = \frac{64}{169}$

$\Rightarrow \frac{AC}{QR} = \sqrt{\frac{64}{169}} \Rightarrow \frac{16}{QR} = \frac{8}{13}$

$\Rightarrow QR = \frac{13 \times 16}{8} = 26$ सेमी

शंकुओं की समरूपता

यदि दो शंकु समान हैं और उनकी ऊंचाइयां (एक रैखिक आयाम) $x:y$ के अनुपात में हैं।

- **रैखिक आयाम:** उनके अन्य रैखिक आयाम (जैसे आधार त्रिज्या, तिरछी ऊँचाई) भी समान अनुपात $x:y$ में होंगे।
- **पृष्ठीय क्षेत्रफल:** इनके विभिन्न पृष्ठीय क्षेत्रफल (कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल, आधार पृष्ठीय क्षेत्रफल, वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल) $x^2:y^2$ के अनुपात में होंगे।
- **आयतन:** उनका आयतन $x^3:y^3$ के अनुपात में होगा।

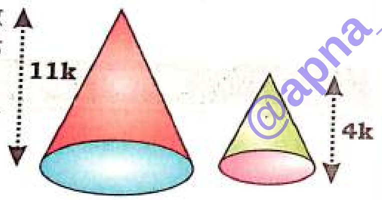
Ex. यदि समान शंकुओं की ऊँचाइयों का अनुपात 4 : 11 है। तो निम्नलिखित का अनुपात ज्ञात कीजिए:

तिरछी ऊँचाई, पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन

HINTS

उनकी आधार त्रिज्याएँ और तिर्यक ऊँचाईयाँ भी 4 : 11 के अनुपात में होंगी।

उनके पृष्ठीय क्षेत्रफल का अनुपात $4^2:11^2$ होगा, जो 16 : 121 है।



उनका आयतन $4^3:11^3$ के अनुपात में होगा, जो 64 : 1331 है।

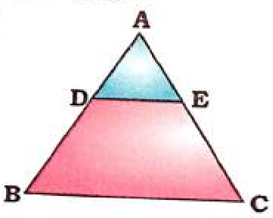
आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय (थेल्स प्रमेय)

- किसी त्रिभुज की एक भुजा के समान्तर खींची गई रेखा अन्य दो भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करती है।
- यदि कोई रेखा त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करती है, तो वह रेखा तीसरी भुजा के समांतर होनी चाहिए।

ΔABC में, यदि DE || BC, तो

$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

'या' यदि $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$, तो DE || BC



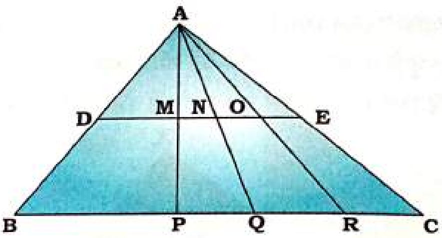
- इस प्रमेय से प्राप्त कुछ परिणाम, जिनका हम उपयोग करेंगे, इस प्रकार हैं:

(i) $\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC}$ (ii) $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$

(iii) ΔADE ~ ΔABC

(iv) $\frac{Ar(\Delta ADE)}{Ar(\Delta ABC)} = \left(\frac{AD}{AB}\right)^2 = \left(\frac{AE}{AC}\right)^2 = \left(\frac{DE}{BC}\right)^2$

- त्रिभुज की एक भुजा के समान्तर खींची गई रेखा त्रिभुज की माध्यिका, कोण समद्विभाजक और ऊँचाई को उसी अनुपात में विभाजित करती है जिस अनुपात में यह त्रिभुज की अन्य दो भुजाओं को विभाजित करती है।



ΔABC में, AP, AQ और AR क्रमशः माध्यिका, कोण द्विभाजक और शीर्षलंब हैं और DE||BC है, तो

$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = \frac{AM}{MP} = \frac{AN}{NQ} = \frac{AO}{OR}$

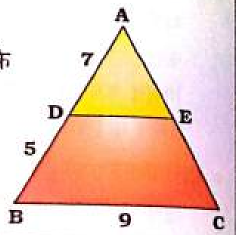
Ex. ΔABC में, D और E क्रमशः भुजाओं AB और AC पर स्थित बिंदु इस प्रकार हैं कि ∠ADE = ∠B है। यदि AD = 7 सेमी, BD = 5 सेमी और BC = 9 सेमी है, तो DE (सेमी में) किसके बराबर है?

HINTS

आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय का उपयोग करके

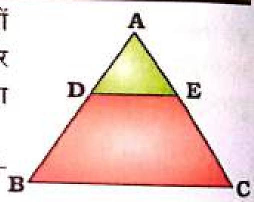
$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{7}{12} = \frac{DE}{9}$

$\Rightarrow DE = \frac{63}{12} = 5.25$ सेमी



मध्य-बिंदु प्रमेय

किसी त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं के मध्य-बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखाखंड तीसरी भुजा के समांतर होता है तथा तीसरी भुजा के परिमाण का आधा होता है और इसके विपरीत भी सत्य है।



- यदि D और E क्रमशः AB और AC के मध्य-बिंदु हैं, तो

DE || BC और $DE = \frac{BC}{2}$

- यदि DE || BC और $DE = \frac{BC}{2}$ है, तो D और E क्रमशः AB और AC के मध्य-बिंदु हैं।

(i) $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} = \frac{1}{2}$ (ii) $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = 1$

(iii) ΔADE ~ ΔABC (iv) $\frac{क्षे.(\Delta ADE)}{क्षे.(\Delta ABC)} = \frac{1}{4}$

त्रिभुजों के प्रकार

त्रिभुजों को कोणों और भुजाओं के आधार पर वर्गीकृत किया जाता है।

त्रिभुजों के प्रकार

कोणों के आधार पर
- समकोण त्रिभुज
- न्यूनकोण त्रिभुज
- अधिककोण त्रिभुज

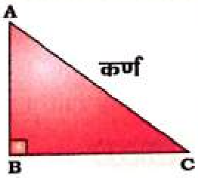
भुजाओं के आधार पर
- विषमबाहु त्रिभुज
- समद्विबाहु त्रिभुज
- समबाहु त्रिभुज

@apna_channels
Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

समकोण त्रिभुज

जिस त्रिभुज में दो भुजाएँ एक-दूसरे पर लंब होती हैं, जिससे एक समकोण बनता है, उसे समकोण त्रिभुज कहते हैं। समकोण के सम्मुख वाली भुजा को कर्ण कहा जाता है, और समकोण से सटी हुई दो भुजाओं को लंब और आधार कहते हैं।



समकोण त्रिभुज के गुण

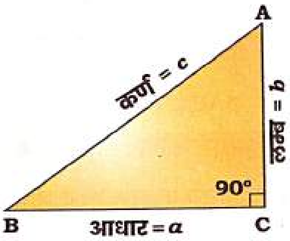
(i) ठीक एक कोण समकोण होता है, अर्थात $\angle B = 90°$

- ठीक दो कोण न्यूनकोण होंगे।

  अर्थात, $\angle A < 90°$, $\angle C < 90°$
- एक कोण अन्य दो कोणों के योग के बराबर होता है, अर्थात्

  $\angle B = \angle A + \angle C = 90°$

(ii) (a) **पाइथागोरस प्रमेय:** एक समकोण त्रिभुज में, कर्ण का वर्ग अन्य दो भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर होता है।



यदि किसी समकोण त्रिभुज की तीन भुजाएँ a, b और c हैं, तो पाइथागोरस प्रमेय के अनुसार:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Ex. $3^2 + 4^2 = 5^2$

(b) **पाइथागोरियन त्रिक :** पूर्णांकों का ऐसा समूह a, b, c जो पाइथागोरस प्रमेय ($a^2 + b^2 = c^2$) को संतुष्ट करता है या एक समकोण त्रिभुज की भुजाएँ हैं, उसे पाइथागोरस त्रिक कहते हैं।

- सबसे छोटा पाइथागोरस त्रिक (3, 4, 5) है।
- यदि (a, b, c) एक पाइथागोरस त्रिक है, तो (ak, bk, ck) या $\left(\frac{a}{k}, \frac{b}{k}, \frac{c}{k}\right)$ भी एक पाइथागोरस त्रिक होगा।

निम्नलिखित पाइथागोरस त्रिक का उपयोग परीक्षाओं में अक्सर किया जाता है।

3 4 5
- ×1/2 → 1.5, 2, 2.5
- ×3 → 9, 12, 15
- ×2 → 6, 8, 10
- ×4 → 12, 16, 20
- ×5 → 15, 20, 25

5, 12, 13,
- ×2 → 10, 24, 26

7, 24, 25,
- ×1/2 → 3.5 12, 12.5
- ×2 → 14, 48, 50
- ×3 → 21, 72, 75

$(2n, n^2-1, n^2+1)$ $\left(\frac{n^2+1}{2}, \frac{n^2-1}{2}, n\right)$

1, 1, $\sqrt{2}$
9, 40, 41
11, 60, 61
12, 35, 37
16, 63, 65
13, 84, 85
20, 21, 29
39, 80, 89
36, 77, 85
65, 72, 97
20, 99, 101

त्रिक बनाने की ट्रिक

(a) सम संख्या के लिए →

$6 \rightarrow \frac{6}{2} = 3 \xrightarrow{\text{वर्ग}} 9$; $9-1 = 8$, $9+1 = 10$

$8 \rightarrow \frac{8}{2} = 4 \xrightarrow{\text{वर्ग}} 16$; $16-1 = 15$, $16+1 = 17$

$12 \rightarrow \frac{12}{2} = 6 \xrightarrow{\text{वर्ग}} 36$; $36-1 = 35$, $36+1 = 37$

(b) विषम संख्या के लिए →

$3 \xrightarrow{\text{वर्ग}} 9 \rightarrow \frac{9}{2} = 4.5$; $-0.5 \rightarrow 4$, $+0.5 \rightarrow 5$

$5 \xrightarrow{\text{वर्ग}} 25 \rightarrow \frac{25}{2} = 12.5$; $-0.5 \rightarrow 12$, $+0.5 \rightarrow 13$

$7 \xrightarrow{\text{वर्ग}} 49 \rightarrow \frac{49}{2} = 24.5$; $-0.5 \rightarrow 24$, $+0.5 \rightarrow 25$

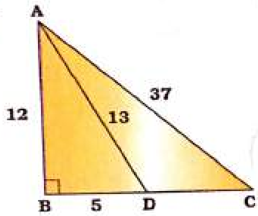
"(20, 21, 29) और (20, 99, 101) त्रिक हैं।"

Ex. ΔABC में, $\angle B$ पर समकोण है और D, BC पर एक ऐसा बिंदु है जहाँ BD=5 सेमी, AD=13 सेमी और AC=37 सेमी है, तो BC की लंबाई सेमी में ज्ञात कीजिए।

@apna_channels

HINTS

AB = 12 सेमी (5, 12, 13 के त्रिक द्वारा)



$(12)^2 + (BC)^2 = (37)^2$

$\Rightarrow (BC)^2 = (37)^2 - (12)^2$

$\Rightarrow BC^2 = 25 \times 49$

$\Rightarrow BC = 5 \times 7 = 35$

वैकल्पिक विधि

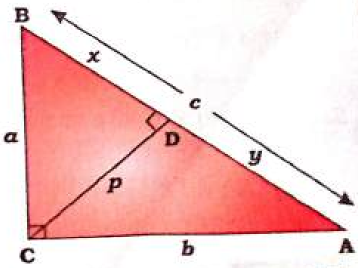
(5, 12, 13) और (12, 35, 37) त्रिक हैं।

त्रिक की मदद से, AB = 12 सेमी दी गई शर्त को संतुष्ट करता है।

$\therefore$ BC = 35 सेमी

(iii) यदि एक समकोण ΔABC में, शीर्ष जो कि समकोण ($\angle C$) है, से कर्ण AB पर एक लंब (CD) खींचा जाता है, तो...

$\Delta ABC \sim \Delta BCD \sim \Delta ACD$

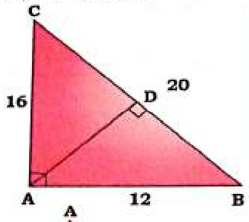


- $a^2 = x \times c$
- $p^2 = x \times y$
- $b^2 = y \times c$
- $a \times b = p \times c$
- $\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. ΔABC में, $\angle A = 90°$ है और AD, BC पर D पर लंब है। यदि AB = 12 सेमी और AC=16 सेमी है, तो BD की लंबाई (सेमी में) क्या है?



HINTS

$AB^2 = BD \times BC$

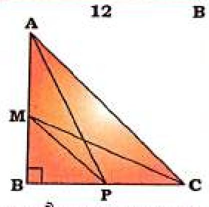
$\Rightarrow 12^2 = BD \times 20$

$\Rightarrow 144 = BD \times 20$

$\Rightarrow BD = 7.2$ सेमी

(iv) यदि P और M, ΔABC की भुजाओं BC और AB पर क्रमशः दो बिंदु हैं, जो B पर समकोण है, तो...

$AP^2 + MC^2 = AC^2 + MP^2$



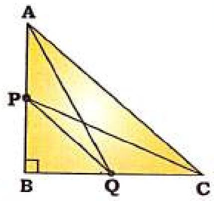
Ex. ΔABC में, जिसका कोण B समकोण है, भुजाओं AB और BC पर क्रमशः बिंदु P और Q हैं। यदि AQ = 11 सेमी, PC = 8 सेमी और AC = 13 सेमी है, तो PQ की लंबाई (सेमी में) ज्ञात कीजिए।

HINTS

$AQ^2 + PC^2 = AC^2 + PQ^2$

$\Rightarrow 121 + 64 = 169 + PQ^2$

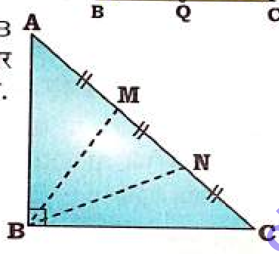
$\Rightarrow 16 = PQ^2 \Rightarrow PQ = 4$



(v) ΔABC एक समकोण त्रिभुज है, जिसमें B पर समकोण है। यदि M और N, AC पर ऐसे बिंदु हैं कि AM = MN = NC है, तो.

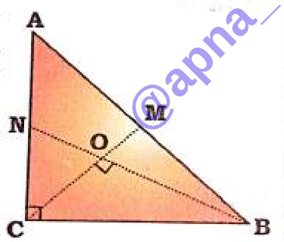
$BM^2 + BN^2 = \dfrac{(n-1)(2n-1)AC^2}{6n}$

यहां, n = बराबर भागों की संख्या



(vi) ΔABC में, $\angle C = 90°$, है और M और N क्रमशः भुजाओं AB और AC के मध्य-बिंदु हैं। CM और BN एक दूसरे को O पर प्रतिच्छेद करते हैं और $\angle BOC = 90$ है, तो,

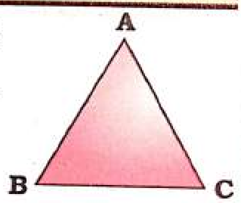
$BN = \dfrac{BC\sqrt{6}}{2}$



न्यूनकोण त्रिभुज

यदि किसी त्रिभुज का प्रत्येक कोण न्यूनकोण हो, तो उस त्रिभुज को न्यूनकोण त्रिभुज कहते हैं।

यदि $\angle A < 90°$, $\angle B < 90°$ और $\angle C < 90°$ है, तो ΔABC एक न्यूनकोण त्रिभुज है।



न्यूनकोण त्रिभुज के गुण

(i) त्रिभुज के किन्हीं दो कोणों का योग हमेशा तीसरे कोण से बड़ा होता है।

$\angle A + \angle B > \angle C$, $\angle B + \angle C > \angle A$, $\angle C + \angle A > \angle B$

Ex. निम्नलिखित में से कौन सा एक न्यूनकोण त्रिभुज के कोणों का अनुपात नहीं हो सकता है?

(a) 2 : 5 : 8
(b) 4 : 1 : 4
(c) 2 : 3 : 4
(d) 1 : 1 : 1

HINTS गुण (i) के अनुसार, विकल्प (a) एक न्यूनकोण त्रिभुज के कोणों का अनुपात नहीं हो सकता।

(ii) त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं के वर्गों का योग, तीसरी भुजा के वर्ग से बड़ा होता है।

$AB^2 + BC^2 > AC^2$, $BC^2 + AC^2 > AB^2$, $AC^2 + AB^2 > BC^2$

Ex. निम्नलिखित में से कौन सी एक न्यूनकोण त्रिभुज की तीन भुजाएँ हो सकती है?

(a) 4 सेमी, 8 सेमी, 7 सेमी
(b) 1 सेमी, 2 सेमी, 3 सेमी
(c) 2 सेमी, 4 सेमी, 3 सेमी
(d) 9 सेमी, 12 सेमी, 15 सेमी

HINTS इस तरह के प्रश्नों में, आपको गुण (ii) का उपयोग करके प्रत्येक विकल्प की जाँच करनी होगी।

यहाँ, $4^2 + 8^2 > 7^2$, $8^2 + 7^2 > 4^2$ & $7^2 + 4^2 > 8^2$

इस प्रकार विकल्प (A) सही उत्तर है।

इसी प्रकार आप अन्य विकल्पों की भी जांच कर सकते हैं, लेकिन दिए गए अन्य सभी विकल्प गुणधर्म को संतुष्ट नहीं करेंगे।

अधिककोण त्रिभुज

यदि किसी त्रिभुज का एक कोण अधिककोण हो, तो उस त्रिभुज को अधिककोण त्रिभुज कहते हैं।

ΔABC अधिक कोण वाला त्रिभुज है।

अधिककोण त्रिभुज के गुण

(i) त्रिभुज का एक कोण अधिककोण है तथा अन्य दो कोण न्यूनकोण हैं।

$\angle B > 90°$ और $0° < \angle A, \angle C < 90°$

(ii) त्रिभुज के दो न्यून कोणों का योग अधिक कोण से कम है।

$(\angle A + \angle C) < \angle B$

(iii) दो छोटी भुजाओं के वर्गों का योग तीसरी भुजा (सबसे बड़ी भुजा) के वर्ग से कम होता है।

- $AB^2 + BC^2 < AC^2$

Ex. एक अधिक कोण ΔPQR में, $\angle Q$ अधिक कोण है यदि भुजा PQ = 11 सेमी, QR = 15 सेमी है तो भुजा PR की न्यूनतम संभव पूर्णांक लंबाई ज्ञात कीजिए।

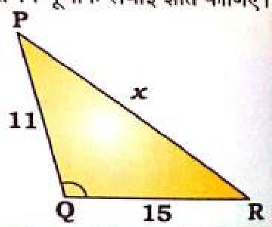
HINTS

$11^2 + 15^2 < x^2$

$\Rightarrow 121 + 225 < x^2$

$\Rightarrow 346 < x^2$

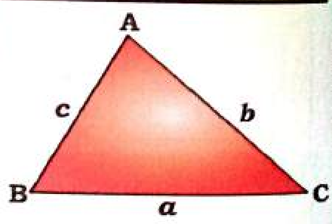
$\Rightarrow x_{min} = 18.60 \sim 19$ cm



विषमबाहु त्रिभुज

यदि किसी त्रिभुज की तीनों भुजाएँ अलग-अलग लंबाई की हों तो त्रिभुज को विषमबाहु त्रिभुज कहा जाता है।

$AB \neq BC \neq CA \Rightarrow a \neq b \neq c$



विषमबाहु त्रिभुज के गुण

(i) कोई भी दो भुजाएं लंबाई में बराबर नहीं होतीं।

$AB \neq BC \neq CA$ or $a \neq b \neq c$

(ii) कोई भी दो कोण बराबर नहीं होते, अर्थात् $\angle A \neq \angle B \neq \angle C$

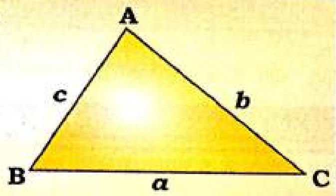
(iii) त्रिभुज न्यून कोण, समकोण या अधिक कोण हो सकता है।

@apna_channels
Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

(iv) विषमबाहु त्रिभुज का परिमाप, अर्ध-परिधि और क्षेत्रफल

- परिधि = a + b + c
- अर्ध-परिधि(s) = $\frac{a+b+c}{2}$
- ΔABC का क्षेत्रफल = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$



Ex. विषमबाहु त्रिभुज ABC की भुजाएँ 3 : 5 : 6 के अनुपात में हैं तथा अर्ध-परिमाप 42 सेमी है, त्रिभुज की सबसे बड़ी और सबसे छोटी भुजाओं का अंतर क्या है?

HINTS अर्द्ध परिधि = $\frac{3x+5x+6x}{2}$

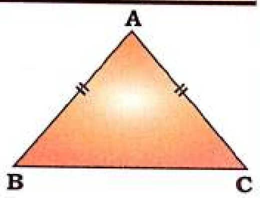
$\Rightarrow 42 = 7x \Rightarrow x = 6$

अभीष्ट अंतर = $6x - 3x = 3 \times 6 = 18$ सेमी

समद्विबाहु त्रिभुज

यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाएँ लंबाई में बराबर हों, तो त्रिभुज को समद्विबाहु त्रिभुज कहते हैं।

यदि AB = AC ≠ BC, तो ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है।



समद्विबाहु त्रिभुज के गुण

(i) दोनों भुजाओं की लंबाई बराबर होती है, लेकिन तीसरी भुजा की लंबाई बराबर भुजाओं से छोटी या बड़ी हो सकती है।

AB = AC & BC > AB या BC < AB

(ii) बराबर भुजाओं के सम्मुख दो कोण बराबर होते हैं।

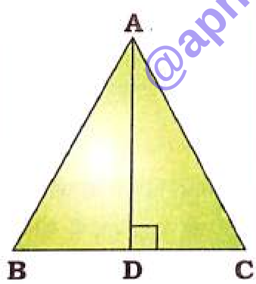
∠B = ∠C (भुजा AC और AB के विपरीत)

(iii) समद्विबाहु ΔABC में, माध्यिका, कोण समद्विभाजक, लम्ब समद्विभाजक तथा असमान भुजा की ऊँचाई समान होती है तथा यह ΔABC को दो समकोण त्रिभुजों में विभाजित करती है।

ΔABC में, AD माध्यिका, कोण समद्विभाजक, लंब समद्विभाजक और शीर्षलंब है।

AD ⊥ BC और BD = DC,

तब ΔABD ≅ ΔACD

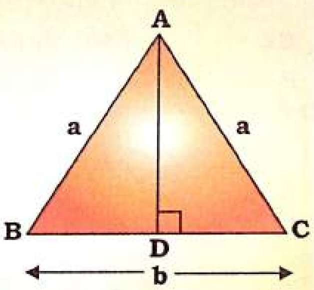


(iv) परिमाप, अर्ध-परिमाप और क्षेत्रफल

- परिमाप = AB + BC + CA = 2a + b.
- अर्ध परिमाप

$= \frac{AB+BC+CA}{2} = a + \frac{b}{2}$

- AD = $\frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{2}$
- ΔABC का क्षेत्रफल = $\frac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2}$



समद्विबाहु त्रिभुज ABC में, ΔABD और ΔACD दो सर्वांगसम समकोण त्रिभुज हैं। इन समकोण त्रिभुजों में पाइथागोरस त्रिक का प्रयोग करें।

Ex. एक समद्विबाहु त्रिभुज का परिमाप 50 सेमी है। यदि आधार 18 सेमी है, तो बराबर भुजाओं की लंबाई ज्ञात कीजिए।

HINTS परिमाप, 2a + b = 50

⇒ 2a + 18 = 50

⇒ a = 16

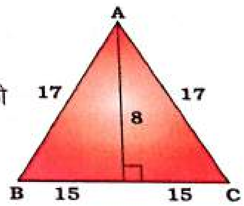
Ex. एक समद्विबाहु त्रिभुज के आधार पर डाले गए लंब की लंबाई 8 सेमी है। यदि इसका परिमाप 64 सेमी है, तो इस त्रिभुज का क्षेत्रफल क्या है?

HINTS

30 + 34 = 64 की जाँच करें

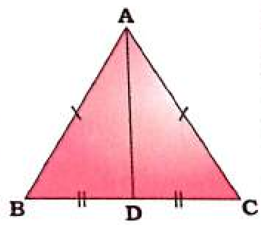
[शीघ्र हल करने के लिए त्रिक (8, 15, 17) की अवधारणा लागू करें]

क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times 30 \times 8 = 120$ सेमी²



(v) यदि कोई रेखा (जो त्रिभुज की दो समान भुजाओं के उभयनिष्ठ शीर्ष को जोड़ती है) आधार को समद्विभाजित करती है तो वह रेखा आधार पर लंबवत होती है और इसके विपरीत भी सत्य है।

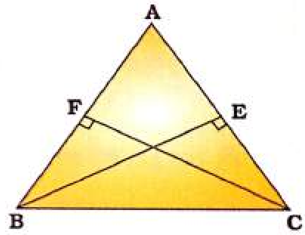
यदि AB = AC और BD = DC, तो ∠ADB = ∠ADC = 90°



(vi) यदि AB = AC और BE ⊥ AC

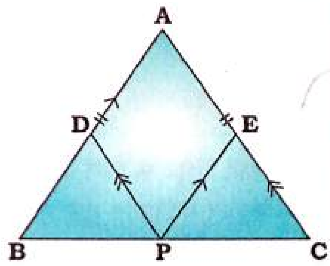
तथा CF ⊥ AB, तो

BE = CF



(vii) ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है (AB = AC)। यदि P भुजा BC पर एक बिंदु है और DP || AC तथा EP || AB है, तो

DP + PE = AB = AC

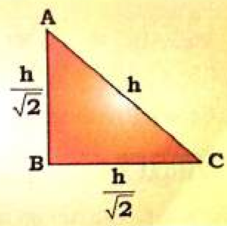


समद्विबाहु समकोण त्रिभुज

- भुजाओं का अनुपात

⇒ AB : BC : AC = 1 : 1 : $\sqrt{2}$

- क्षेत्रफल = $\frac{\text{कर्ण}^2}{4}$
- परिमाप = $h(\sqrt{2}+1)$



Ex. यदि समद्विबाहु समकोण त्रिभुज का कर्ण एक वर्ग की भुजा के बराबर है जिसका क्षेत्रफल 256 वर्ग सेमी है। त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

HINTS वर्ग की भुजा = 16 सेमी

वर्ग की भुजा = h = 16 सेमी

क्षेत्रफल = $\frac{h^2}{4} = \frac{16^2}{4} = \frac{256}{4} = 64$ सेमी²

@apna_channels

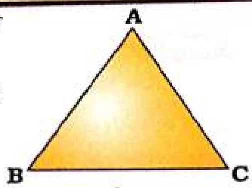
Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

समबाहु त्रिभुज

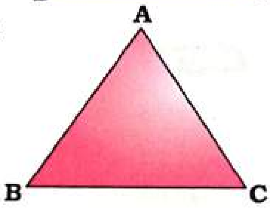
यदि किसी त्रिभुज की तीनों भुजाएँ बराबर लंबाई की हों, तो त्रिभुज को समबाहु त्रिभुज कहते हैं।

यदि AB = BC = AC, तो ABC एक समबाहु त्रिभुज है।



समबाहु त्रिभुज के गुण

माना ΔABC एक समबाहु त्रिभुज है जिसमें AB = BC = AC है



(i) तीनों भुजाओं की लंबाई बराबर है,
अर्थात् AB = BC = AC

(ii) तीनों कोण बराबर होंगे और प्रत्येक कोण का मान 60° होगा
अर्थात् $\angle A = \angle B = \angle C$

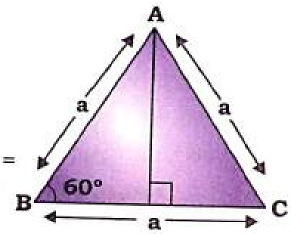
(iii) एक समबाहु ΔABC में,

(a) तीनों माध्यिकाएँ बराबर हैं।

(b) तीनों ऊँचाइयाँ बराबर हैं ।

(c) प्रत्येक माध्यिका = प्रत्येक ऊँचाई = $\frac{\sqrt{3}}{2}a$

(d) त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$



(iv) समबाहु ΔABC में अन्तःकेन्द्र, परिकेन्द्र, लंबकेन्द्र तथा केन्द्रक एक ही बिन्दु पर होते हैं।

(v) यदि किसी त्रिभुज की ऊँचाई बराबर हो तो वह त्रिभुज समबाहु त्रिभुज होता है।

त्रिभुज के केंद्र

हम त्रिभुज के 5 प्रकार के केंद्रों का अध्ययन करेंगे

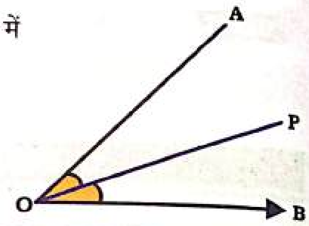
(i) अंतःकेंद्र (ii) परिकेन्द्र
(iii) लंबकेंद्र (iv) केन्द्रक
(v) बहिर्केंद्र

कोण समद्विभाजक: वह रेखा जो किसी कोण को दो बराबर भागों में विभाजित करती है, कोण समद्विभाजक कहलाती है।

यदि रेखा OP, ∠AOB को दो बराबर भागों में विभाजित करती है तो

$\angle AOP = \angle BOP = \frac{\angle AOB}{2}$, तब

OP एक कोण द्विभाजक है।



त्रिभुज के कोण का समद्विभाजक

↓

अंतः कोण या आंतरिक | **बाह्य कोण या बाहरी**

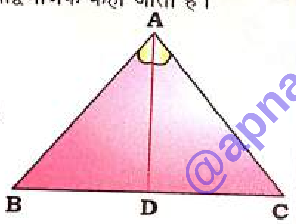
त्रिभुज का आंतरिक कोण समद्विभाजक

यदि कोई रेखा त्रिभुज के आंतरिक कोण को समद्विभाजित करती है, तो उसे त्रिभुज का आंतरिक कोण समद्विभाजक कहा जाता है।

यदि रेखा AD इस प्रकार है कि

∠BAD = ∠CAD है, तो AD, ∠A

का आंतरिक समद्विभाजक है।



आंतरिक कोण द्विभाजक प्रमेय

किसी त्रिभुज के कोण का आंतरिक समद्विभाजक, कोण वाली भुजाओं के अनुपात में विपरीत भुजा को आंतरिक रूप से विभाजित करता है, अर्थात्

$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$

Ex. ABC में, ∠B का समद्विभाजक AC से बिंदु D पर मिलता है। यदि AB = 12 सेमी, BC = 18 सेमी और AC = 15 सेमी है, तो AD की लंबाई (सेमी में) ज्ञात कीजिए।

HINTS

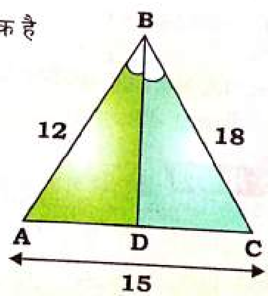
चूँकि BD, ∠ABC का कोण समद्विभाजक है

$\Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC} = \frac{12}{18} = \frac{AD}{DC}$

$\Rightarrow AD : DC = 2 : 3$

साथ ही, AC = 15 सेमी

$\therefore AD = \frac{15}{(2+3)} \times 2 = 6$ सेमी



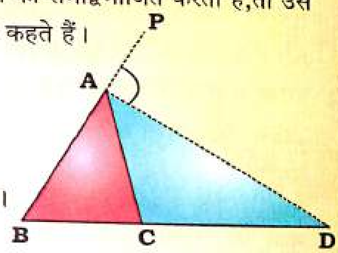
त्रिभुज का बाह्य कोण समद्विभाजक

यदि कोई रेखा त्रिभुज के बाह्य कोण को समद्विभाजित करती है,तो उसे त्रिभुज का बाह्य कोण समद्विभाजक कहते हैं।

यदि रेखा AD इस प्रकार है कि

$\angle PAD = \angle DAC = \left(\frac{\pi - A}{2}\right)$

तो AD, ∠A का बाह्य द्विभाजक है।

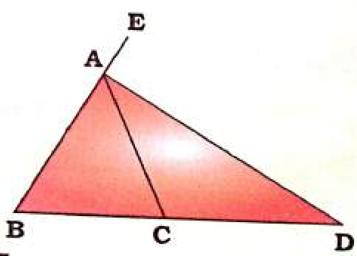


बाह्य कोण द्विभाजक प्रमेय

एक त्रिभुज के कोण का बाह्य समद्विभाजक विपरीत भुजा को बाह्य रूप से कोण वाली भुजाओं के अनुपात में विभाजित करता है।

$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$

Ex. यदि दी गई आकृति, 2∠EAD = ∠EAC, BC = 40 सेमी, BA = 8 सेमी और CD = 24 सेमी, तो AC बराबर है



HINTS

चूँकि AD कोण का समद्विभाजक है

$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD} \Rightarrow \frac{8}{AC} = \frac{64}{24} \Rightarrow AC = 3$ सेमी

Selected हैं Selection दिलाएंगे

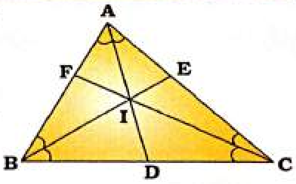
@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

अंतःकेन्द्रः

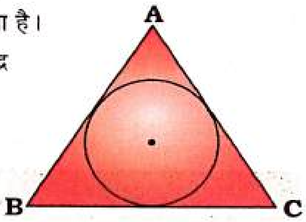
त्रिभुज के कोणों के आंतरिक द्विभाजक के प्रतिच्छेद बिंदु को अंतःकेन्द्र कहा जाता है।



- यदि AD, BE और CF क्रमशः ∠A, ∠B और ∠C के आंतरिक कोण समद्विभाजक हैं, तो कोणों के तीनों समद्विभाजक एक बिंदु से होकर गुजरते हैं, जिसे ΔABC का अंतःकेंद्र कहा जाता है।
- अंतःकेन्द्र त्रिभुज के अंतःवृत्त का केन्द्र होता है।
- इसे सामान्यतः 'I' से दर्शाया जाता है।

I → ΔABC का अन्तःकेन्द्र.

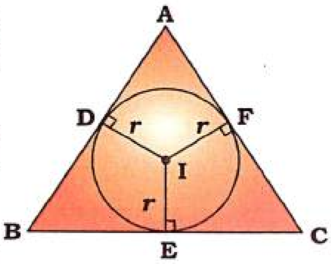
I → वृत्त का केन्द्र.



अंतःकेंद्र के गुण

(i) त्रिभुज के कोणों के तीनों आंतरिक समद्विभाजक एक बिंदु (अंतःकेंद्र) से होकर गुजरते हैं।

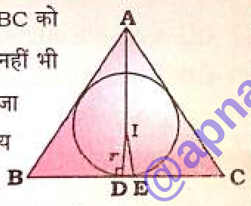
(ii) त्रिभुज का अंतःकेन्द्र त्रिभुज की तीनों भुजाओं से समान दूरी पर है तथा दूरी अंतःत्रिज्या के बराबर है।



यदि वृत्त भुजा AB, BC और AC को क्रमशः बिंदु D, E और F पर स्पर्श करता है तथा I अंतःकेंद्र है, तो

ID = IE = IF (अंतःत्रिज्या)

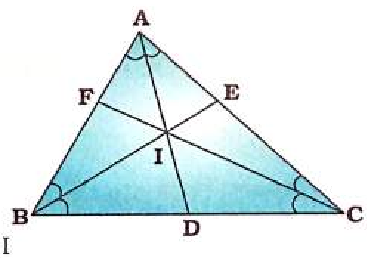
ΔABC के ∠A का समद्विभाजक भुजा BC को बिंदु E पर प्रतिच्छेदित कर सकता है या नहीं भी कर सकता है जहाँ अंतःवृत् त्रिभुज की भुजा BC को स्पर्श करता है और यही बात अन्य कोण समद्विभाजकों के लिए भी सत्य है।



∠A का समद्विभाजक BC से D पर मिलता है और भुजा BC वृत्त को E पर स्पर्श करती है।

(iii)

- $\angle BIC = 90^\circ + \frac{\angle A}{2}$
- $\angle AIC = 90^\circ + \frac{\angle B}{2}$
- $\angle AIB = 90^\circ + \frac{\angle C}{2}$



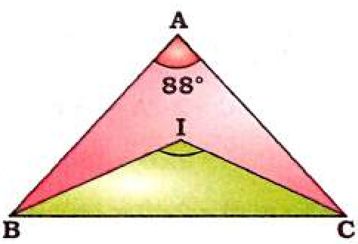
Ex. ΔABC में, ∠A = 88° है। यदि I त्रिभुज का अन्तःकेन्द्र है, तो ∠BIC का माप क्या होगा?

HINTS

$\angle BIC = 90^\circ + \frac{\angle A}{2}$

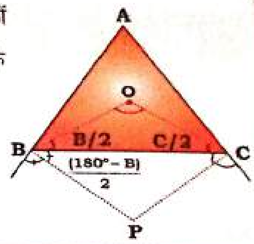
$= 90^\circ + \frac{88^\circ}{2}$

$= 90^\circ + 44^\circ = 134^\circ$



(iv) किसी त्रिभुज के दो कोणों के बाह्य समद्विभाजकों के बीच का कोण समकोण और तीसरे कोण के आधे के बीच के अंतर के बराबर होता है।

$\angle BPC = 90^\circ - \frac{\angle A}{2}$



यदि ΔABC में, ∠B और ∠C के आंतरिक समद्विभाजक O पर मिलते हैं और ∠B और ∠C के बाह्य समद्विभाजक P पर मिलते हैं, तो ∠BOC + ∠BPC = 180°

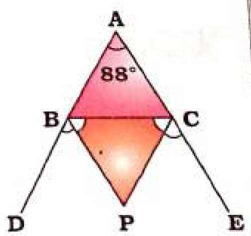
Ex. ΔABC, AB और AC की भुजाओं को क्रमशः बिंदु D और E तक बढ़ाया गया है। ∠CBD और ∠BCE के समद्विभाजक P पर मिलते हैं। यदि ∠A = 88° है, तो ∠P का माप क्या होगा?

HINTS

$\angle BPC = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$

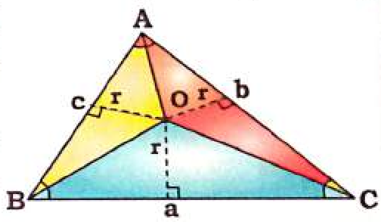
$= 90^\circ - \frac{1}{2} \times 88^\circ$

$= 46^\circ$

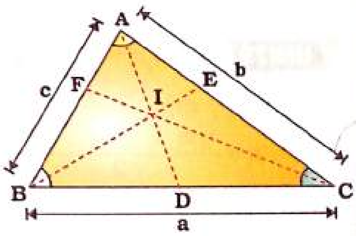


(v) अंतःकेन्द्र और दो शीर्षों द्वारा निर्मित त्रिभुज के क्षेत्रफल का अनुपात उनकी संगत भुजाओं के अनुपात में होता है।

क्षेत्रफल ΔBOC : क्षेत्रफल ΔAOC : क्षेत्रफल ΔAOB = a : b : c



(vi) अन्तःकेन्द्र प्रत्येक कोण के द्विभाजक को दो आसन्न भुजाओं की लम्बाई के योग और विपरीत भुजा के अनुपात में विभाजित करता है।



यहाँ, AD, BE और CF क्रमशः ∠A, ∠B और ∠C के कोण समद्विभाजक हैं।

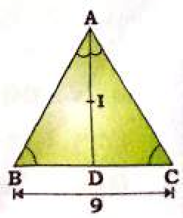
AI : ID = b + c : a   BI : IE = a + c : b

CI : IF = a + b : c

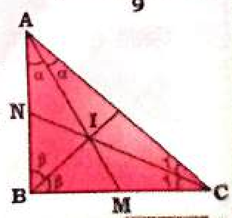
Ex. ΔABC का परिमाप 24 सेमी है और इसकी भुजा BC = 9 सेमी है। AD, ∠BAC का समद्विभाजक है, जबकि I अंतःकेंद्र है। AI : ID बराबर है:

HINTS

$\frac{AI}{ID} = \frac{AB + AC}{BC} = \frac{15}{9}$



(vii) ABC, B पर एक समकोण त्रिभुज है। यदि BN और BM दिए गए हैं और I त्रिभुज का अंतःकेंद्र है तो BI² = BN × BM है।



@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

अंतःत्रिज्या

किसी भी त्रिभुज की अंतःत्रिज्या	समकोण त्रिभुज की अंतःत्रिज्या	समबाहु त्रिभुज की अंतःत्रिज्या
$r = \frac{\Delta}{s} = \frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{अर्ध परिमाप}}$	$r = \frac{p+b-h}{2}$	$r = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{\text{भुजा}}{2\sqrt{3}}$

Ex. ΔABC में, परिमाप 24 सेमी और अंतःत्रिज्या 7 सेमी है। ΔABC का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

HINTS s = 24 सेमी, r = 7 सेमी

$r = \frac{\text{क्षेत्रफल } \Delta ABC}{\text{अर्ध परिमाप}} \Rightarrow 7 = \frac{\Delta ABC}{12}$

$\Rightarrow$ क्षेत्रफल ΔABC = 84 सेमी²

Ex. एक त्रिभुज की अन्तःत्रिज्या ज्ञात कीजिए जिसकी भुजाएँ 13 सेमी, 14 सेमी और 15 सेमी हैं।

HINTS $s = \frac{13+14+15}{2} = 21$

$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{21\times8\times7\times6}$

$= \sqrt{3\times7\times4\times2\times7\times2\times3}$

$= 3\times7\times2\times2 = 84$ सेमी²

अब, $r = \frac{\Delta}{s} = \frac{84}{21} = 4$ सेमी

भुजा = 13,14,15
क्षेत्रफल = 84
अंतःत्रिज्या = 4

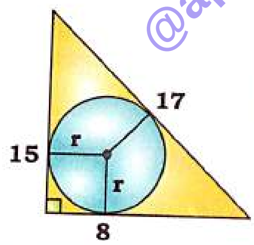
Ex. एक वृत्त एक समकोण त्रिभुज के अंतर्गत बना है। समकोण बनाने वाली दो भुजाओं की लंबाई 15 सेमी और 8 सेमी है। त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

HINTS 8, 15, 17 के त्रिक द्वारा

कर्ण = 17 सेमी

त्रिज्या = $\frac{\text{लम्ब + आधार − कर्ण}}{2}$

$= \frac{15+8-17}{2} = 3$ सेमी



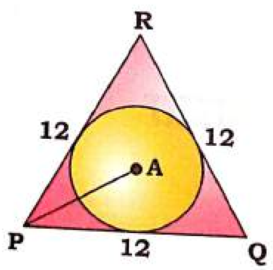
Ex. ΔPQR एक समबाहु त्रिभुज है और ΔPQR का अन्तःकेन्द्र विंदु A है। यदि त्रिभुज की भुजा 12 सेमी है, तो PA की लंबाई क्या है?

HINTS

त्रिज्या = $\frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{12\times\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\times\sqrt{3}}$

$= 2\sqrt{3}$ सेमी

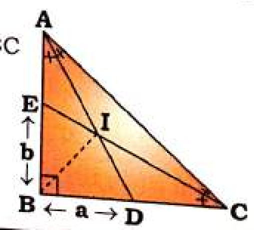
PA = $2\times r = 2\times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ सेमी



विशेष स्थितियां:

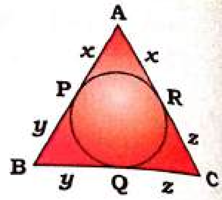
स्थिति-I: समकोण त्रिभुज ABC में, r = ΔABC की त्रिज्या

$r = \frac{BI}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{2}}$



स्थिति-II:

- अर्द्ध परिमाप(s) = $x + y + z$
- ΔABC का क्षेत्रफल = $\sqrt{(x+y+z)xyz}$
- अंतःत्रिज्या (r) = $\sqrt{\frac{xyz}{(x+y+z)}}$

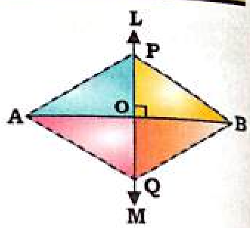


परिकेन्द्र

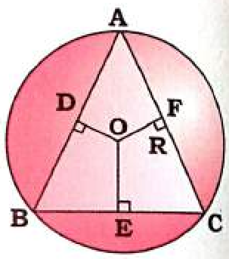
लंब समद्विभाजक: यदि कोई रेखा किसी रेखाखंड को लंबवत रूप से समद्विभाजित करती है, तो उस रेखा को लंब द्विभाजक कहा जाता है।

यदि रेखा LM ⊥ AB और AO = OB है, तो AP = PB और AQ = BQ

LM, AB का लंबवत् समद्विभाजक है



परिकेन्द्र: त्रिभुज की भुजाओं के लंबवत् समद्विभाजकों के प्रतिच्छेद बिन्दु को परिकेन्द्र कहते हैं।



OD ⊥ AB और AD = BD

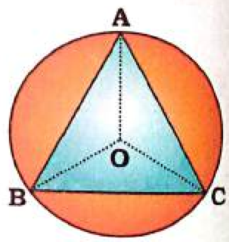
OE ⊥ BC और BE = EC

OF ⊥ AC और CF = FA

परिकेन्द्र के गुण

(i) त्रिभुज का परिकेंद्र त्रिभुज के तीनों शीर्षों से समान दूरी पर होता है तथा दूरी परित्रिज्या के बराबर होती है, अर्थात्

OA = OB = OC = R (परित्रिज्या)



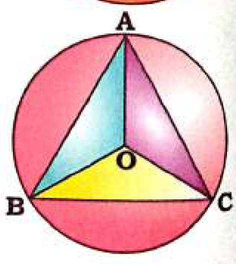
(ii) यदि O परिकेन्द्र हो, तो

- न्यूनकोण त्रिभुज ABC में,

  ∠BOC = 2∠A,

  ∠COA = 2∠B &

  ∠AOB = 2∠C

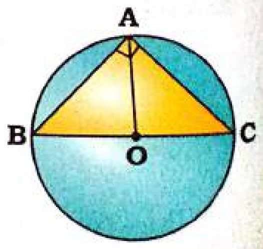


- समकोण त्रिभुज ABC में,

  ∠BOC = 2 ∠A = 180°,

  ∠COA = 2∠B = 180° − 2∠C,

  ∠AOB = 2∠C = 180° − 2∠B



@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

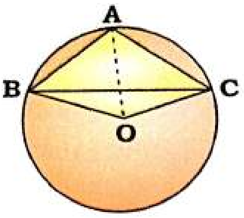
Join Telegram: @yct_publication

- अधिककोण त्रिभुज ABC में,

$\angle BOC = 2(180° - \angle A)$,

$\angle COA = 2\angle B$ &

$\angle BOA = 2\angle C$



Ex. ΔXYZ के परिकेंद्र L से, भुजा YZ पर लंब LM खींचा गया है। यदि $\angle YXZ = 60°$ है, तो $\angle YLM$ का माप है:

HINTS $\angle YXZ = 60°$

$LM \perp YZ$ (दिया हैं)

$\Rightarrow \angle YLZ = 2 \times \angle YXZ = 120°$

ΔYLM और ΔZLM में

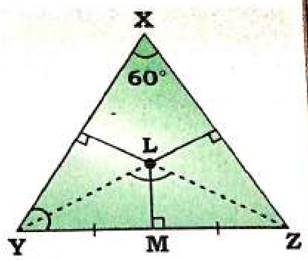
$YM = MZ$

$\angle YML = \angle LMZ = 90°$

$LY = LZ$ (परित्रिज्या)

$\Rightarrow \Delta YLM \cong \Delta ZLM$ (दायाँ पक्ष द्वारा)

$\therefore \angle YLM = \angle ZLM = \frac{120°}{2} = 60°$

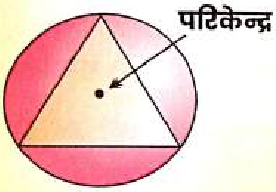


परिकेन्द्र की स्थिति

न्यून कोण त्रिभुज

एक न्यून कोण त्रिभुज में,

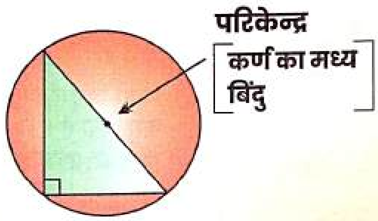
परिकेंद्र हमेशा त्रिभुज के अंदर होता है।



समकोण त्रिभुज

एक समकोण त्रिभुज में,

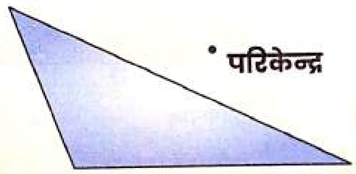
परिकेंद्र, कर्ण के मध्य-बिंदु पर होता है।



अधिक कोण त्रिभुज

एक अधिककोण त्रिभुज में,

परिकेंद्र हमेशा त्रिभुज के बाहर होता है और उस कोण के सामने होगा जो अधिककोण है।



परित्रिज्या

किसी भी त्रिभुज की परिवृत्त त्रिज्या	समकोण त्रिभुज की परित्रिज्या	समबाहु त्रिभुज की परित्रिज्या
$R = \frac{\text{तीनों भुजाओं के गुणनफल}}{4 \times \text{त्रिभुज का क्षेत्रफल}} = \frac{abc}{4\Delta}$	$R = \frac{\text{कर्ण}}{2} = \frac{h}{2}$	$R = \frac{\text{भुजा}}{\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$

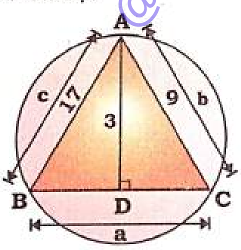
@apna_channels

Ex. एक ΔABC में, AB = 17 सेमी, AC = 9 सेमी, AD, BC पर लंब है और AD = 3 सेमी है। इस त्रिभुज की परित्रिज्या ज्ञात कीजिए।

HINTS

$R = \frac{abc}{4\Delta} = \frac{a \times 9 \times 17}{4 \times \frac{1}{2} \times a \times 3}$

= 25.5 सेमी



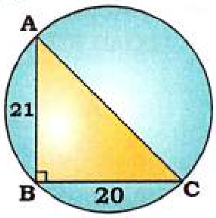
Ex. एक समकोण त्रिभुज के समकोण बनाने वाली दो भुजाओं की लंबाई 21 सेमी और 20 सेमी है। त्रिभुज के परिवृत्त की त्रिज्या क्या है?

HINTS

AC = 29, (20, 21, 29 के त्रिक द्वारा)

त्रिज्या $= \frac{\text{कर्ण}}{2} = \frac{29}{2}$

= 14.5 सेमी



Ex. ΔABC एक समबाहु त्रिभुज है। यदि त्रिभुज का क्षेत्रफल $36\sqrt{3}$ है, तो ΔABC के परिगत वृत्त की त्रिज्या क्या है?

HINTS

$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = 36\sqrt{3}$

$\Rightarrow a^2 = 144$

$\Rightarrow a = 12$

$\therefore$ त्रिज्या(R) $= \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{12 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}$

$= 4\sqrt{3}$ सेमी

समकोण त्रिभुज के अर्ध-परिमाप, अंतःत्रिज्या और परित्रिज्या के बीच संबंध

- Δ का क्षेत्रफल = r.s

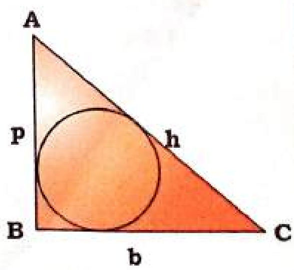
r = (s – 2R) रखने पर,

$\Delta = s(s - 2R)$

- Δ का क्षेत्रफल = r.s

s = (r + 2R) रखने पर,

$\Delta = r(r + 2R) = r^2 + 2Rr$

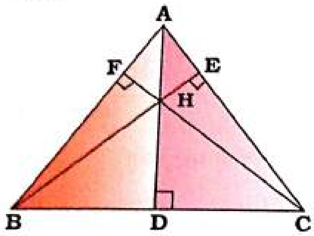


Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

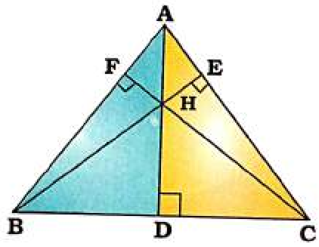
लम्बकेन्द्र

शीर्षलम्ब: यदि किसी त्रिभुज के शीर्ष से विपरीत भुजा पर लंब खींचा जाए तो उसे त्रिभुज की शीर्षलम्ब कहते हैं।

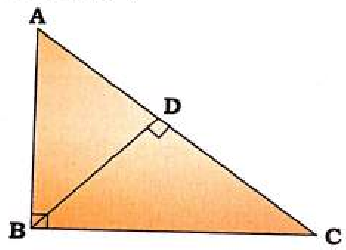


यदि AD ⊥ BC, तो AD शीर्षलम्ब है।

(i) न्यून कोण ΔABC में शीर्षलम्ब

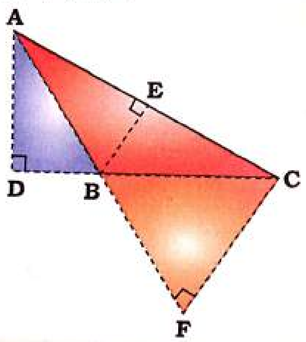


(ii) समकोण ΔABC में शीर्षलम्ब



समकोण त्रिभुज ABC की दो शीर्षलम्ब भुजाएँ AB और BC हैं तथा तीसरी शीर्षलम्ब BD है।

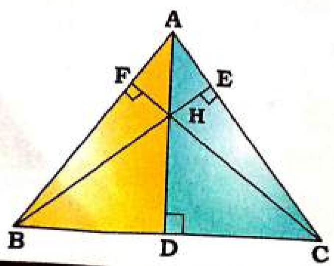
(iii) अधिककोण ΔABC में शीर्षलम्ब



ΔABC के तीन शीर्षलंब AD, BE और CF हैं।

लम्बकेन्द्र

किसी त्रिभुज के शीर्षलंबों के प्रतिच्छेद बिंदु को त्रिभुज का लंबकेंद्र कहते हैं। इसे सामान्यतः H से दर्शाया जाता है।



लम्बकेन्द्र के गुण

(i) त्रिभुज की तीनों ऊँचाइयाँ एक बिंदु (लंबकेंद्र) से होकर गुजरती हैं

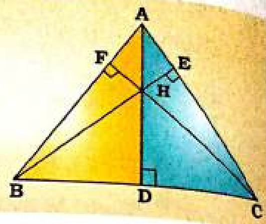
(ii)

$\angle BHC = 180° - \angle A$

$\angle CHA = 180° - \angle B$

$\angle AHB = 180° - \angle C$

यह सभी प्रकार के त्रिभुजों के लिए सत्य है।



Ex. एक अधिककोण त्रिभुज ABC में, ∠A अधिककोण है और O लंबकेन्द्र है। यदि ∠BOC = 54° है, तो ∠BAC का मान क्या है?

HINTS

$\angle BAC = 180° - 54° = 126°$

(iii) ΔBFH ~ ΔCEH

BH × HE = CH × HF

साथ ही, BH × HE = CH × HF = AH × HD

(iv) किसी त्रिभुज के तीन शीर्षलंबों का योग, त्रिभुज की तीन भुजाओं के योग से कम होता है।

(AB + BC + CA) > (AD + CF + BE)

∑ तीनों भुजाओं > ∑ शीर्षलम्ब

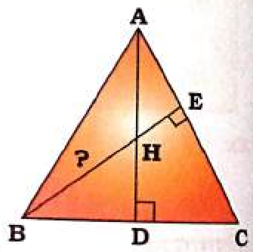
Ex. ΔABC में, AD और BE त्रिभुज की ऊँचाई हैं जो H पर इस प्रकार मिलती हैं कि AH = 12 सेमी, HD = 9 सेमी, और HE = 4 सेमी है। BH ज्ञात कीजिए।

HINTS

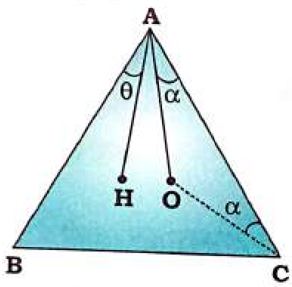
AH × HD = BH × HE

⇒ 12 × 9 = BH × 4

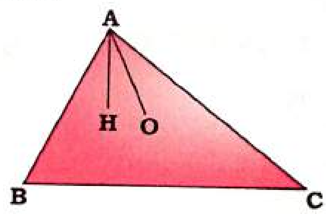
⇒ BH = 27 सेमी



(v) यदि H और O लंबकेंद्र और परिकेन्द्र हैं (जैसा कि चित्र में दिखाया गया है) तो, θ = α



Ex. ΔABC में, H लंब केंद्र है, O परिकेन्द्र है। यदि ∠BAH = 30° है, तो ∠OAC ज्ञात कीजिए।



HINTS दिया गया, ∠BAH = 30°

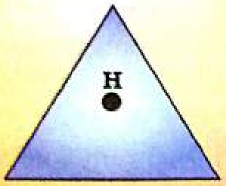
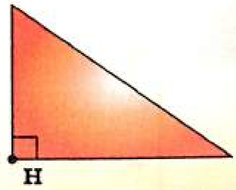
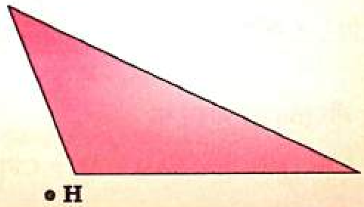
∠OAC = ∠BAH = 30°

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

लंबकेंद्र की स्थिति

न्यून कोण त्रिभुज	समकोण त्रिभुज	अधिक कोण त्रिभुज
एक न्यूनकोण त्रिभुज में लंबकेन्द्र हमेशा त्रिभुज के अंदर होता है।	समकोण त्रिभुज में लंबकेन्द्र त्रिभुज के उस शीर्ष पर होता है जिस पर त्रिभुज समकोण होता है।	एक अधिककोण त्रिभुज में लंबकेन्द्र हमेशा त्रिभुज के बाहर होता है और वह कोण के पीछे होगा जो अधिककोण है।
		

समकोण त्रिभुज के लंबकेंद्र और परिकेन्द्र के बीच

अंतर $= \frac{\text{कर्ण}}{2} = \frac{h}{2}$

- किसी भी त्रिभुज में परिकेन्द्र और अन्तःकेन्द्र के बीच की दूरी $= \sqrt{R^2 - 2Rr}$

जहाँ, R = परित्रिज्या और r = अंतःत्रिज्या

Ex. यदि किसी त्रिभुज की परित्रिज्या 6 सेमी और अन्तःत्रिज्या 2 सेमी है, तो परिकेंद्र और अन्तःकेंद्र के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

HINTS R = 6, r = 2

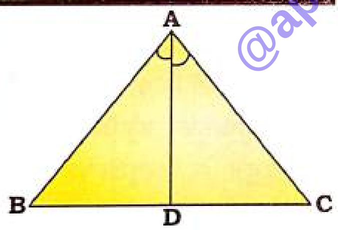
$\therefore d = \sqrt{R^2 - 2Rr}$

$= \sqrt{36 - 2 \times 6 \times 2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

केन्द्रक

माध्यिका: यदि किसी त्रिभुज के शीर्ष से एक रेखाखंड विपरीत भुजा को समद्विभाजित करता है, तो रेखाखंड को त्रिभुज की माध्यिका कहा जाता है।

यदि रेखाखंड AD, BC को समद्विभाजित करता है, तो AD माध्यिका है।



केन्द्रक: त्रिभुज की माध्यिकाओं के प्रतिच्छेद बिंदु को केन्द्रक कहते हैं। इसे G से दर्शाते हैं।

केन्द्रक के गुण

(i) त्रिभुज की तीनों माध्यिकाएँ एक बिंदु (केन्द्रक) से होकर गुजरती हैं।

(ii) सभी प्रकार के त्रिभुजों का केन्द्रक सदैव त्रिभुज के अन्दर होता है।

(iii) अपोलोनियस प्रमेय

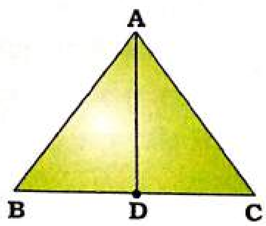
यदि AD, ΔABC की माध्यिका है, तो

$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + CD^2)$

या

माध्यिका की लंबाई (AD)

$= \frac{1}{2}\sqrt{2AC^2 + 2AB^2 - BC^2}$



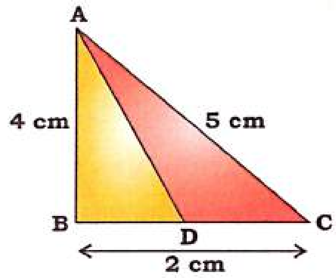
Ex. यदि ΔABC की भुजाएँ 5 सेमी, 4 सेमी और 2 सेमी हैं, तो इसके सबसे छोटे कोण वाले शीर्ष से डाली गई माध्यिका की लंबाई ज्ञात कीजिए?

HINTS हम जानते हैं कि सबसे छोटा कोण सबसे छोटी भुजा का विपरीत कोण होता है।

$AD = \frac{\sqrt{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}}{2}$

$= \frac{\sqrt{32 + 50 - 4}}{2}$

$= \frac{\sqrt{78}}{2} = \sqrt{\frac{39}{2}}$ सेमी

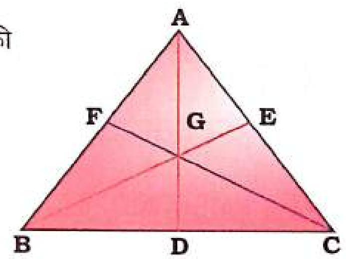


@apna_channels

(iv) यदि AD, BE और CF ΔABC की माध्यिकाएँ हैं और G केन्द्रक है, तो

$\frac{AG}{GD} = \frac{BG}{GE} = \frac{CG}{GF} = \frac{2}{1}$

(v) $\frac{AG^2 + BG^2 + CG^2}{AB^2 + BC^2 + CA^2} = \frac{1}{3}$



Ex. G, ΔABC का केन्द्रक है। यदि ΔABC की भुजाओं की लंबाई 8 सेमी, 10 सेमी और 12 सेमी है, तो $AG^2 + BG^2 + CG^2$ ज्ञात कीजिए।

HINTS

$AG^2 + BG^2 + CG^2 = \frac{1}{3}[64 + 100 + 144] = \frac{308}{3}$

(vi) $3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)$

Ex. ΔABC में, सभी भुजाओं के वर्गों का योग 64 सेमी है। तीनों माध्यिकाओं के वर्गों का योग ज्ञात कीजिए।

HINTS

$3(a^2 + b^2 + c^2) = 4(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)$

$\Rightarrow 3 \times 64 = 4 \times R$

$\Rightarrow R = 48$

Join Telegram: @apna_rwa

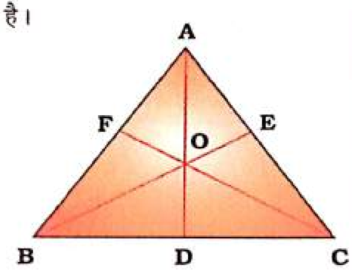
Join Telegram: @yct_publication

(vii) किसी त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा पर खींची गई माध्यिका के दोगुने से अधिक होता है।

AB + AC > 2AD ....(i)

AB + BC > 2BE ....(ii)

AC + BC > 2CF ......(iii)



(i), (ii) और (iii) को जोड़ने पर

2 (AB + AC + BC) > 2(AD + AE + CF)

(AB + AC + BC) > (AD + BE + CF)

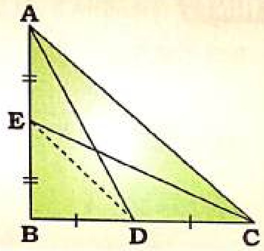
अतः हम कह सकते हैं कि भुजाओं का योग (परिमाप) सदैव सभी माध्यिकाओं के योग से अधिक होता है।

(viii) यदि ΔABC समकोण त्रिभुज है और AD और CE माध्यिकाएँ हैं, तो

- $AC^2 = 4ED^2$
- $4(AD^2 + CE^2) = 5AC^2$

$\because AD^2 + CE^2 = AC^2 + ED^2$

$\therefore AD^2 + CE^2 = 5ED^2$

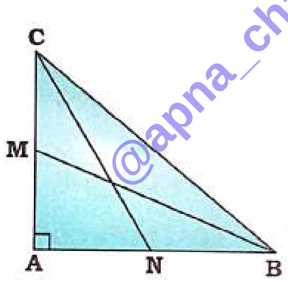


Ex. ΔABC में, ∠A = 90°, यदि BM और CN दो माध्यिकाएँ हैं, तो $\frac{BM^2 + CN^2}{BC^2}$ बराबर है:

HINTS

$4(CN^2 + BM^2) = 5BC^2$

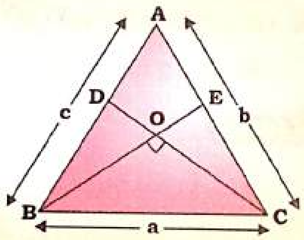
$\Rightarrow \frac{BM^2 + CN^2}{BC^2} = \frac{5}{4}$



(ix) यदि BE और CD माध्यिकाएँ हैं और BE ⊥ CD है, तो

$AB^2 + AC^2 = 5BC^2$

$\Rightarrow c^2 + b^2 = 5a^2$



Ex. यदि ΔABC में, BE और CF एक दूसरे के लंबवत दो माध्यिकाएँ हैं और यदि AB = 19 सेमी और AC = 22 सेमी है तो BC की लंबाई है:

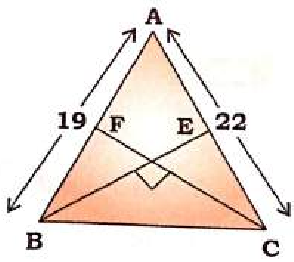
HINTS $AB^2 + AC^2 = 5BC^2$

$\Rightarrow 19^2 + 22^2 = 5BC^2$

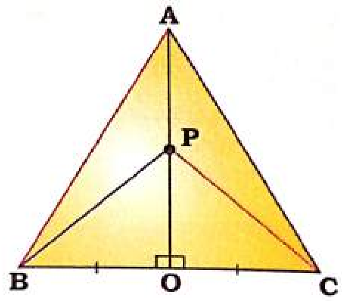
$\Rightarrow 361 + 484 = 5BC^2$

$\Rightarrow 845 = 5BC^2 \Rightarrow BC^2 = 169$

$\Rightarrow BC = 13$

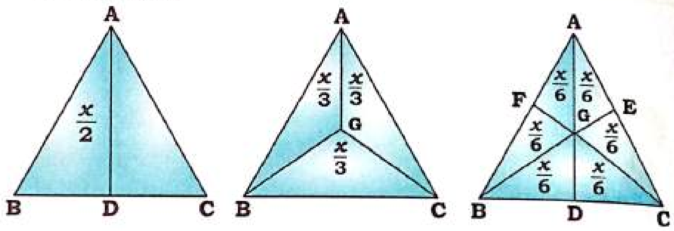


(x)



$AB^2 + PC^2 = AC^2 + BP^2$

(xi) यदि ΔABC का क्षेत्रफल = x, AD, BE और CF तीन माध्यिकाएँ हैं और G केन्द्रक है, तो

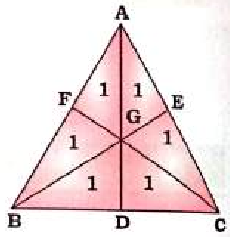


Ex. एक ΔABC में, AD, BE और CF माध्यिकाएँ हैं जो G पर प्रतिच्छेद करती हैं। यदि ΔABC का क्षेत्रफल 204 वर्ग सेमी है, तो चतुर्भुज GDCE का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

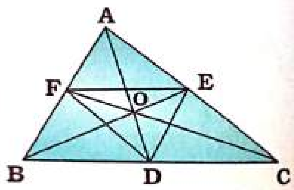
HINTS

यहाँ, 6 इकाई = 204 सेमी²

∴ 2 इकाई = 68 सेमी²



(xii) दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं और केन्द्रक को मिलाकर बने त्रिभुज का क्षेत्रफल त्रिभुज के क्षेत्रफल का $\frac{1}{12}$th भाग होता है।



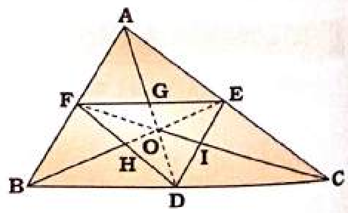
क्षेत्रफल ΔOFE = क्षेत्रफल ΔOFD = क्षेत्रफल ΔOED = $\frac{1}{12}$ क्षेत्रफल ΔABC

ΔOFE ~ ΔOCB

(मध्य-बिंदु प्रमेय FE || BC के अनुसार, ताकि

∠EFO = ∠OCB, ∠OEF = ∠OBC)

(xiii) दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखाखंड, उनके बीच के शीर्ष को मिलाने वाली रेखा को केन्द्रक से 3 : 1 के अनुपात में विभाजित करता है।



AG : GO = BH : HO = CI : IO = 3 : 1

G, AD और FE का मध्य बिंदु है।

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

(xiv) यदि किसी त्रिभुज की तीन माध्यिकाएँ दी गई हैं तो

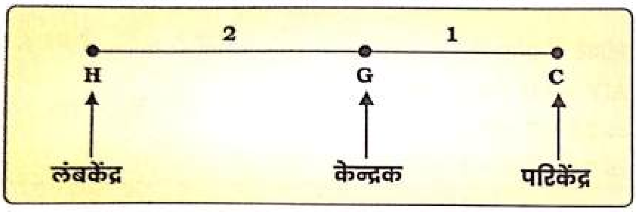
Δ का क्षेत्रफल = $\frac{4}{3}$ (माध्यिका को भुजा मानकर त्रिभुज का क्षेत्रफल)

$= \frac{4}{3}\sqrt{S_m(S_m - m_1)(S_m - m_2)(S_m - m_3)}$

जहाँ, $S_m = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{2}$

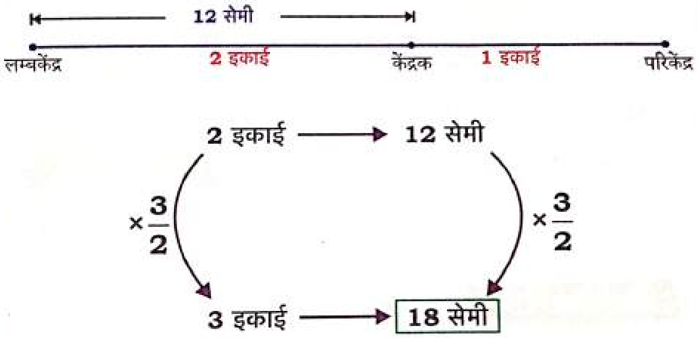
लंबकेंद्र, केन्द्रक और परिकेन्द्र के बीच संबंध

किसी भी त्रिभुज में, लंबकेंद्र, केन्द्रक और परिकेंद्र संरेखीय होते हैं और केन्द्रक रेखा को 2:1 में विभाजित करता है जैसा कि चित्र में दिखाया गया है



Ex. एक त्रिभुज में केन्द्रक और लंबकेंद्र के बीच की दूरी 12 सेमी है। लंबकेंद्र और परिकेन्द्र के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

HINTS



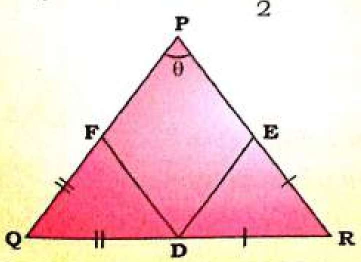
सारांश

विशेषताएँ	अंतःकेंद्र	परिकेंद्र	लंबकेंद्र	केन्द्रक
प्रतीक	I	O	H	G
परिभाषा	आंतरिक कोणों के समद्विभाजकों का प्रतिच्छेदन बिंदु।	भुजाओं के लंब समद्विभाजकों का प्रतिच्छेदन बिंदु।	शीर्षलंबों का प्रतिच्छेदन।	माध्यिकाओं का प्रतिच्छेदन(शीर्ष से सम्मुख भुजा के मध्यबिंदु तक का रेखाखंड)
संबंधित वृत्त	अंतर्वृत्त का केंद्र।	परिवृत्त का केंद्र।	केंद्र के रूप में कोई सीधा संबंधित वृत्त नहीं।	केंद्र के रूप में कोई सीधा संबंधित वृत्त नहीं।
समदूरस्थ	त्रिभुज की भुजाएँ।	त्रिभुज के शीर्ष।	भुजाओं या शीर्षों से समदूरस्थ नहीं।	भुजाओं या शीर्षों से समदूरस्थ नहीं।
स्थिति	हमेशा त्रिभुज के अंदर।	• न्यूनकोण: अंदर • समकोण: कर्ण का मध्यबिंदु • अधिककोण: अधिककोण के सामने बाहर	• न्यूनकोण: अंदर • समकोण: समकोण वाले शीर्ष पर • अधिककोण: अधिककोण के पीछे बाहर	हमेशा त्रिभुज के अंदर।
महत्व	सबसे बड़े वृत्त का केंद्र जो अंदर फिट हो सकता है।	सभी शीर्षों से गुजरने वाले वृत्त का केंद्र।	त्रिभुज की ऊँचाइयों से संबंधित।	केंद्र का द्रव्यमान/त्रिभुज का गुरुत्वाकर्षण

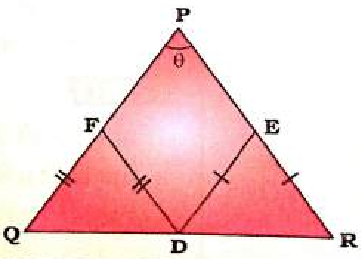
@apna_channels

कुछ महत्वपूर्ण परिणाम

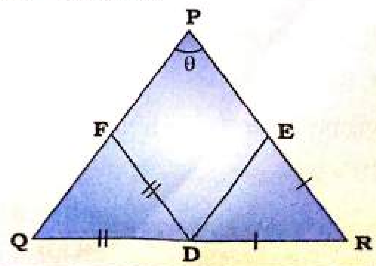
ΔPQR, में, D, E, F क्रमशः भुजाओं QR, PR और PQ पर स्थित बिंदु हैं। यदि QF = QD,, RE = DR और $\angle RPQ = \theta$ है, तो $\angle EDF = 90° - \frac{\theta}{2}$



ΔPQR, में, D, E, F क्रमशः भुजाओं QR, PR और PQ पर स्थित बिंदु हैं। यदि QF = FD, DE = ER और $\angle RPQ = \theta$ है, तो $\angle EDF = \theta$ है।



ΔPQR, में, D, E, F क्रमशः भुजाओं QR, PR और PQ पर स्थित बिंदु हैं। यदि QD = DF, DR = RE और $\Delta RPQ = \theta$ है, तो $\angle EDF = 180° - 2\theta$ होगा।



Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. एक ΔABC में, AB, BC और CA पर क्रमशः बिंदु P, Q और R इस प्रकार लिए गए हैं कि BQ = PQ और QC = QR है। यदि $\angle BAC = 75°$ है, तो $\angle PQR$ का माप (डिग्री में) क्या है?

HINTS

ΔABC में, $\alpha + \theta + 75° = 180°$

$\Rightarrow \alpha + \theta = 105°$

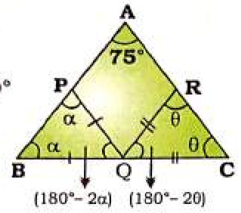
$\because$ BQC एक सीधी रेखा है.

$180° - 2\alpha + \angle PQR + 180° - 2\theta = 180°$

$\Rightarrow \angle PQR = 180° - 360 + 2(\alpha + \theta)$

$= -180° + 2 \times 105°$

$= -180° + 210° = 30°$



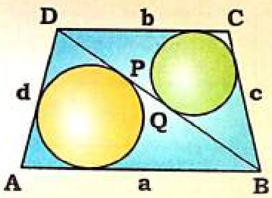
वैकल्पिक विधि

$\angle PQR = 180° - 2 \times \angle BAC$

$= 180° - 2 \times 75° = 180° - 150° = 30°$

☞ समलंब चतुर्भुज ABCD में, दो असमान वृत्त इस प्रकार अंकित हैं कि प्रत्येक वृत्त गैर-समानांतर भुजाओं के एक जोड़े को छूता है। विकर्ण DB वृत्तों को बिंदु P और Q पर काटता है।

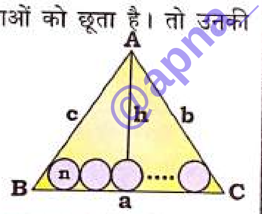
$PQ = \frac{(a+b)-(c+d)}{2}$



☞ यदि n समान वृत्त ΔABC के आधार BC के साथ पूरी तरह से फिट होते हैं, प्रत्येक आसन्न वृत्त और त्रिभुज की भुजाओं को छूता है। तो उनकी त्रिज्या है।

$r = \frac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{s+(n-1)h}$

जहाँ, s = अर्ध-परिमाप



कुछ महत्वपूर्ण प्रमेय

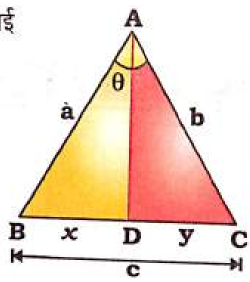
(A) स्टुअर्ट प्रमेय (Stewart Theoream)

इसका उपयोग किसी भी सीवियन की लंबाई ज्ञात करने के लिए किया जाता है।

जहाँ $c = x + y$

$a^2x + b^2y = AD^2c + xyc$

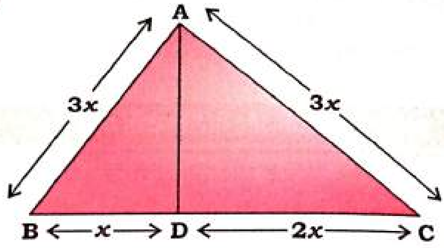
$\Rightarrow a^2x + b^2y = c(AD^2 + xy)$



- यदि AD, $\angle A$ का कोण समद्विभाजक है तब, $AD^2 = ab - xy$
- समद्विबाहु त्रिभुज में, a = b
  $AD^2 = a^2 - xy$
- यदि θ दिया गया है तो $AD = \frac{2ab\cos\theta}{a+b}$

Ex. ΔABC एक समबाहु त्रिभुज है। D, भुजा BC पर स्थित एक बिंदु इस प्रकार है कि BD : BC = 1 : 3 है। यदि $AD = 5\sqrt{7}$ सेमी है, तो त्रिभुज की भुजा क्या है?

HINTS



स्टीवर्ट के प्रमेय से,

$AD^2 = AB \times AC - BD \times DC$

$\Rightarrow 25 \times 7 = 9x^2 - 2x^2$

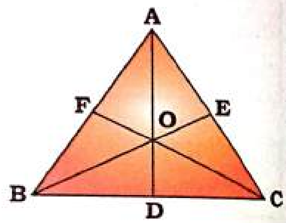
$\Rightarrow 7x^2 = 25 \times 7 \Rightarrow x = 5$

$\therefore$ भुजा $= 3x = 3 \times 5 = 15$ सेमी

(B) सेवा प्रमेय (Ceva Theorem)

ΔABC में, AD, BE और CF वे सीवियन हैं जो एक उभयनिष्ठ बिंदु O से होकर गुजरते हैं।

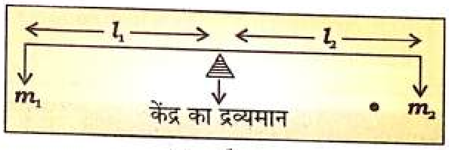
- $\frac{AF}{FB} \times \frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} = 1$
- $\frac{OD}{AD} + \frac{OE}{BE} + \frac{OF}{CF} = 1$
- $\frac{AO}{AD} + \frac{BO}{BE} + \frac{CO}{CF} = 2$



@apna_channels

(C) मास बिंदु प्रमेय (Mass point Theorem)

- इसका उपयोग त्रिभुजों और प्रतिच्छेदी सीवियनों (cevians) से जुड़ी समस्याओं को हल करने के लिए किया जाता है, जिसमें द्रव्यमान केंद्र के सिद्धांतों का प्रयोग होता है।
- मूल विचार एक झूले का है जिसके दोनों सिरों पर भार लगे हैं। झूला तभी संतुलित होगा जब प्रत्येक द्रव्यमान के लिए द्रव्यमान और आधार से उसकी दूरी का गुणनफल समान हो।

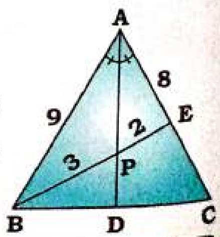


$m_1 l_1 = m_2 l_2 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{l_2}{l_1}$

Ex. ΔABC में, AD, $\angle A$ का कोण समद्विभाजक है। AD और BE क्रमशः BC और AC पर इस प्रकार स्थित हैं कि AB = 9 सेमी और AC = 8 सेमी है। AD और BE बिंदु P पर प्रतिच्छेद करते हैं और BP : PE = 3 : 2 है, तो AE का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS

चरण 1: हमने BC को D पर संतुलित करने के लिए B पर 8 किग्रा और C पर 9 किग्रा का भार रखा, जो 17 किग्रा के बराबर है।



Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

चरण 2: AC को संतुलित करने के लिए, हम A पर 3 किग्रा रखते हैं और E पर परिणामी भार 12 किग्रा के बराबर प्राप्त करते हैं।

द्रव्यमान केन्द्र से दूरियों का अनुपात अंतिम बिन्दुओं पर भार के व्युत्क्रमानुपाती होगा।

इसलिए,

AE : EC = 9 : 3 = 3 : 1

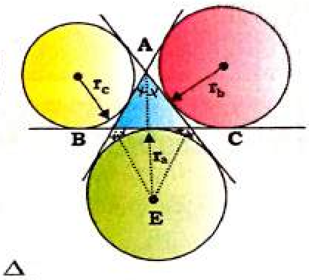
$\therefore$ (3 + 1) = 4 इकाई $\xrightarrow{\times 2}$ 8 सेमी

1 इकाई $\xrightarrow{\times 2}$ 2 सेमी

$\therefore$ AE = 3 इकाई $\xrightarrow{\times 2}$ 6 सेमी

बहि:केंद्र

एक कोण के आंतरिक कोण द्विभाजक और अन्य दो विपरीत बाह्य कोणों के द्विभाजक का प्रतिच्छेद बिंदु।



(a) $\angle BEC = 90° - \frac{\angle A}{2}$

(b) बहि:त्रिज्या:

$r_a = \frac{\Delta}{s-a}; r_b = \frac{\Delta}{s-b}; r_c = \frac{\Delta}{s-c}$

(c) $r_a = \frac{rs}{s-a} = \sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}$ जहाँ $s = \frac{a+b+c}{2}$

(d) Δ(क्षेत्रफल) $= \sqrt{r\, r_a\, r_b\, r_c}$

(e) $r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 = (4R + r)^2 - 2s^2$

@apna_channels

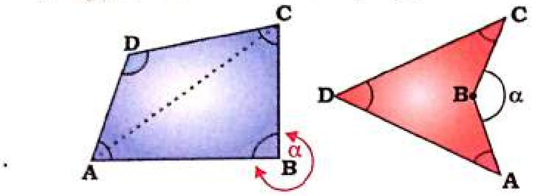
Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

चतुर्भुज

चतुर्भुज

यह एक समतल आकृति है जो चार सीधी रेखाओं से घिरी है। वह रेखाखंड जो एक चतुर्भुज के विपरीत शीर्षों को जोड़ता है, चतुर्भुज का विकर्ण कहलाता है।



AC, BD = विकर्ण

यहाँ, उपरोक्त दोनों आकृतियाँ चतुर्भुज ABCD को दर्शाती हैं।

चतुर्भुज के गुण

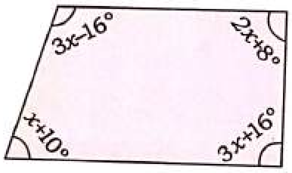
- एक चतुर्भुज के आंतरिक कोणों का योग = 360°

अर्थात्, ∠A + ∠B + ∠C + ∠D = 360°

$\angle B_{\text{आंतरिक}} = 360° - (\angle A + \angle C + \angle D)$

$\angle B_{\text{बाह्य}} = \alpha = \angle A + \angle C + \angle D$

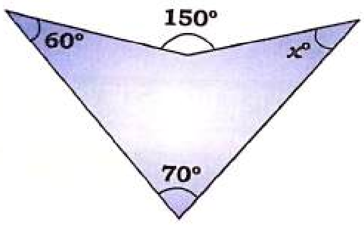
Ex. दी गई आकृति में 'x' का मान ज्ञात कीजिए।



HINTS $3x - 16° + 2x + 8° + x + 10° + 3x + 16° = 360°$

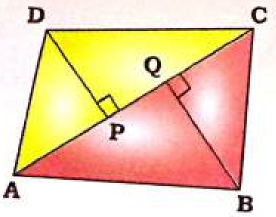
$\Rightarrow x = 38°$

Ex. दी गई आकृति में 'x' का मान ज्ञात कीजिए।



HINTS $60° + 70° + x = 150° \Rightarrow x = 20°$

- **चतुर्भुज का क्षेत्रफल**



$\text{Area} = \frac{1}{2} \times AC \times DP + \frac{1}{2} \times AC \times BQ$

$= \frac{1}{2} \times AC \times (DP + BQ)$

$= \frac{1}{2} \times$ विकर्ण $\times$ (विकर्ण पर डाले गए लंबों का योग)

Ex. ABCD एक चतुर्भुज है। विकर्ण AC की लंबाई 24 सेमी है। शीर्ष B और D से विकर्ण AC पर खींचे गए लंबों का योग 10 सेमी है। चतुर्भुज का क्षेत्रफल क्या है?

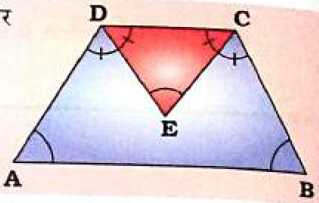
HINTS AC = 24 सेमी, DP + BQ = 10 सेमी

चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times AC \times (DP + BQ)$

$= \frac{1}{2} \times 24 \times 10 = 120$ सेमी²

- यदि DE और CE क्रमशः ∠D और ∠C के कोण समद्विभाजक हैं, तो:

$\angle CED = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$



Ex. एक चतुर्भुज ABCD में, ∠C और ∠D के समद्विभाजक बिंदु E पर मिलते हैं। यदि ∠CED = 57° और ∠A = 47° है, तो ∠B का माप है:

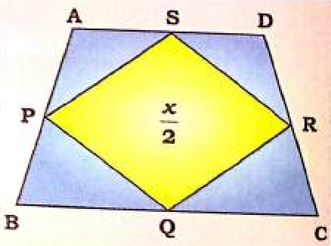
HINTS माना, ∠B = θ

$\because \angle CED = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) \Rightarrow 57° = \frac{47° + \theta}{2}$

$\Rightarrow 114° - 47° = \theta \Rightarrow \theta = 67°$

- यदि ABCD किसी भी प्रकार का चतुर्भुज है और P, Q, R और S क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD और AD के मध्य-बिंदु हैं, तो: यदि चतुर्भुज का क्षेत्रफल x है तो चतुर्भुज PQRS का क्षेत्रफल

$PQRS = \frac{\square ABCD \text{ का क्षेत्रफल}}{2}$



Ex. चतुर्भुज PQRS का क्षेत्रफल क्या है, जो एक चतुर्भुज ABCD की आसन्न भुजाओं के मध्य-बिंदुओं को जोड़कर बनाया गया है जैसा कि आकृति में दिखाया गया है, यदि यह दिया गया है कि ΔAPS = 8 सेमी², ΔBPQ = 12 सेमी², ΔQCR = 9 सेमी² और ΔRDS = 15 सेमी²।

HINTS क्षेत्रफल(□PQRS) = 12 + 8 + 15 + 9 = 44 सेमी²

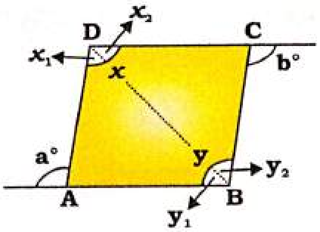
मूल आकृति	भुजाओं के मध्य-बिंदुओं को जोड़कर बनी आकृति
वर्ग	वर्ग
आयत	समचतुर्भुज
समचतुर्भुज	आयत
समांतर चतुर्भुज	समांतर चतुर्भुज
चतुर्भुज	समांतर चतुर्भुज
समलंब चतुर्भुज	समांतर चतुर्भुज
पतंग	आयत

@apna_channels

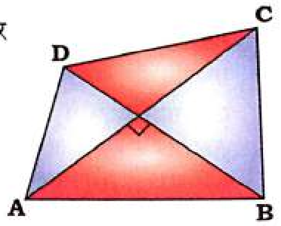
Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

- यदि ABCD एक चतुर्भुज है
  तो, $x + y = a + b$



- यदि चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को 90° पर प्रतिच्छेद करते हैं, तो:
  $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$



चतुर्भुज के प्रकार

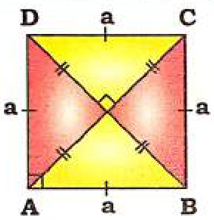
- वर्ग
- आयत
- समांतर चतुर्भुज
- समचतुर्भुज
- समलंब
- पतंग

वर्ग

एक चतुर्भुज जिसमें सभी भुजाएँ और सभी कोण बराबर होते हैं, वर्ग कहलाता है।

जहाँ, a = वर्ग की भुजा

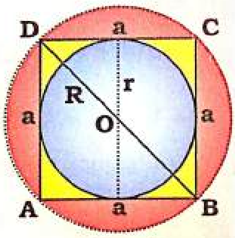
AC = BD = d = विकर्ण की लंबाई



वर्ग के गुण

- सभी भुजाएँ बराबर और समानांतर होती हैं।
- सभी कोण समकोण होते हैं।
- विकर्ण बराबर होते हैं और एक दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।
- विकर्ण 'BD' = भुजा $\sqrt{2} = a\sqrt{2}$
- परिधि = 4 × भुजा = 4a
- क्षेत्रफल = $(\text{भुजा})^2 = (a)^2 = \frac{(\text{विकर्ण})^2}{2} = \frac{d^2}{2}$
- अंत:वृत्त की त्रिज्या 'r' = $\frac{a}{2}$
- परिवृत्त की त्रिज्या 'R' = $\frac{d}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$
- $\frac{R}{r} = \frac{\sqrt{2}}{1}$
- $\frac{\text{परिवृत्त का क्षेत्रफल}}{\text{अंत:वृत्त का क्षेत्रफल}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{1}\right)^2 = \frac{2}{1}$

$\frac{\text{परिवृत्त का क्षेत्रफल}}{\text{वर्ग का क्षेत्रफल}} = \frac{11}{7}$

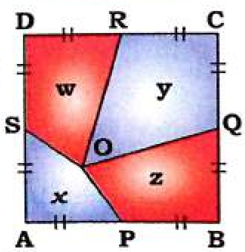


BD = d

☞ एक वर्ग ABCD में, O वर्ग के अंदर का कोई भी बिंदु है। P, Q, R, S क्रमश: AB, BC, CD और DA के मध्यबिंदु हैं।

क्षेत्रफल $(x + y)$ = क्षेत्रफल $(w + z)$

$= \frac{1}{2} \times$ वर्ग ABCD का क्षेत्रफल

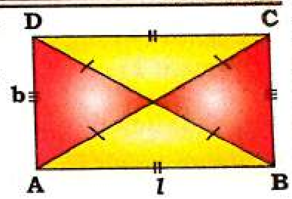


उपरोक्त परिणाम आयत के लिए भी सत्य है।

आयत

एक चतुर्भुज जिसके चारों कोण समकोण (90°) हों तथा उसकी सम्मुख भुजाएँ बराबर लंबाई की हों।

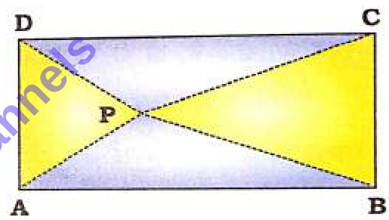
जहाँ, l = लंबाई, b = चौड़ाई

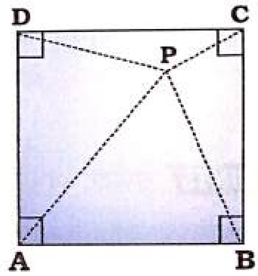


आयत के गुण

- विपरीत भुजाएँ समान्तर एवं बराबर होती हैं।
- विकर्ण बराबर होते हैं और एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं लेकिन समकोण पर नहीं।
- परिमाप = $2(l + b)$
- क्षेत्रफल = $l \times b$
- विकर्ण = $\sqrt{l^2 + b^2}$
- किसी भी दिए गए परिमाप के सभी आयतों में से वर्ग का क्षेत्रफल अधिकतम होगा।
- चारों कोणों के द्विभाजक एक वर्ग बनाते हैं।
- जब आयत को वृत्त के अन्दर अंकित किया जाता है, तो वर्ग होने पर इसका क्षेत्रफल अधिकतम होगा।

☞ यदि P आयत ABCD या वर्ग ABCD के अंदर कोई बिंदु है, तो:





$PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$

Ex. एक आयत ABCD में एक बिंदु P इस प्रकार है कि PA = 4 सेमी, PD = 5 सेमी, PB = 8 सेमी है। PC ज्ञात कीजिए।

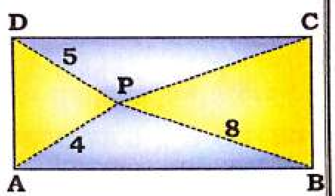
HINTS $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$

$\Rightarrow 16 + PC^2 = 64 + 25$

$\Rightarrow PC^2 = 89 - 16$

$\Rightarrow PC^2 = 73$

$\Rightarrow PC = \sqrt{73}$



Ex. यदि P एक वर्ग ABCD के अंदर एक बिंदु है जिससे PA = 15 सेमी, PB = 7 सेमी और PC = 20 सेमी है, तो PD का मान है:

HINTS $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$

$\Rightarrow 225 + 400 = 49 + PD^2$

$\Rightarrow 625 - 49 = PD^2 \Rightarrow PD^2 = 576$

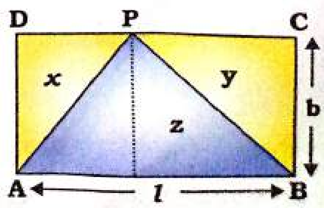
$\Rightarrow PD = 24$ सेमी

☞ ABCD एक आयत है और P भुजा CD पर स्थित कोई बिंदु है, तो:

ΔAPB का क्षेत्रफल

$= \frac{\square ABCD \text{ का क्षेत्रफल}}{2}$

∴ क्षेत्रफल 'z' = क्षेत्रफल '$x + y$'



उपरोक्त परिणाम वर्ग, समचतुर्भुज और समांतर चतुर्भुज के लिए भी सत्य है।

@apna_channels
Join Telegram: @apna_rwa

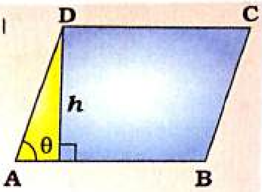
Join Telegram: @yct_publication

समांतर चतुर्भुज

वह चतुर्भुज जिसकी सम्मुख भुजाएँ समान्तर एवं बराबर हों, समांतर चतुर्भुज कहलाता है।

AB || CD और AD || BC

समांतर चतुर्भुज के गुण



- विपरीत भुजाएँ समान्तर एवं बराबर होती हैं।
- विकर्ण बराबर हो भी सकते हैं और नहीं भी।
- विकर्ण एक दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित कर सकते हैं या नहीं भी कर सकते हैं।
- किन्हीं दो आसन्न कोणों का योग = 180°
- समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई

क्षेत्रफल = AB × h

$\because$ h = AD sinθ

$\therefore$ क्षेत्रफल = AB × h = AB × AD sinθ

Ex. एक समांतर चतुर्भुज का आधार उसकी संगत ऊँचाई का दोगुना है। यदि समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल 144 वर्ग सेमी है, तो दी गई ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

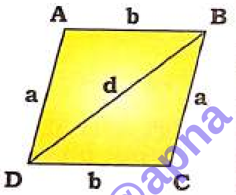
HINTS समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई

$\Rightarrow 144 = 2x \times x$

$\Rightarrow 2x^2 = 144$

$\Rightarrow x^2 = 72$

$\Rightarrow x = 6\sqrt{2}$ सेमी

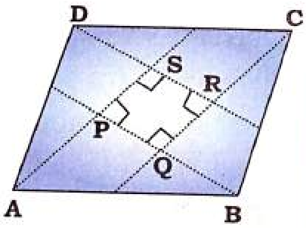


क्षेत्रफल = $2\times\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-d)}$

जहाँ, $s = \dfrac{a+b+d}{2}$

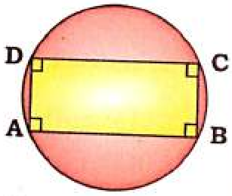
☞ चारों कोणों के समद्विभाजक एक आयत बनाते हैं।

यदि AS, BP, CQ और DR क्रमशः ∠A, ∠B, ∠C और ∠D के कोण समद्विभाजक हैं, तो PQRS एक आयत है।



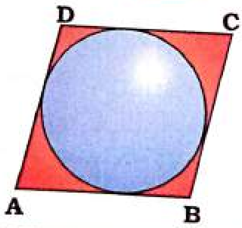
☞ वृत्त के अन्दर अंकित समांतर चतुर्भुज सदैव एक आयत होता है।

ABCD एक आयत है।



☞ एक वृत्त के चारों ओर परिबद्ध समांतर चतुर्भुज सदैव एक समचतुर्भुज होता है।

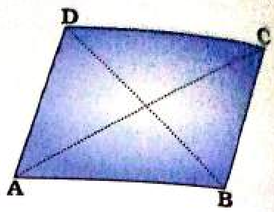
ABCD एक समचतुर्भुज है।



☞ विकर्णों के वर्गों का योग

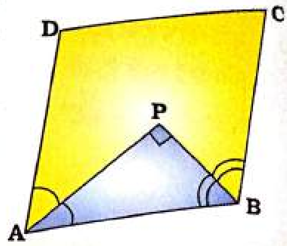
= 2 × (दोनों आसन्न भुजाओं के वर्गों का योग)

$AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$



☞ एक समांतर चतुर्भुज में, किसी भी दो क्रमागत कोणों के समद्विभाजक समकोण पर प्रतिच्छेद करते हैं।

उपरोक्त आकृति में, एक समांतर चतुर्भुज ABCD है। PA और PB क्रमशः ∠A और ∠B के कोण समद्विभाजक हैं। यहाँ, ∠APB = 90° है।



☞ यदि PQRS एक समांतर चतुर्भुज है,

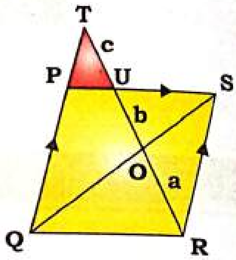
RO = a,

OU = b,

UT = c

तो:

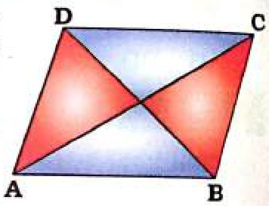
$a^2 = b(b + c)$



समांतर चतुर्भुज की क्षेत्रफल आधारित अवधारणाएँ

☞ प्रत्येक विकर्ण समांतर चतुर्भुज को समान क्षेत्रफल वाले दो सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करता है।

- ΔABC का क्षेत्रफल = ΔADC का क्षेत्रफल
- ΔABD का क्षेत्रफल = ΔBDC का क्षेत्रफल



@apna_channels

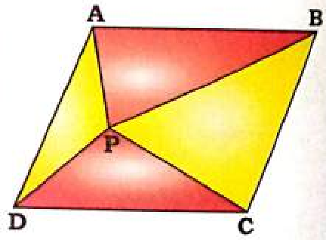
☞ नीचे दी गई आकृति में, P एक समांतर चतुर्भुज ABCD के अभ्यंतर में स्थित एक बिंदु है, तो:

- क्षेत्रफल (ΔAPB) + क्षेत्रफल (ΔPCD)

  = $\dfrac{1}{2}$ क्षेत्रफल (□ABCD)

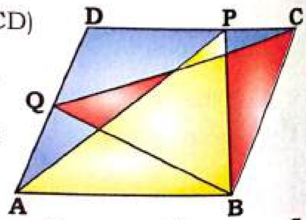
- क्षेत्रफल (ΔAPD) + क्षेत्रफल (ΔPBC)

  = क्षेत्रफल (ΔAPB) + क्षेत्रफल (ΔPCD)

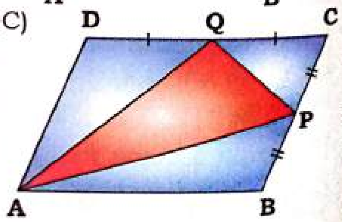


☞ यदि P और Q एक समांतर चतुर्भुज ABCD की भुजाओं DC और AD पर क्रमशः दो बिंदु हैं, तो:

क्षेत्रफल (ΔAPB) = क्षेत्रफल (ΔBQC)



☞ एक समांतर चतुर्भुज ABCD में, P और Q क्रमशः भुजाओं BC और CD के मध्य बिंदु हैं। शीर्ष A, P और Q से एक त्रिभुज बनता है, तो:



$$\frac{\text{ΔAPQ का क्षेत्रफल}}{\text{समांतर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल}} = \frac{3}{8}$$

Join Telegram: @apna_rwa

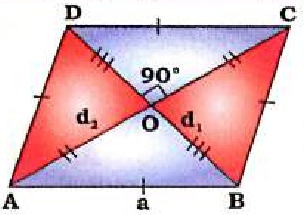
Join Telegram: @yct_publication

समचतुर्भुज

समचतुर्भुज एक समांतर चतुर्भुज है जिसमें सभी भुजाएँ बराबर होती हैं।

a = समचतुर्भुज की भुजाएँ

d_1 , d_2 = समचतुर्भुज के विकर्ण



समचतुर्भुज के गुण

- विपरीत भुजाएँ समान्तर हैं।
- विपरीत कोण बराबर होते हैं।
- विकर्ण एक दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं, लेकिन वे आवश्यक रूप से बराबर नहीं होते।

  $d_1^2 + d_2^2 = 4a^2$
- विकर्ण शीर्ष कोण को समद्विभाजित करते हैं।
- किसी भी दो आसन्न कोणों का योग 180° होता है।

  $\angle A + \angle B = 180°$

Ex. एक समचतुर्भुज के विकर्ण 24 सेमी और 10 सेमी हैं। समचतुर्भुज का परिमाप (सेमी में) है:

HINTS

$d_1^2 + d_2^2 = 4a^2$

$\Rightarrow 24^2 + 10^2 = 4a^2$

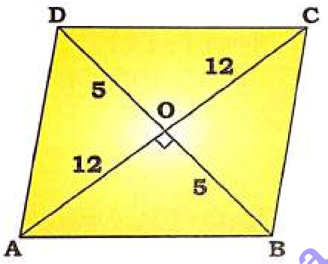
$\Rightarrow 576 + 100 = 4a^2$

$\Rightarrow a^2 = 169$

$\Rightarrow a = 13$ सेमी

$\therefore$ परिधि = 4 × a

= 4 × 13 = 52 सेमी



Ex. यदि PQRS एक समचतुर्भुज है और ∠SPQ = 50° है, तो ∠RSQ है:

HINTS

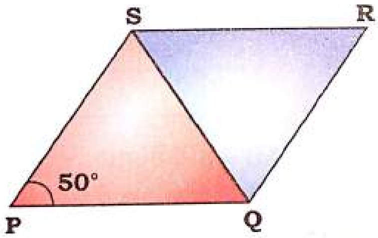
यहाँ, ∠SPQ = 50°

∠PSR = 180° – ∠SPQ

= 180° – 50° = 130°

$\therefore \angle RSQ = \frac{\angle PSR}{2}$

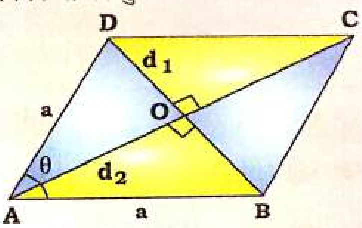
$= \frac{130°}{2} = 65°$



☞ समचतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × विकर्णों का गुणनफल

$d_1 = 2a \sin\frac{\theta}{2}$

$d_2 = 2a \cos\frac{\theta}{2}$



$\because d_1d_2 = 2a \sin\frac{\theta}{2} \times 2a \cos\frac{\theta}{2} = 2a^2 \sin\theta$

$\therefore$ समचतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times d_1d_2$

$= \frac{1}{2} \times 2a^2 \sin\theta = a^2 \sin\theta$

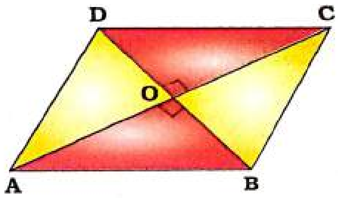
Ex. यदि एक समचतुर्भुज का परिमाप 150 सेमी है तथा एक विकर्ण की लम्बाई 50 सेमी है, तो दूसरे विकर्ण की लम्बाई तथा समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

HINTS AC = 50 सेमी

AB = BC = CD = DA

$= \frac{150}{4} = 37.5$ सेमी

$\therefore OB = \sqrt{AB^2 - OA^2}$



$= \sqrt{(37.5)^2 - (25)^2} = \sqrt{\frac{125 \times 625}{100}} = \frac{25}{2}\sqrt{5}$

$\therefore$ दूसरा विकर्ण, $BD = 2 \times OB = 2 \times \frac{25}{2}\sqrt{5} = 25\sqrt{5}$ सेमी

$\therefore$ क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times d_1 \times d_2 = \frac{1}{2} \times 50 \times 25\sqrt{5} = 625\sqrt{5}$ सेमी²

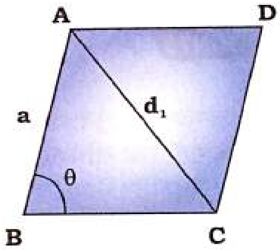
Ex. ABCD एक समचतुर्भुज है। AC इसका सबसे छोटा विकर्ण है और ∠ABC = 60° है। समचतुर्भुज की भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए, जब AC = 6 सेमी है।

HINTS d_1 = AC = 6 सेमी, θ = 60°

$\because d_1 = 2a.\sin\frac{\theta}{2} \Rightarrow 6 = 2a.\sin30°$

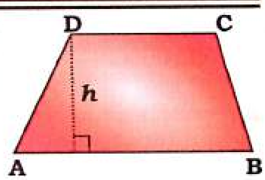
$\Rightarrow 3 = a\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow a = 6$ सेमी

$\therefore$ भुजा की लंबाई = 6 सेमी



समलंब चतुर्भुज

एक चतुर्भुज जिसकी दो सम्मुख भुजाएँ समान्तर हों तथा शेष दो सम्मुख भुजाएँ समान्तर न हों, समलम्ब चतुर्भुज कहलाता है।



समलंब चतुर्भुज के गुण

- समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × (समांतर भुजाओं का योग) × ऊंचाई

  $= \frac{1}{2} \times (AB + CD) \times h$

Ex. एक समलम्ब चतुर्भुज की समांतर भुजाओं की लंबाई क्रमशः 20 सेमी और 25 सेमी है और इन दोनों भुजाओं के बीच लंबवत दूरी 14 सेमी है। समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल (सेमी² में) क्या है?

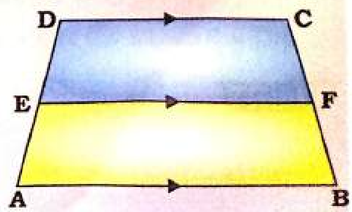
HINTS क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times (20 + 25) \times 14 = 45 \times 7 = 315$ सेमी²

☞ किसी समलम्ब चतुर्भुज की समान्तर भुजाओं के समान्तर कोई भी रेखा असमान्तर भुजाओं को आनुपातिक रूप से विभाजित करती है।

यदि AB || DC || EF, तो :

$\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$

- यदि E और F क्रमशः भुजाओं AD और BC के मध्य बिंदु हैं, तो: $EF = \frac{1}{2}(AB + DC)$



@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

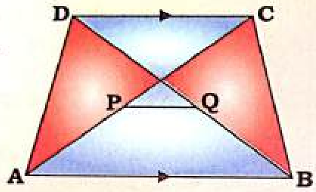
Join Telegram: @yct_publication

Ex. समलम्ब चतुर्भुज ABCD में, AB||DC है। E भुजा AD का मध्य-बिंदु है और F भुजा BC का मध्य-बिंदु है। यदि DC = 8 सेमी और AB = 18 सेमी है, तो EF है:

HINTS $EF = \frac{AB+DC}{2} = \frac{18+8}{2} = 13$ सेमी

☞ एक समलम्ब चतुर्भुज के विकर्णों के मध्य-बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखाखंड प्रत्येक समांतर भुजा के समांतर होता है तथा समलम्ब चतुर्भुज की समांतर भुजाओं के बीच के अंतर के आधे के बराबर होता है।

समलम्ब चतुर्भुज ABCD में, AB||DC तथा P और Q क्रमशः विकर्ण AC और BD के मध्य-बिंदु हैं, तो:



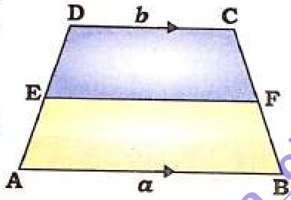
- PQ||AB||DC
- $PQ = \frac{1}{2}(AB - DC)$

Ex. ABCD एक चतुर्भुज है जिसमें AB || DC है। P और Q क्रमशः विकर्ण AC और BD के मध्य-बिंदु हैं। यदि AB = 18 सेमी और CD = 6 सेमी है, तो PQ = ?

HINTS $PQ = \frac{1}{2}(AB - CD) = \frac{1}{2} \times 12 = 6$ सेमी

☞ समलम्ब चतुर्भुज को समांतर भुजाओं के समांतर रेखा खींचकर छोटे-छोटे चतुर्भुजों में विभाजित किया जा सकता है।

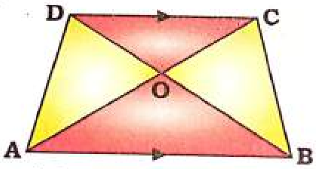
यदि रेखा EF असमांतर भुजाओं को x : y के अनुपात में विभाजित करती है, जैसे कि DE : EA = CF : FB = $x : y$,



तो $EF = \frac{ax+by}{x+y}$

☞ समलम्ब चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को आनुपातिक रूप से विभाजित करते हैं।

- यदि विकर्ण AC और BD एक दूसरे को बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते हैं, तो: $\frac{AO}{CO} = \frac{BO}{DO} = \frac{AB}{CD}$.



इसके विपरीत, यदि किसी चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को आनुपातिक रूप से विभाजित करते हैं, तो वह एक समलम्ब चतुर्भुज होता है।

- क्षेत्रफल(ΔAOB) × क्षेत्रफल(ΔDOC) = क्षेत्रफल(ΔAOD) × क्षेत्रफल(ΔBOC)
- ΔAOD का क्षेत्रफल = ΔBOC का क्षेत्रफल
- $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 + 2(AB \times CD)$

Ex. ABCD एक समलम्ब चतुर्भुज है जहाँ AD||BC है। विकर्ण AC और BD एक दूसरे को बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। यदि AO = 3, CO = x – 3, BO = 3x – 19 और DO = x – 5 है, तो 'x' का मान क्या है?

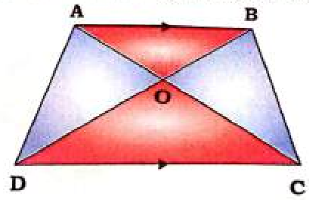
HINTS $\because \frac{AO}{OC} = \frac{DO}{OB} \Rightarrow \frac{3}{x-3} = \frac{x-5}{3x-19}$

$\Rightarrow (3x - 19)^3 = (x - 3)(x - 5)$

$\Rightarrow 9x - 57 = x^2 - 5x - 3x + 15 \Rightarrow x^2 - 17x + 72 = 0$

$\Rightarrow x = 8, 9$

Ex. दी गई आकृति में, AB || DC है। यदि ΔAOD और ΔDOC का क्षेत्रफल क्रमशः 36 सेमी² और 48 सेमी² है, तो ΔAOB का क्षेत्रफल क्या है?

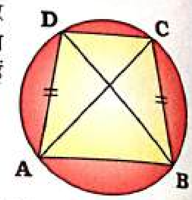


HINTS यहाँ, क्षेत्रफल(ΔAOD) = क्षेत्रफल(ΔBOC) = 36 सेमी²

∵ क्षेत्रफल(ΔAOB) × क्षेत्रफल(ΔDOC) = क्षेत्रफल(ΔAOD) × क्षेत्रफल(ΔBOC)

$\Rightarrow x \times 48 = 36 \times 36 \Rightarrow x = 27$ सेमी²

☞ यदि एक समलम्ब चतुर्भुज को एक वृत्त के अन्दर अंकित किया गया है, तो यह एक समद्विबाहु समलम्ब चतुर्भुज है और इसकी असमान्तर भुजाएँ बराबर हैं तथा इसके विकर्ण भी बराबर हैं।



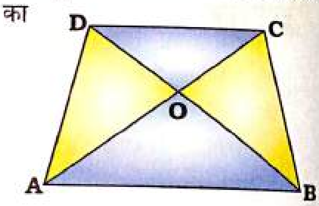
AD = BC

AC = BD

∠DAB + ∠ADC = ∠CBA + ∠BCD = 180°

☞ यदि एक समलम्ब चतुर्भुज ABCD में, AB||DC तथा AB = 2DC है, तो ΔAOB तथा ΔCOD के क्षेत्रफलों का अनुपात 4 : 1 है।

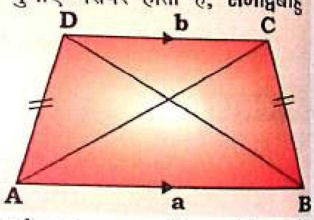
$\frac{\text{क्षेत्रफल }(\Delta AOB)}{\text{क्षेत्रफल }(\Delta COD)} = \frac{4}{1}$



समद्विबाहु समलंब चतुर्भुज

एक समलम्ब चतुर्भुज जिसकी असमान्तर भुजाएँ बराबर होती हैं, **समद्विबाहु समलम्ब चतुर्भुज** कहलाता है।

- AD = BC
- ∠DAB = ∠CBA
- AC = BD



Ex. ABCD एक समद्विबाहु समलम्ब है जिसमें AB = CD और AD||BC है। यदि AD = 5 सेमी, BC = 9 सेमी और समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल 35 सेमी² है, तो भुजा CD की लंबाई ज्ञात कीजिए।

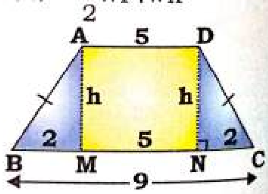
HINTS समलम्ब चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times 14 \times h$

$\Rightarrow 35 = 7 \times h$

$\Rightarrow h = 5$ सेमी

ΔCND में:

$CD = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$ सेमी

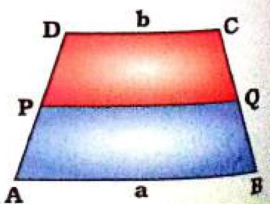


☞ यदि DP : PA = CQ : QB = m : n,

तो: $PQ = \sqrt{\frac{ma^2 + nb^2}{m+n}}$

- यदि PQ समलम्ब चतुर्भुज को दो बराबर क्षेत्रफलों में विभाजित करता है, तो:

m : n = 1 : 1 और, $PQ = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$



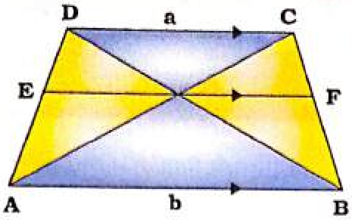
@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

☞ समद्विबाहु समलम्ब चतुर्भुज के विकर्णों के प्रतिच्छेद बिन्दु से गुजरने वाले समांतर रेखाखंड की लंबाई है:

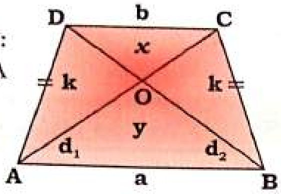
$EF = \frac{2ab}{a+b}$



☞ यदि ABCD एक समद्विबाहु समलम्ब है और y, k, x और k क्रमश: ΔAOB, ΔBOC, ΔCOD और ΔDOA के क्षेत्रफल हैं, तो:

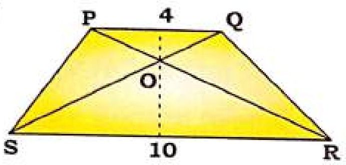
$k = \sqrt{xy}$

$x : y = b^2 : a^2$



Ex. एक समलम्ब चतुर्भुज PQRS में, PQ, SR के समान्तर है तथा विकर्ण PR और QS, O पर प्रतिच्छेद करते हैं। यदि PQ = 4 सेमी, SR = 10 सेमी, तो ΔPOQ के क्षेत्रफल का ΔSOR के क्षेत्रफल से अनुपात क्या है?

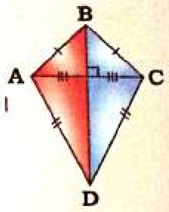
HINTS



$\frac{ar\Delta POQ}{ar\Delta SOR} = \frac{(4)^2}{(10)^2} = \frac{4}{25}$

पतंग

पतंग एक चतुर्भुज है जिसमें आसन्न भुजाओं के दो अलग-अलग जोड़े होते हैं जिनकी लंबाई बराबर होती है तथा विकर्ण एक दूसरे के लंबवत होते हैं।



- AB = BC और AD = CD
- विकर्ण एक दूसरे को समकोण पर काटते हैं।
- बड़ा विकर्ण छोटे विकर्ण को समद्विभाजित करता है।
- क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × विकर्णों का गुणनफल
  $= \frac{1}{2} \times AC \times BD$
- दो सम्मुख कोण बराबर हैं तथा शेष दो सम्मुख कोण बराबर नहीं हैं।
- दो असमान भुजाओं के बीच का कोण अन्य दो असमान भुजाओं के बीच के कोण के बराबर होता है।

  ∠BAD = ∠BCD

Ex. एक पतंग ABCD में, बड़ा विकर्ण BD खींचा गया है। यदि ∠ABD = 54° और ∠ADB = 50° है, तो ∠DCB का माप क्या है?

HINTS ΔBAD में:

∠BAD = 180° – 54° – 50° = 76°

∴ ∠DCB = ∠BAD = 76°

सारांश

@apna_channels

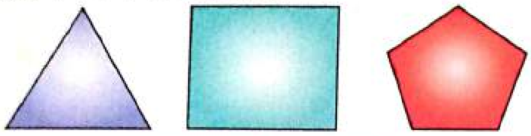
गुण	वर्ग	आयत	चतुर्भुज	समचतुर्भुज
4 भुजा	✓	✓	✓	✓
विपरीत भुजाएँ बराबर	✓	✓	✓	✓
सभी भुजाएँ बराबर	✓	×	×	✓
विपरीत कोण बराबर होते हैं	✓	✓	✓	✓
सभी कोण 90°	✓	✓	×	×
विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं	✓	✓	✓	✓
विकर्ण बराबर	✓	✓	×	×
एक दूसरे के विकर्ण लंबवत	✓	×	×	✓
विकर्ण शीर्ष कोण को समद्विभाजित करते हैं	✓	×	×	✓

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

बहुभुज

बहुभुज 'n' भुजाओं वाली एक बंद आकृति है जो रेखाखंडों से बनती है। रेखाखंडों को इसकी भुजाएं कहते हैं। वे बिंदु जहाँ दो भुजाएँ मिलती हैं, बहुभुज के शीर्ष या कोने कहलाते हैं।



बहुभुज के प्रकार

- भुजाओं के आधार पर
  - नियमित/सम बहुभुज
  - अनियमित/विषम बहुभुज
- कोणों के आधार पर
  - उत्तल बहुभुज
  - अवतल बहुभुज

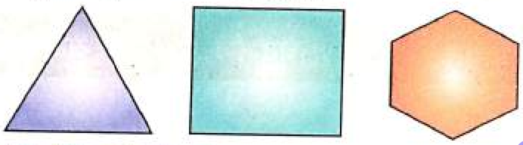
नियमित/सम बहुभुज

एक सम बहुभुज की सभी भुजाओं की लंबाई बराबर होती है और प्रत्येक शीर्ष पर समान कोण होते हैं।

Ex. समबाहु त्रिभुज 3-भुजाओं वाला सम बहुभुज

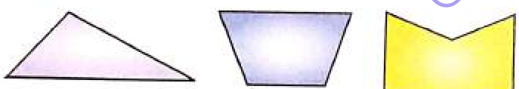
वर्ग 4-भुजाओं वाला सम बहुभुज

सम षट्भुज 6-भुजाओं वाला सम बहुभुज



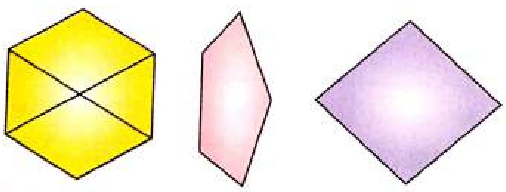
अनियमित/विषम बहुभुज

एक विषम बहुभुज की भुजाएँ बराबर नहीं होती हैं और उसके कोण एक दूसरे से भिन्न होते हैं।



उत्तल बहुभुज

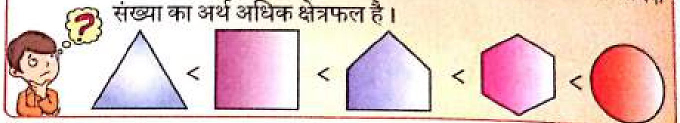
एक उत्तल बहुभुज एक ऐसा बहुभुज होता है जिसके सभी आंतरिक कोण 180° से कम होते हैं। उत्तल बहुभुज में, सभी विकर्ण बहुभुज के आंतरिक भाग में होते हैं।



अवतल बहुभुज

एक अवतल बहुभुज एक ऐसा बहुभुज होता है जिसका कम से कम एक आंतरिक कोण 180° से अधिक होता है। अवतल बहुभुज में, सभी विकर्ण बहुभुज के आंतरिक भाग में नहीं होते हैं।

यदि नियमित बहुभुज का परिमाप समान है, तो भुजाओं की अधिक संख्या का अर्थ अधिक क्षेत्रफल है।



सम बहुभुज के लिए कुछ महत्वपूर्ण सूत्र

- n भुजाओं वाले एक बहुभुज के सभी आंतरिक कोणों का योग $= (n-2)\,180°$
- n भुजाओं वाले एक सम बहुभुज का प्रत्येक आंतरिक कोण $= \frac{(n-2)\times 180°}{n}$
- n भुजाओं वाले बहुभुज के सभी बाहरी कोणों का योग = 360°
- n भुजाओं वाले एक सम बहुभुज का प्रत्येक बाह्य कोण $= \frac{360°}{n}$
- एक सम बहुभुज में भुजाओं की संख्या $(n) = \frac{360°}{\text{बाह्य कोण}}$ जहाँ n भुजाओं की संख्या है।
- एक सम बहुभुज के प्रत्येक आंतरिक कोण और बाह्य कोण का योग 180° होता है।
- n भुजाओं वाले बहुभुज के आंतरिक कोण के माप का उसके बाह्य कोण के माप से अनुपात को इस प्रकार दिया जाता है $= \left(\frac{n}{2}-1\right):1$
- **बहुभुज का विकर्ण:-** यदि हम किसी बहुभुज के किन्हीं दो असम्बद्ध शीर्षों को जोड़ते हैं, तो बनने वाले रेखाखंड को विकर्ण कहते हैं।

  n भुजाओं वाले बहुभुज में विकर्णों की संख्या $= \frac{n(n-3)}{2}$, $n > 3$
- भुजाओं की संख्या + विकर्णों की संख्या $= \frac{n(n-1)}{2}$

Ex. एक सम अष्टभुज के सभी आंतरिक कोणों का योग है:

HINTS बहुभुज के सभी आंतरिक कोणों का योग $= (n-2) \times 180°$

यहाँ, n = 8

एक सम अष्टभुज के सभी आंतरिक कोणों का योग

$= (8-2) \times 180° = 6 \times 180° = 1080°$

Ex. एक बहुभुज के सभी आंतरिक कोणों का योग 1440° है। इस बहुभुज की भुजाओं की संख्या है:

HINTS बहुभुज के आंतरिक कोणों का योग $= (n-2) \times 180°$

$\Rightarrow (n-2) \times 180° = 1440°$

$\Rightarrow (n-2) = 8$

$\Rightarrow n = 10$

Ex. एक सम अष्टभुज के प्रत्येक बाह्य कोण का माप है:

HINTS एक सम अष्टभुज के बाह्य कोणों का योग = 360°

एक सम अष्टभुज का प्रत्येक बाह्य कोण $= \frac{360°}{8} = 45°$

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. एक सम बहुभुज का प्रत्येक आंतरिक कोण 144° है। बहुभुज की भुजाओं की संख्या है:

HINTS सम बहुभुज का प्रत्येक आंतरिक कोण = $\frac{(n-2)\times180°}{n}$

$\Rightarrow 144° = \frac{(n-2)\times180°}{n}$

$\Rightarrow 144°n = 180°n - 360° \Rightarrow 36°n = 360° \Rightarrow n = 10$

इस प्रकार, भुजाओं की संख्या = 10

वैकल्पिक विधि

आंतरिक कोण + बाह्य कोण = 180°

⇒ 144° + बाह्य कोण = 180°

⇒ बाह्य कोण = 36°

एक सम बहुभुज में भुजाओं की संख्या (n) = $\frac{360°}{\text{बाह्य कोण}} = \frac{360°}{36°} = 10$

Ex. एक बहुभुज में, आंतरिक और बाह्य कोण 4 : 1 के अनुपात में हैं। बहुभुज की भुजाओं की संख्या है:

HINTS गुणधर्म का उपयोग करने पर, $\frac{n}{2}-1 = 4 \Rightarrow n = 10$

Ex. 'n' भुजाओं वाले एक चक्रीय बहुभुज के प्रत्येक आंतरिक कोण का माप 144° है। तो, इसकी प्रत्येक भुजा से ज्यामितीय केंद्र पर बनने वाले कोण का माप क्या होगा?

HINTS सम बहुभुज का प्रत्येक आंतरिक कोण = $\frac{(n-2)}{n}\times180°$

$\Rightarrow \frac{(n-2)}{n}\times180° = 144° \Rightarrow n = 10$

बहुभुज के ज्यामितीय केंद्र पर कोण 360° होता है।

चूंकि बहुभुज सम है, इसलिए केंद्रीय कोण को 10 बराबर भागों में विभाजित किया गया है।

इस प्रकार, इसकी प्रत्येक भुजा से ज्यामितीय केंद्र पर बना कोण

$= \frac{360°}{10} = 36°$

Ex. 17 भुजाओं वाले एक बहुभुज में विकर्णों की संख्या है:

HINTS ∴ विकर्णों की संख्या = $\frac{17(17-3)}{2} = 119$

Ex. एक बहुभुज में 35 विकर्ण हैं। बहुभुज में भुजाओं की संख्या है:

HINTS विकर्णों की संख्या = 35 ⇒ $\frac{n(n-3)}{2} = 35$

हल करने पर हमें, n = 10 मिलता है।

Ex. यदि एक सम बहुभुज का एक आंतरिक कोण एक सम दशभुज के एक आंतरिक कोण का $\frac{15}{16}$ गुना है, तो बहुभुज के विकर्णों की संख्या ज्ञात कीजिए।

HINTS एक सम बहुभुज का प्रत्येक आंतरिक कोण = $\frac{(n-2)\times180°}{n}$

सम दशभुज का प्रत्येक आंतरिक कोण = $\frac{(10-2)\times180°}{10} = 144°$

प्रश्नानुसार,

$\frac{(n-2)\times180°}{n} = \frac{15}{16}\times144° \Rightarrow n = 8$

∴ विकर्णों की संख्या = $\frac{n(n-3)}{2} = \frac{8(8-3)}{2} = 20$

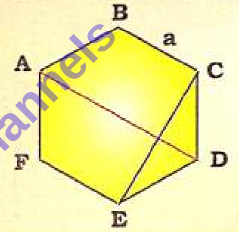
- सम बहुभुज का परिमाप = n × a;
  जहाँ n भुजाओं की संख्या है, a भुजा की लंबाई है।
- n भुजाओं वाले एक सम बहुभुज का क्षेत्रफल, जहाँ प्रत्येक भुजा की लंबाई 'a' है = $n\frac{a^2}{4}\cot\left(\frac{180°}{n}\right)$
- अंत: त्रिज्या = $\frac{a}{2}\cot\left(\frac{\pi}{n}\right)$
- परित्रिज्या = $\frac{a}{2}\text{cosec}\left(\frac{\pi}{n}\right)$
- बहुभुज के शीर्षों को जोड़कर बनने वाले गैर-अतिव्यापी त्रिभुजों की संख्या = (n - 2)
  जहाँ, n = भुजाओं की संख्या

Ex. 11 भुजाओं वाले बहुभुज में, शीर्षों को जोड़कर कितने गैर-अतिव्यापी त्रिभुज बनाए जा सकते हैं।

HINTS बहुभुज के शीर्षों को जोड़कर बनने वाले गैर-अतिव्यापी त्रिभुजों की संख्या = (n – 2) = 11 – 2 = 9

सम षट्भुज

एक सम षट्भुज एक बंद आकृति वाला बहुभुज होता है जिसकी छह बराबर भुजाएँ और छह बराबर कोण होते हैं।



बड़ा विकर्ण (d_1) = 3

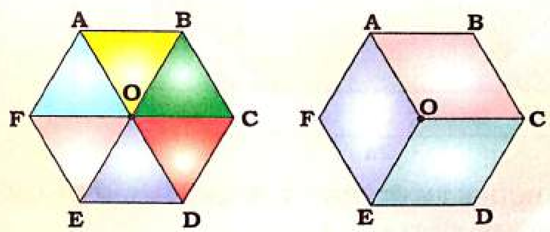
AD = BE = CF = 2a

छोटा विकर्ण (d_2) = 6

AC = BD = CE = DF = EA = BF = $\sqrt{3}a$

सम षट्भुज के गुणधर्म

- इसमें 6 शीर्ष होते हैं।
- आंतरिक कोणों का योग = 720°
- आंतरिक कोण = 120°, बाह्य कोण = 60°
- सम षट्भुज में विकर्णों की संख्या = 9
- सम षट्भुज का परिमाप = 6 × प्रत्येक भुजा
- षट्भुज 6 समबाहु त्रिभुजों या समान क्षेत्रफल वाले 3 समचतुर्भुजों से मिलकर बना होता है।



सम षट्भुज का क्षेत्रफल

- जब भुजा दी गई हो = $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (भुजा)²
- जब बड़ा विकर्ण दिया गया हो = $\frac{3\sqrt{3}}{8}(d_1)^2$
- जब छोटा विकर्ण दिया गया हो = $\frac{\sqrt{3}}{2}(d_2)^2$

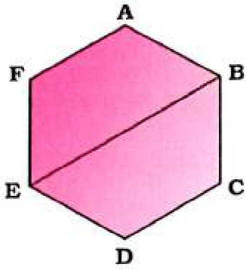
@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. ABCDEF एक सम षट्भुज है और BE = 14 सेमी है, ज्ञात कीजिए।
(i) षट्भुज का परिमाप
(ii) षट्भुज का क्षेत्रफल

HINTS



(i) BE = 14 सेमी

$AF = \frac{14}{2} = 7$ सेमी

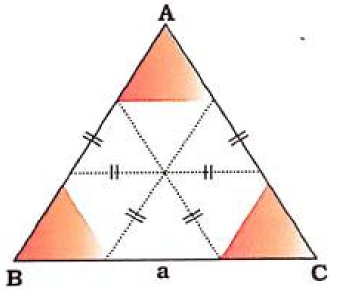
∴ परिमाप = 6 × 7 = 42 सेमी

(ii) जब बड़ा विकर्ण दिया गया हो, तो षट्भुज का क्षेत्रफल:

$= \frac{3\sqrt{3}}{8}(d_1)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{8}(14)^2 = \frac{147\sqrt{3}}{2}$ सेमी²

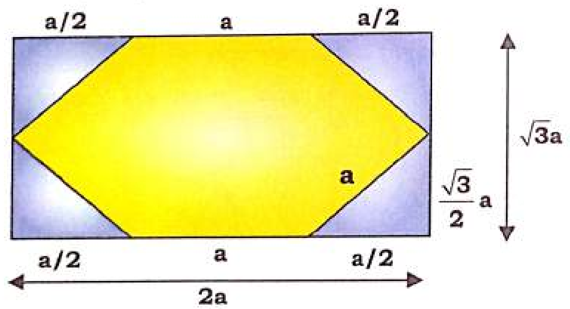
- सम षट्भुज की अंतःत्रिज्या = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ × भुजा
- सम षट्भुज की परित्रिज्या उसकी भुजा की लंबाई के बराबर होती है।
- अंतःत्रिज्या : परित्रिज्या = $\sqrt{3} : 2$
- परिवृत्त का क्षेत्रफल : षट्भुज का क्षेत्रफल : अंतःवृत्त का क्षेत्रफल
  $= \pi a^2 : \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 : \pi\frac{3a^2}{4} = 4\pi : 6\sqrt{3} : 3\pi$

☞ समबाहु Δ त्रिभुज से सम षट्भुज

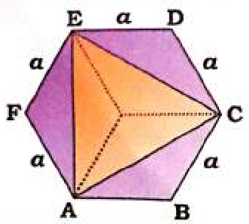


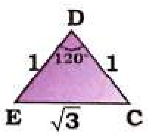
क्षेत्रफल(षट्भुज) : क्षेत्रफल(ΔABC) = 6 : 9 = 2 : 3

☞ 2a लंबाई और $\sqrt{3}a$ चौड़ाई वाले आयत द्वारा बनाया गया षट्भुज रूप:



☞ यदि ABCDEF एक सम षट्भुज है, तो ΔACE और षट्भुज ABCDEF के क्षेत्रफल का अनुपात 1 : 2 है।

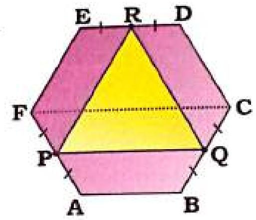


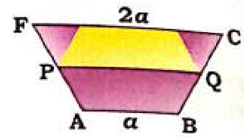


ΔEAC = $\sqrt{3}a$ भुजा का समबाहु त्रिभुज

$\therefore \frac{\Delta EAC \text{ का क्षेत्रफल}}{\text{षट्भुज ABCDEF का क्षेत्रफल}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{3}a)^2}{\frac{3\sqrt{3}}{2}\times a^2} = \frac{1}{2}$

☞





P, Q और R क्रमशः भुजा AF, BC और ED के मध्य बिंदु हैं।

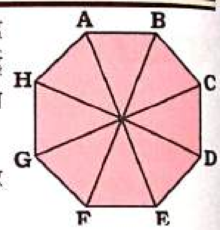
$PQ = \frac{2a + a}{2} = \frac{3a}{2}$

ΔPQR = $\frac{3a}{2}$ भुजा का समबाहु त्रिभुज

$\therefore \frac{\Delta PQR \text{ का क्षेत्रफल}}{\text{षट्भुज ABCDEF का क्षेत्रफल}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{9}{4}a^2}{\frac{3\sqrt{3}}{2}\times a^2} = \frac{3}{8}$

सम अष्टभुज

एक सम अष्टभुज आठ भुजाओं वाला एक बंद बहुभुज होता है जिसकी सभी भुजाएँ समान लंबाई की होती हैं और सभी आंतरिक कोण बराबर होते हैं।



- सम अष्टभुज का एक प्रसिद्ध उदाहरण सड़कों पर लगे स्टॉप साइन हैं।

नियमित अष्टकोण के गुण

- आंतरिक कोणों का योग 1080° होता है।
- बाह्य कोणों का योग 360° होता है।
- प्रत्येक शीर्ष पर आंतरिक कोण 135° और प्रत्येक शीर्ष पर बाह्य कोण 45° होता है।
- सम अष्टभुज का परिमाप = 8 × भुजा
- विकर्णों की संख्या = $\frac{8(8-3)}{2} = \frac{8\times5}{2} = 20$
- अष्टभुज के विकर्ण की लंबाई = $a\left(\sqrt{4+2\sqrt{2}}\right)$
- सम अष्टभुज का क्षेत्रफल = $2a^2\left(1+\sqrt{2}\right)$
  जहां 'a' सम अष्टभुज की भुजा है।
- सम अष्टभुज की अंतःत्रिज्या = $\frac{a}{2\sqrt{2}-2} = \frac{a(\sqrt{2}+1)}{2}$
- सम अष्टभुज की परित्रिज्या = $\frac{a}{2}\left(\sqrt{4+2\sqrt{2}}\right)$

Ex. जिस सम अष्टभुज का परिमाप 16 सेमी है, उसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

HINTS सम अष्टभुज का परिमाप = 8 × भुजा

⇒ 16 = 8 × भुजा ⇒ भुजा = 2 सेमी

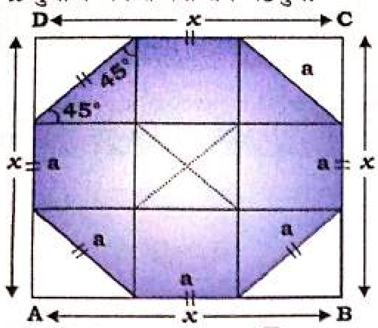
अष्टभुज का क्षेत्रफल = $2a^2\left(1+\sqrt{2}\right) = 2 \times 2^2 \times \left(\sqrt{2}+1\right)$
$= 8\left(\sqrt{2}+1\right)$ सेमी²

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

☞ x भुजा के वर्ग से बना सम अष्टभुज:



(a) वर्ग की भुजा $(x) = a(\sqrt{2}+1)$

(b) अष्टभुज की भुजा $(a) = x(\sqrt{2}-1)$

Ex. 4 सेमी भुजा वाले एक वर्ग को एक सम अष्टभुज में काटा गया है। अष्टभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

HINTS सम अष्टभुज की भुजा $= x(\sqrt{2}-1) = 4(\sqrt{2}-1)$

सम अष्टभुज का क्षेत्रफल $= 2a^2(1+\sqrt{2})$

$= 2 \times 16\ (\sqrt{2}-1)^2(\sqrt{2}+1) = 32(\sqrt{2}-1)$

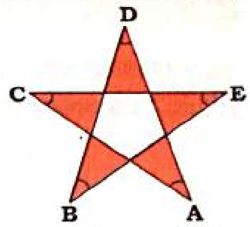
$= 32 \times 0.41 = 13.25$ सेमी^{2}

तारा

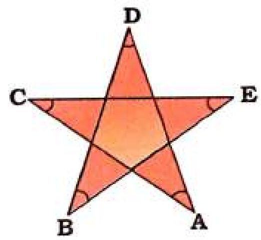
तारा एक सम बहुभुज की भुजाओं को बढ़ाकर बनाया जाता है।

बाह्य कोणों का योग $= (n-4) \times 180°$,

जहां 'n' तारे में बाहरी त्रिभुजों की संख्या है।



Ex. दिए गए चित्र में $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E$ का योग ज्ञात कीजिए।



HINTS सभी बाह्य कोणों का योग $= (n-4) \times 180°$

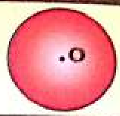
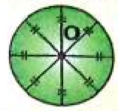
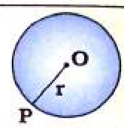
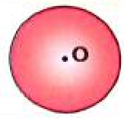
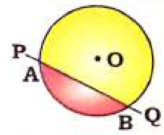
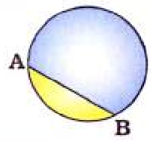
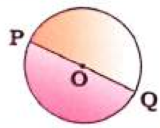
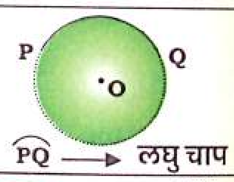
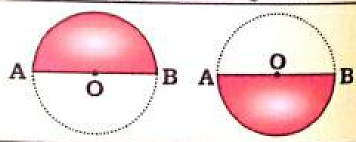
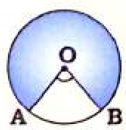
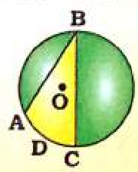
$= (5-4) \times 180° = 180°$

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

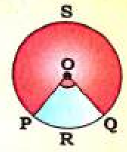
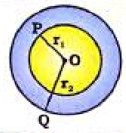
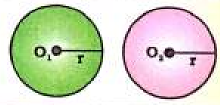
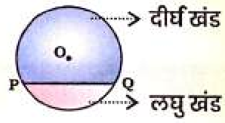
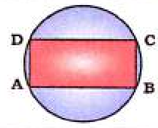
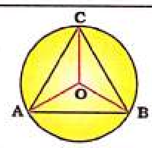
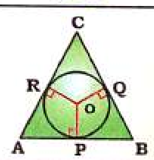
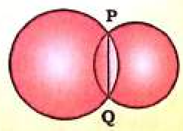
वृत्त

नामपद्धति	परिभाषा	चित्र
वृत्त	वृत्त एक तल (plane) पर उन बिंदुओं का समूह है जो एक निश्चित बिंदु से एक निश्चित दूरी पर स्थित होते हैं। यह एक गोल आकार की आकृति है जिसमें कोई कोने या किनारे नहीं होते हैं।	
केंद्र	वृत्त के अंदर का वह निश्चित बिंदु जो वृत्त की परिधि पर स्थित सभी बिंदुओं से समान दूरी पर होता है, केंद्र कहलाता है। दिए गए आरेख में, 'O' वृत्त का केंद्र है।	
त्रिज्या	केंद्र और वृत्त की परिधि पर किसी भी बिंदु के बीच की दूरी को त्रिज्या (r) कहते हैं। दिए गए आरेख में, OP वृत्त की त्रिज्या है। (बिंदु P परिधि पर स्थित है।)	
परिधि	वृत्त की परिधि वृत्त की सीमा की लंबाई होती है जो $2\pi r$ के बराबर होती है।	
छेदक रेखा	एक रेखाखंड जो वृत्त को दो अलग-अलग बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करता है, छेदक रेखा (secant) कहलाता है। दिए गए आरेख में, छेदक रेखा PQ वृत्त को दो बिंदुओं A और B पर प्रतिच्छेद करती है।	
जीवा	एक रेखाखंड जिसके अंतिम बिंदु वृत्त की परिधि पर स्थित होते हैं, जीवा कहलाता है। दिए गए आरेख में, AB एक जीवा है।	
व्यास	एक जीवा जो वृत्त के केंद्र से होकर गुजरती है, वृत्त का व्यास कहलाती है। व्यास की लंबाई त्रिज्या की लंबाई की दोगुनी होती है। दिए गए आरेख में, PQ वृत्त का व्यास है। (O वृत्त का केंद्र है)।	
चाप	किसी वृत्त की परिधि पर कोई भी दो बिंदु, परिधि को दो भागों में विभाजित करते हैं। छोटे भाग को लघु चाप और बड़े भाग को दीर्घ चाप कहते हैं। इसे ⌒ द्वारा दर्शाया जाता है। दिए गए आरेख में, $\overset{\frown}{PQ}$ एक चाप है।	
अर्धवृत्त	वृत्त का व्यास वृत्त को दो बराबर भागों में विभाजित करता है। प्रत्येक भाग को अर्धवृत्त कहा जाता है।	
केंद्रीय कोण	वृत्त के केंद्र पर बनने वाले कोण को केंद्रीय कोण कहते हैं। दिए गए आरेख में, ∠AOB केंद्रीय कोण है।	
अंतर्निर्मित कोण	जब दो जीवाओं का एक उभयनिष्ठ अंतिम बिंदु होता है, तो उभयनिष्ठ बिंदु पर इन दो जीवाओं के बीच बने कोण को अंतर्निर्मित कोण कहते हैं। ∠ABC चाप $\overset{\frown}{ADC}$ द्वारा बना अंतर्निर्मित कोण है।	

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

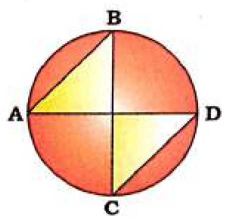
Join Telegram: @yct_publication

नामपद्धति	परिभाषा	चित्र
चाप का माप	मूलतः यह चाप द्वारा निर्मित केंद्रीय कोण है। उदाहरणार्थ, (a) वृत्त के केंद्र पर कोण का माप = 360° (b) अर्धवृत्त के केंद्र पर कोण का माप =180° (c) लघु चाप का माप = $\angle POQ$ (d) एक दीर्घ चाप का माप = 360° – $\angle POQ$ m(arc PRQ) = m $\angle POQ$ m(arc PSQ) = 360° – m(arc PRQ)	
संकेंद्रित वृत्त	एक तल पर एक ही केंद्र वाले वृत्तों को संकेन्द्री वृत्त कहते हैं। दिए गए आरेख में त्रिज्याओं 'r_1' और 'r_2' वाले दो वृत्त हैं जिनका उभयनिष्ठ (या एक ही) केंद्र O है। ये संकेन्द्री वृत्त हैं।	
सर्वांगसम वृत्त	समान त्रिज्या वाले वृत्तों को सर्वांगसम वृत्त कहते हैं।	
वृत्त खंड	एक जीवा एक वृत्त को दो क्षेत्रों में विभाजित करती है। इन दो क्षेत्रों को वृत्त के खंड कहा जाता है। (a) दीर्घ खंड (b) लघु खंड **एक वृत्त के दीर्घ और लघु खंडों को एक-दूसरे का एकांतर खंड कहा जाता है।**	
चक्रीय चतुर्भुज	एक चतुर्भुज जिसके चारों शीर्ष वृत्त की परिधि पर स्थित होते हैं,एक चक्रीय चतुर्भुज कहलाता है।	
परिवृत्त	एक वृत्त जो त्रिभुज के तीनों शीर्षों से होकर गुजरता है, परिवृत्त कहलाता है। इस प्रकार, परिकेन्द्र हमेशा त्रिभुज के शीर्षों से समान दूरी पर होता है। परिवृत्त की त्रिज्या 'R'= OA = OB = OC	
अंतःवृत्त	एक वृत्त जो त्रिभुज की तीनों भुजाओं को स्पर्श करता है, अर्थात, त्रिभुज की तीनों भुजाएँ वृत्त की स्पर्शरेखाएँ हैं, उसे अंतःवृत्त कहते हैं। अंतःवृत्त का केंद्र हमेशा त्रिभुज की भुजाओं से समान दूरी पर होता है। अंतःत्रिज्या 'r'= OP = OQ = OR	
उभयनिष्ठ जीवा	यदि दो वृत्त दो बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करते हैं और इन वृत्तों के प्रतिच्छेदन बिंदुओं को एक रेखाखंड द्वारा जोड़ा जाता है, तो इस रेखाखंड को उभयनिष्ठ जीवा कहते हैं। उभयनिष्ठ जीवा = PQ	

चाप और जीवा के मूलभूत गुण, प्रमेय और महत्वपूर्ण परिणाम

- व्यास वृत्त की सबसे बड़ी जीवा होती है।
- यदि किसी वृत्त (या सर्वांगसम वृत्तों) के दो चाप सर्वांगसम हैं, तो उनकी संगत जीवाएँ बराबर होती हैं।

$\widehat{AB} = \widehat{CD}$ ⇐
$\therefore$ AB = CD



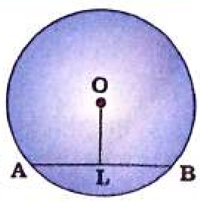
इसके विपरीत, यदि किसी वृत्त (या सर्वांगसम वृत्तों) की दो जीवाएँ बराबर हैं, तो उनके संगत चाप (लघु, दीर्घ या अर्धवृत्ताकार) सर्वांगसम होते हैं।

- वृत्त के केंद्र से जीवा पर डाला गया लंब जीवा को समद्विभाजित करता है।

यदि OL ⊥ AB, तब AL = LB.

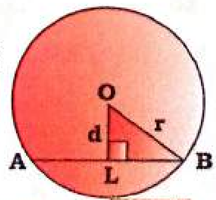
इसके विपरीत, वृत्त के केंद्र को जीवा के मध्य-बिंदु से मिलाने वाली रेखा जीवा पर लंब होती है।

यदि AL = LB, तब OL ⊥ AB.



- यदि OL ⊥ AB, तब AL = LB और ΔOLB है एक समकोण त्रिभुज, अर्थात,

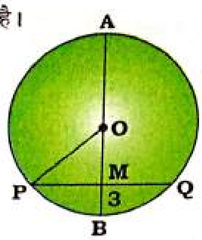
$OL^2 + LB^2 = OB^2$



@apna_channels
Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. एक दिए गए वृत्त में, जीवा PQ की लंबाई 18 सेमी है। AB, PQ का लंब समद्विभाजक है जो M पर है। यदि MB = 3 सेमी है, तो AB की लंबाई = ?



HINTS माना, वृत्त की त्रिज्या 'x' है।

$OM = OB - MB = x - 3$

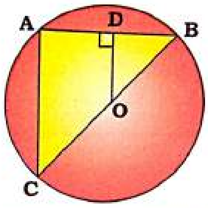
ΔOMP में, पाइथागोरस प्रमेय से

$(OP)^2 = (OM)^2 + (MP)^2$

$\Rightarrow (x)^2 = (x-3)^2 + (9)^2 \Rightarrow x = 15$ सेमी

$\therefore$ व्यास 'AB' = 15 × 2 = 30 सेमी

☞ यदि किसी वृत्त में, जीवा AB पर OD लंब है, O वृत्त का केंद्र है और BC व्यास है, जैसा कि नीचे दिखाया गया है, तो:



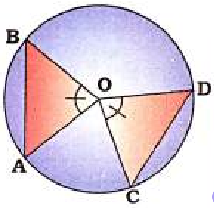
$CA = 2 \times OD$

जीवाओं द्वारा अंतरित कोण

☞ किसी वृत्त की बराबर जीवाएँ केंद्र पर बराबर कोण अंतरित करती हैं और इसके विपरीत, यदि जीवाओं द्वारा (किसी वृत्त के) केंद्र पर अंतरित कोण बराबर हैं, तो जीवाएँ बराबर होती हैं। यदि AB = CD, तो

$\angle AOB = \angle COD$

इसके विपरीत, यदि $\angle AOB = \angle COD$ है, तब AB = CD.



Ex. किसी वृत्त की दो जीवाएँ AB और CD इस प्रकार हैं कि AB = CD = 5 सेमी और r = 4 सेमी है। यदि O वृत्त का केंद्र है, तो ($\angle AOB - \angle COD$) का मान क्या है?

HINTS समान जीवाएँ केंद्र पर समान कोण अंतरित करती हैं।

$\therefore \angle AOB = \angle COD$

$\Rightarrow \angle AOB - \angle COD = 0$

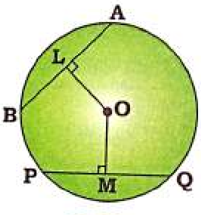
☞ किसी वृत्त की समान जीवाएँ केंद्र से समदूरस्थ होती हैं।

यदि AB = PQ, तब OL = OM

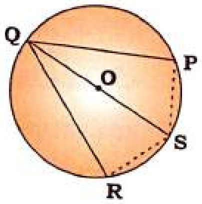
इसके विपरीत, यदि दो जीवाएँ केंद्र से समदूरस्थ हैं, तो जीवाएँ बराबर होती हैं।

यदि OL = OM, तब

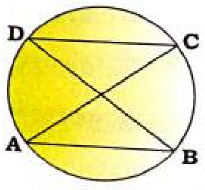
AB = PQ



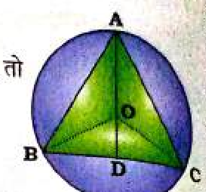
☞ यदि PQ और QR किसी वृत्त की केंद्र से समदूरस्थ जीवाएँ हैं, तो Q से होकर जाने वाला व्यास $\angle PQR$ और $\angle PSR$ को समद्विभाजित करता है।



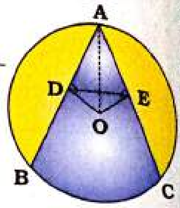
☞ यदि A, B, C, D किसी वृत्त पर चार क्रमागत बिंदु हैं और $AB = CD$ है, तो $AC = BD$ होगा।



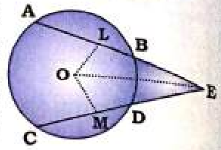
☞ यदि ΔABC के $\angle BAC$ का समद्विभाजक AD, ΔABC के परिवृत्त के केंद्र O से होकर गुजरता है, तो $AB = AC$ होगा।



☞ AB और AC एक वृत्त की दो समान जीवाएँ हैं जिसका केंद्र O है और यदि $OD \perp AB$ और $OE \perp AC$ है, तो ΔADE एक समद्विबाहु त्रिभुज है।



☞ यदि एक वृत्त की दो समान जीवाएँ AB और CD, जिनका केंद्र O है, जब एक बिंदु E पर मिलने के लिए बढ़ाई जाती हैं, जैसा कि दिए गए चित्र में दिखाया गया है, तो $BE = DE$ और $AE = CE$ होगा।



☞ यदि किसी वृत्त की दो जीवाएँ एक-दूसरे को समद्विभाजित करती हैं, तो वे निश्चित रूप से व्यास होंगी।

Ex. PQ और RS किसी वृत्त की दो समानांतर जीवाएँ हैं, जिसकी त्रिज्या 10 सेमी है और केंद्र O है। यदि PQ = 12 सेमी और RS = 16 सेमी है और दोनों केंद्र के विपरीत दिशाओं में स्थित हैं, तो PQ और RS के बीच की लंबवत दूरी ज्ञात कीजिए।

@apna_channels

HINTS

ΔOMR और ΔONP में पाइथागोरस प्रमेय का उपयोग करके:

$(OM)^2 = (OR)^2 - (MR)^2 = (10)^2 - (8)^2$

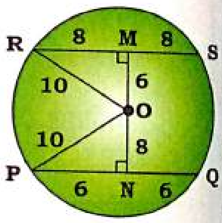
$\Rightarrow OM = 6$

$(ON)^2 = (OP)^2 - (NP)^2 = (10)^2 - (6)^2$

$\Rightarrow ON = 8$

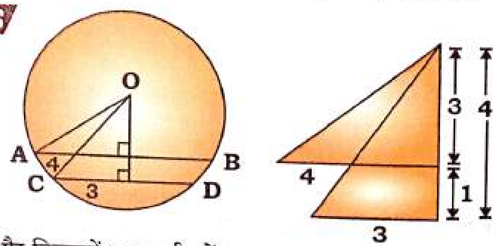
$\therefore$ दो जीवाओं के बीच की लंबवत दूरी

= OM + ON = 6 + 8 = 14 सेमी



Ex. AB = 8 सेमी और CD = 6 सेमी दो समानांतर जीवाएँ हैं जो एक वृत्त के केंद्र की एक ही तरफ हैं। उनके बीच की दूरी 1 सेमी है। वृत्त की त्रिज्या है:

HINTS



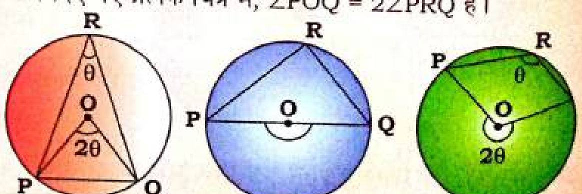
त्रिक और विकल्पों पर कार्य करें।

त्रिक (3, 4, 5) सभी शर्तों को पूरा करता है।

$\therefore$ त्रिज्या = 5 सेमी

☞ किसी जीवा द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण, वृत्त की परिधि पर किसी भी बिंदु पर उसके द्वारा अंतरित कोण का दोगुना होता है।

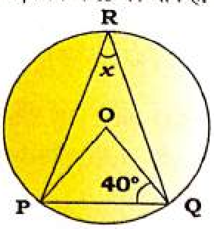
नीचे दिए गए प्रत्येक चित्र में, $\angle POQ = 2\angle PRQ$ है।



Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. यदि O केंद्र है, तो दिए गए चित्र में 'x' का मान है:

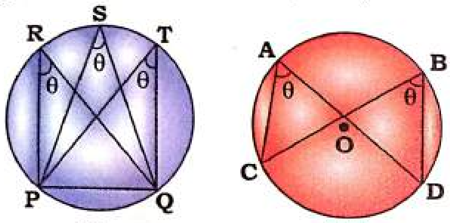


HINTS ΔPOQ में,

$\angle POQ = 180° - (40° + 40°) = 100°$

$\therefore \quad x = \frac{100°}{2} = 50°$

☞ एक ही वृत्तखंड में बने कोण बराबर होते हैं, अर्थात,

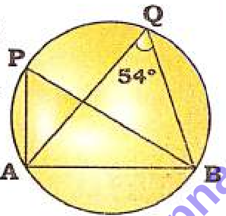


(i) (ii)

(i) $\angle PRQ = \angle PSQ = \angle PTQ$

(ii) $\angle CAD = \angle CBD$

Ex. दिए गए चित्र में, AB एक जीवा है और P और Q वृत्त पर दो बिंदु इस प्रकार हैं कि $\angle AQB = 54°$ है, तो $\angle APB$ का मान क्या है?



HINTS

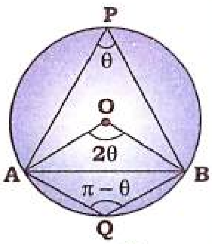
हम जानते हैं कि एक ही वृत्तखंड में बने कोण बराबर होते हैं।

$\therefore \angle APB = \angle AQB = 54°$

☞ यदि AB एक जीवा है, O केंद्र है और P और Q क्रमशः वृत्त के दीर्घ और लघु खंडों में कोई दो बिंदु हैं, तो जीवा AB द्वारा P और Q पर अंतरित कोण संपूरक होते हैं।

यदि $\angle APB = \theta$, तब

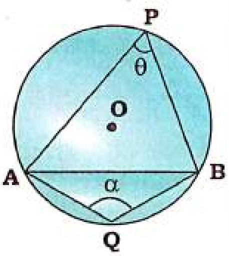
$\angle AOB = 2\theta$ और $\angle AQB = \pi - \theta$.



☞ किसी जीवा द्वारा दीर्घ वृत्तखंड में बनाया गया कोण न्यूनकोण होता है और लघु वृत्तखंड में बनाया गया कोण अधिक कोण होता है।

यदि AB एक जीवा है और P और Q परिधि पर बिंदु हैं, तो:

$\angle APB < 90°$ और $\angle AQB > 90°$

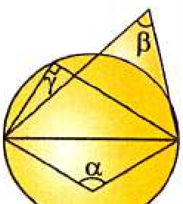


☞ **एक वृत्त का व्यास अंतरित करता है:**

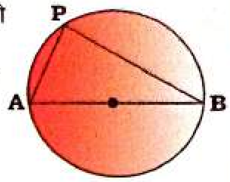
(a) वृत्त के आंतरिक भाग में एक बिंदु पर एक अधिक कोण (α)

(b) वृत्त के बाहरी भाग में एक बिंदु पर एक न्यूनकोण (β)

(c) वृत्त की परिधि पर एक बिंदु पर एक समकोण (γ)



Ex. यदि वृत्त का केंद्र AB पर स्थित है और P वृत्त की परिधि पर कोई बिंदु है और $\angle ABP = 35°$ है, तो $\angle PAB$ का मान क्या है?



HINTS

$\angle APB = 90°$ (व्यास द्वारा वृत्त की परिधि पर बनाया गया कोण)

$\angle BAP = 90° - \angle ABP = 90° - 35° = 55°$

Ex. AB केंद्र O वाले एक वृत्त का व्यास है। C और D, AB के दोनों ओर वृत्त पर दो बिंदु हैं, जैसे कि $\angle CAB = 52°$ और $\angle ABD = 47°$। $\angle CAD$ और $\angle CBD$ के मापों के बीच का अंतर (डिग्री में) क्या है?

HINTS

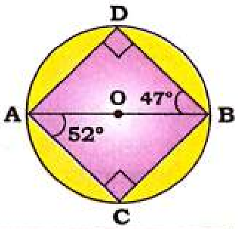
$\angle BAD = 90° - 47° = 43°$

$\angle CBA = 90° - 52° = 38°$

$\angle CAD = 52° + 43° = 95°$

$\angle CBD = 47° + 38° = 85°$

$\therefore \angle CAD - \angle CBD = 95° - 85° = 10°$



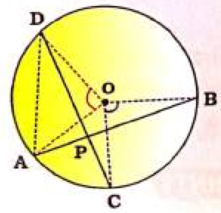
महत्वपूर्ण परिणाम (i)

☞ **जब दो जीवाएँ वृत्त के अंदर प्रतिच्छेद करती हैं**

केंद्र O वाले एक वृत्त की दो जीवाएँ AB और CD एक दूसरे को P पर प्रतिच्छेद करती हैं। यदि $\angle AOD = x°$ और $\angle BOC = y°$ है, तो $\angle APC$ का मान है:

$\angle APD = \angle BPC = \frac{(x° + y°)}{2}$

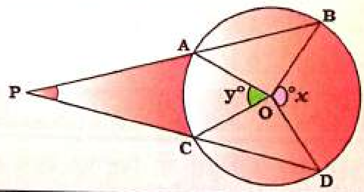
$\angle APC = 180° - \frac{(x° + y°)}{2}$



☞ **जब दो जीवाएँ वृत्त के बाहर प्रतिच्छेद करती हैं**

केंद्र O वाले एक वृत्त की दो जीवाएँ AB और CD को बढ़ाने पर एक दूसरे को P पर प्रतिच्छेद करती हैं। यदि $\angle BOD = x°$ और $\angle AOC = y°$ है, तो $\angle BPD$ का मान है:

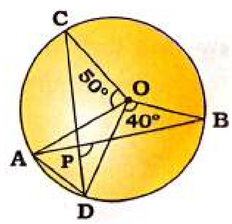
$\angle BPD = \frac{(x° - y°)}{2}$



Ex. किसी वृत्त की दो जीवाएँ AB और CD, जिनका केंद्र O है, एक दूसरे को बिंदु P पर मिलती हैं और $\angle AOC = 50°$ और $\angle BOD = 40°$ है, तो $\angle BPD$ किसके बराबर है?

HINTS

$\angle BPD = \frac{(x° + y°)}{2} = \frac{50° + 40°}{2} = 45°$

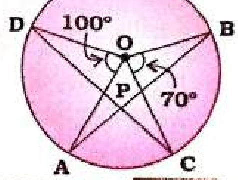


Ex. किसी वृत्त की दो जीवाएँ AB और CD, जिनका केंद्र O है, एक दूसरे को P पर प्रतिच्छेद करती हैं। यदि $\angle AOD = 100°$ और $\angle BOC = 70°$ है, तो $\angle APC$ का मान क्या है?

HINTS

$\angle APC = 180° - \left(\frac{100° + 70°}{2}\right)$

$= 180° - 85° = 95°$



@apna_channels

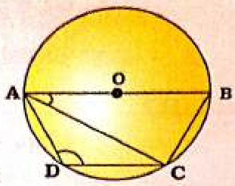
Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

महत्वपूर्ण परिणाम (ii)

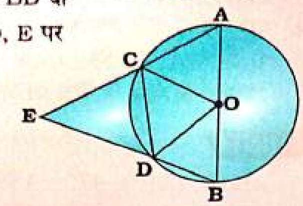
☞ AB वृत्त का व्यास है और यदि ∠BAC दिया गया है, तो DC || AB

∠DAC = 90° – 2 ∠BAC



☞ केंद्र O वाले एक वृत्त में, AC और BD दो जीवाएँ हैं। बढ़ाने पर AC और BD, E पर मिलते हैं। यदि AB व्यास है और ∠AEB = $x°$ है, तो ∠DOC का माप है:

∠DOC = 180° – 2 ∠AEB



Ex. एक वृत्त में जिसका केंद्र O है, AB व्यास है और CD एक जीवा है इस प्रकार कि ABCD एक समलंब चतुर्भुज है। यदि ∠BAC = 40° है, तो ∠CAD किसके बराबर है?

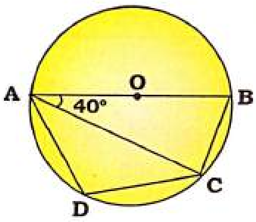
HINTS दिया है,

∠BAC = 40°

∠DAC = 90° – 2 × ∠BAC

= 90° – 2 × 40°

= 90° – 80° = 10°



Ex. एक वृत्त में जिसका केंद्र O है, AC और BD दो जीवाएँ हैं। AC और BD को बढ़ाने पर वे E पर मिलती हैं। यदि AB व्यास है और ∠AEB = 68° है, तो ∠DOC का माप क्या है?

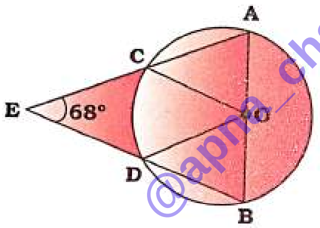
HINTS

दिया है,

∠AEB = 68°

∠DOC = 180° – 2∠AEB

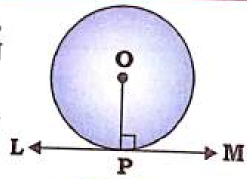
= 180° – 2 × 68° = 44°



स्पर्श रेखा

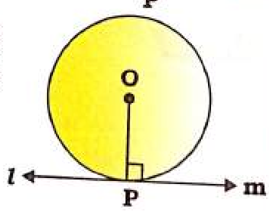
☞ किसी वृत्त के किसी भी बिंदु पर स्पर्श रेखा, स्पर्श बिंदु से खींची गई त्रिज्या पर लंबवत होती है।

यदि LM एक स्पर्श रेखा है, O केंद्र है और P स्पर्श बिंदु है, तो OP ⊥ LM होगा।



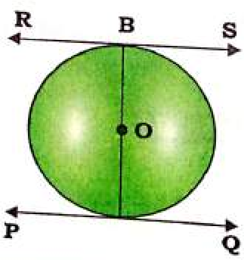
☞ किसी त्रिज्या के अंतिम बिंदु से खींची गई एक रेखा, त्रिज्या पर लंबवत होती है और वह वृत्त की स्पर्श रेखा होती है।

यदि O केंद्र है, P स्पर्श बिंदु है और OP ⊥ lm है, तो $\overleftrightarrow{lm}$ स्पर्श रेखा है।



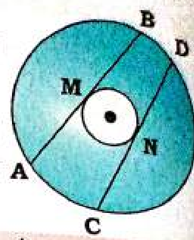
☞ किसी वृत्त के व्यास के अंतिम बिंदुओं पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ समानांतर होती हैं।

यदि AB किसी दिए गए वृत्त का व्यास है और PQ और RS क्रमशः बिंदुओं A और B पर वृत्त के लिए खींची गई स्पर्श रेखाएँ हैं, तो PQ || RS है।



☞ दो संकेंद्रित वृत्तों में, बाहरी वृत्त की सभी जीवाएँ जो भीतरी वृत्त को स्पर्श करती हैं, समान लंबाई की होती हैं।

यदि चित्र में, AB और CD बाहरी वृत्त की दो जीवाएँ हैं जो क्रमशः M और N पर भीतरी वृत्त को स्पर्श करती हैं, तो AB = CD.



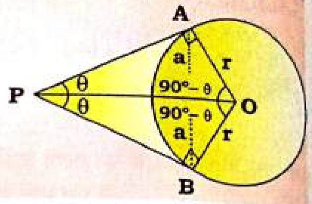
☞ किसी बाहरी बिंदु P से एक वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ PA और PB खींची जाती हैं, जिसका केंद्र O है, तो:

(a) ΔPAO ≅ ΔPBO

(b) $PA = PB = \frac{ar}{\sqrt{r^2-a^2}}$

(c) ∠PAO = ∠PBO = 90°

(d) ∠APO = ∠BPO



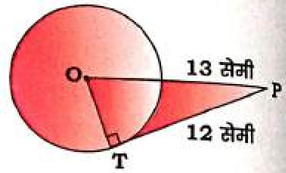
Ex. एक बिंदु P से, जो केंद्र से 13 सेमी दूर है, 12 सेमी लंबाई की एक स्पर्श रेखा PT खींची जाती है। वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

HINTS

दिया है,

OT = 5 सेमी

(पाइथागोरियन त्रिक द्वारा)



Ex. 10 सेमी त्रिज्या वाले एक वृत्त में एक जीवा AB है। जीवा AB की लंबाई 12 सेमी है। एक बाहरी बिंदु P से A और B पर दो स्पर्श रेखाएँ खींची जाती हैं। ज्ञात करें:

(i) PA की लंबाई।

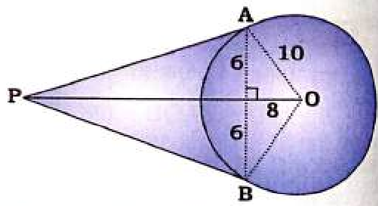
(ii) चतुर्भुज OAPB का क्षेत्रफल।

HINTS

(i) PA =

$\frac{ar}{\sqrt{r^2-a^2}} = \frac{6\times10}{\sqrt{10^2-6^2}} = \frac{60}{8}$

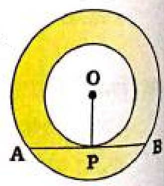
= 7.5 सेमी



(ii) चतुर्भुज OAPB का क्षेत्रफल = 2 × ΔOAP का क्षेत्रफल

$= 2 \times \frac{1}{2} \times AO \times AP = 2 \times \frac{1}{2} \times 10 \times 7.5 = 75$ सेमी²

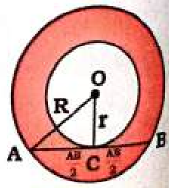
☞ दो संकेंद्रित वृत्तों में, बड़े वृत्त की एक जीवा जो छोटे वृत्त की स्पर्श रेखा है, स्पर्श बिंदु पर समद्विभाजित हो जाती है, अर्थात, AP = BP



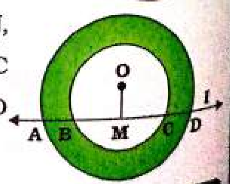
☞ यदि वृत्त संकेंद्रित हैं, तो:

AB की लंबाई = 2AC

$= 2\sqrt{R^2 - r^2}$



☞ यदि 'l' एक रेखा है जो दो संकेंद्रित वृत्तों को, जिनका उभयनिष्ठ केंद्र O है, बिंदुओं A, B, C और D पर प्रतिच्छेद करती है, तो AB = CD होगा।



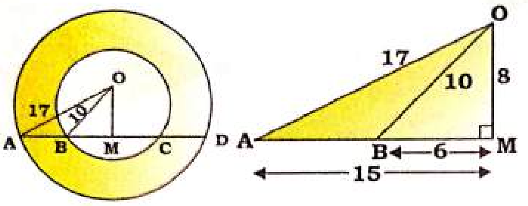
@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. दो संकेंद्रित वृत्तों की त्रिज्याएँ 17 सेमी और 10 सेमी हैं। एक सीधी रेखा ABCD बड़े वृत्त को बिंदुओं A और D पर और छोटे वृत्त को बिंदुओं B और C पर प्रतिच्छेद करती है। यदि BC = 12 सेमी है, तो AD की लंबाई = ?

HINTS

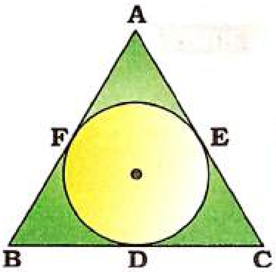


ट्रिपलेट की अवधारणा को लागू करके।

∴ AD की लंबाई = 15 × 2 = 30 सेमी

☞ यदि ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें AB = AC है, और यह एक वृत्त को परिगत करता है, तो आधार स्पर्श बिंदु द्वारा समद्विभाजित होता है।

ΔABC में, यदि AB = AC है तो, BD = DC होगा।



☞ यदि ΔABC का अंतःवृत्त भुजाओं BC, CA और AB को क्रमशः D, E और F पर स्पर्श करता है, तो:

AF + BD + CE = AE + BF + CD = $\frac{1}{2}$ × (ΔABC का परिमाप)

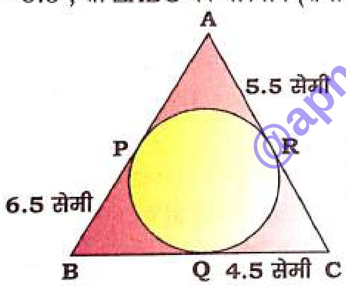
Ex. एक वृत्त एक ΔABC के अंदर अंकित है। यह भुजाओं AB, BC और AC को क्रमशः बिंदुओं P, Q और R पर स्पर्श करता है। यदि BP = 6.5 सेमी, CQ = 4.5 सेमी और AR = 5.5 , तो ΔABC का परिमाप (सेमी में) क्या है?

HINTS

ΔABC का परिमाप

= 2(AR + BP + QC)

= 2 × 16.5 = 33 सेमी



Ex. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें AB = AC है। एक वृत्त B से होकर जाता है और AC को उसके मध्य बिंदु पर स्पर्श करता है और AB को P पर प्रतिच्छेद करता है, तो AP : AB का मान क्या है?

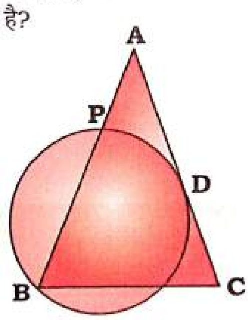
HINTS

∵ D, AC का मध्य बिंदु है।

∴ AD = $\frac{AC}{2} = \frac{AB}{2}$ (∵ AB = AC)

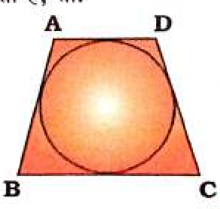
∵ AP × AB = AD²

⇒ AP × AB = $\frac{AB^2}{4}$ ⇒ $\frac{AP}{AB} = \frac{1}{4}$



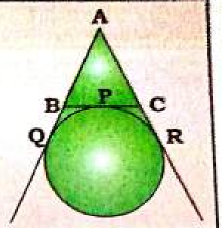
☞ यदि एक चतुर्भुज ABCD एक वृत्त को परिगत करता है, तो:

AB + CD = BC + AD

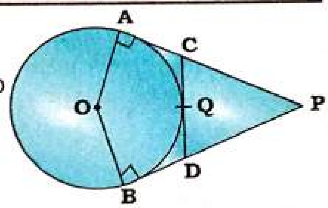


☞ यदि एक वृत्त ΔABC की भुजा BC को P पर स्पर्श करता है और AB और AC को बढ़ाने पर क्रमशः Q और R पर स्पर्श करता है, तो:

AQ = $\frac{1}{2}$ × (ΔABC का परिमाप)



Ex. दिए गए चित्र में, केंद्र O वाले वृत्त की दो स्पर्श रेखाएँ PA, PB हैं। CD भी स्पर्श रेखा है, तो 2PB बराबर है:



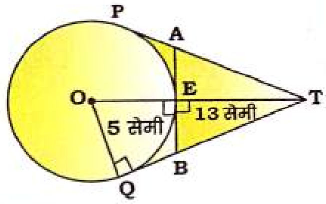
HINTS

PB = $\frac{1}{2}$ × (ΔPDC का परिमाप)

⇒ PB = $\frac{1}{2}$ × (PD + DC + PC)

⇒ 2PB = PD + DC + PC

Ex. दिए गए चित्र में, 5 सेमी त्रिज्या वाले एक वृत्त के केंद्र O से 13 सेमी दूर स्थित एक बिंदु T से, दो स्पर्श रेखाएँ PT और QT खींची जाती हैं। AB की लंबाई क्या है?



HINTS QT = 12 सेमी (पाइथागोरस प्रमेय)

माना, QB = x सेमी

ET = 13 – 5 = 8 सेमी

BT = (12 – x) सेमी

ΔBET मे :

BT² = BE² + ET²

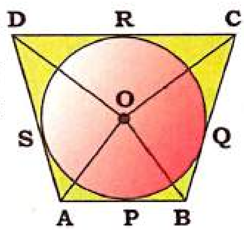
⇒ $(12-x)^2 = x^2 + 8^2$ ⇒ $x = \frac{10}{3}$ सेमी

∴ AB = 2BE = $\frac{2 \times 10}{3} = \frac{20}{3}$ सेमी

☞ यदि एक वृत्त एक चतुर्भुज ABCD की भुजाओं को क्रमशः P, Q, R, S पर स्पर्श करता है, तो विपरीत भुजाओं के जोड़े द्वारा केंद्र पर बनाए गए कोण संपूरक होते हैं, अर्थात:

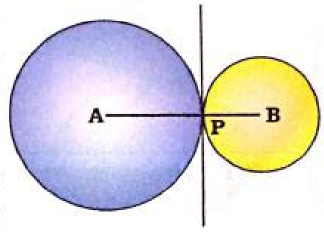
∠AOB + ∠COD = 180° और

∠AOD + ∠BOC = 180°



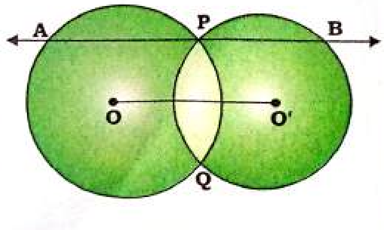
☞ यदि दो वृत्त एक दूसरे को बाहरी रूप से बिंदु P पर स्पर्श करते हैं, P उनके केंद्रो को मिलाने वाली रेखा पर स्थित होता है।

A, B और P संरेख होते हैं। उनके केंद्रों के बीच की दूरी d = AP + BP



☞ यदि दो वृत्त, जिनके केंद्र O और O' हैं, P और Q पर प्रतिच्छेद करते हैं और P से, OO' के समानांतर एक रेखा खींची जाती है जो वृत्तों को A और B पर प्रतिच्छेद करती है, तो

AB = 2 × OO'.



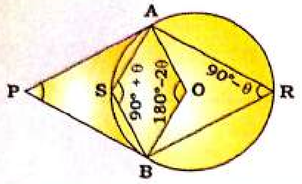
@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

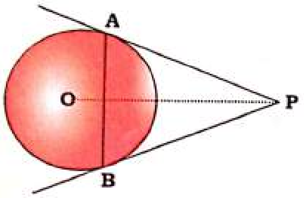
किसी बाहरी बिंदु से दो स्पर्श रेखाओं द्वारा बनाया गया कोण

☞ PA और PB दो स्पर्श रेखाएँ हैं, O वृत्त का केंद्र है और R और S वृत्त पर दो बिंदु हैं।



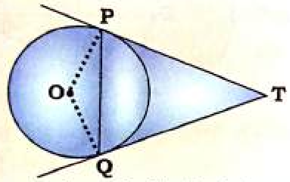
यदि ∠APB = 2θ, तब:
∠AOB = 180° – 2θ
∠ARB = 90° – θ
∠ASB = 90° + θ

☞ किसी बाहरी बिंदु से किसी जीवा के सिरों पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ जीवा के साथ समान कोण बनाती हैं।



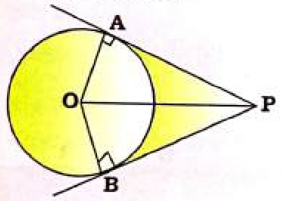
∠PAB = ∠PBA

☞ यदि एक बाहरी बिंदु T से केंद्र O वाले एक वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ TP और TQ खींची जाती हैं, तो:



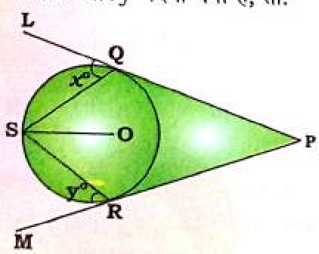
∠PTQ = 2 ∠OPQ

☞ एक वृत्त के बाहरी बिंदु से खींची गई दो स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण, स्पर्श बिंदुओं को केंद्र से जोड़ने वाले रेखाखंड द्वारा केंद्र पर बनाए गए कोण का संपूरक होता है।



∠AOB + ∠APB = 180°

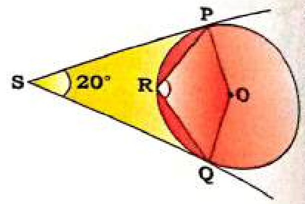
☞ यदि $x°$ और $y°$ दिया गया है, तो:



∠QSR = 180° – ($x°$ + $y°$)

Ex. P और Q केंद्र O वाले एक वृत्त पर दो बिंदु हैं। R, P और Q बिंदुओं के बीच वृत्त के लघु चाप पर एक बिंदु है। P और Q बिंदुओं पर वृत्त की स्पर्श रेखाएँ एक दूसरे से बिंदु S पर मिलती हैं। यदि ∠PSQ = 20° है, तो ∠PRQ = ?

HINTS



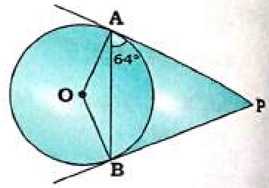
2θ = 20° ⇒ θ = 10°

∠PRQ = 90° + θ

= 90° + 10° = 100°

Ex. एक बिंदु P से एक वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ खींची जाती हैं, जो वृत्त को क्रमशः A और B बिंदुओं पर स्पर्श करती हैं। यदि O वृत्त का केंद्र है और ∠PAB = 64° है, तो ∠APB का माप क्या है?

HINTS



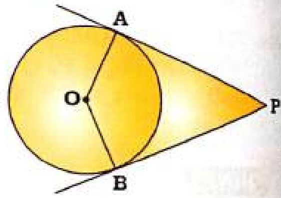
∠OAB = 90° – 64° = 26°

∴ ∠APB = 2∠OAB = 2 × 26°

= 52°

Ex. एक वृत्त पर दो बिंदु A और B हैं, जिनका केंद्र O है। इन बिंदुओं पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ P पर मिलती हैं। यदि चतुर्भुज PAOB में, ∠AOB:∠APB का अनुपात 5 : 1 है, तो ∠APB का माप क्या है?

HINTS



माना ∠AOB = $5x$ और ∠APB = x है।

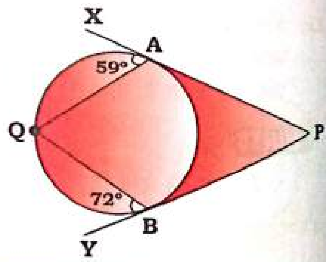
∵ ∠APB + ∠AOB = 180°

⇒ $6x$ = 180° ⇒ x = 30°

∴ ∠APB = 30°

Ex. एक वृत्त है जिसका केंद्र O है। बाहरी बिंदु P से, PAX और PBY क्रमशः A और B बिंदुओं पर वृत्त की स्पर्श रेखाएँ हैं। वृत्त पर कोई बिंदु Q इस प्रकार है कि ∠QAX = 59° और ∠QBY = 72° है। ∠AQB का माप क्या है?

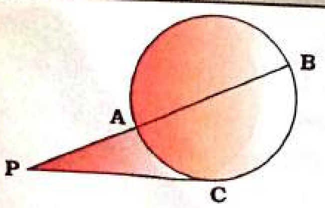
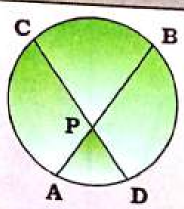
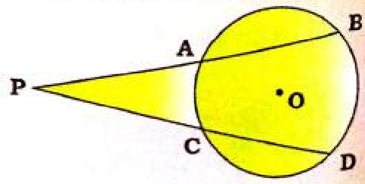
HINTS



∠AQB = 180° – (59° + 72°)
= 49°

@apna_channels

स्पर्श रेखा, छेदक रेखा और जीवा के बीच संबंध

छेदक रेखा प्रमेय	जब जीवाएँ वृत्त के अंदर प्रतिच्छेद करती हैं	जब जीवाएँ वृत्त के बाहर प्रतिच्छेद करती हैं
 PA × PB = PC²	 PA × PB = PC × PD	 PA × PB = PC × PD

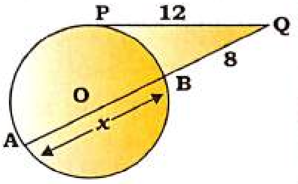
Selected हैं Selection दिलाएंगे

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. एक वृत्त जिसका केंद्र O है, में PQ, P पर एक स्पर्श रेखा है। इसके अतिरिक्त, AB वृत्त की एक जीवा है और इसे Q तक बढ़ाया जाता है। यदि PQ = 12 सेमी और QB = 8 सेमी है, तो AB की लंबाई क्या है?

HINTS



हम जानते हैं कि:

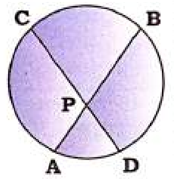
$PQ^2 = QB \times AQ$

$\Rightarrow 12 \times 12 = 8 \times (x + 8)$

$\Rightarrow 18 = x + 8$

$\Rightarrow x = 10$

Ex. दी गई आकृति में, PA = 4 सेमी, PB = 9 सेमी, PC = x सेमी और CD = $6x - 3$ है, तो 'x' का मान क्या है?



HINTS

$AP \times PB = PC \times PD$

$\Rightarrow 4 \times 9 = x \times (6x - 3 - x)$

$\Rightarrow 36 = x(5x - 3)$

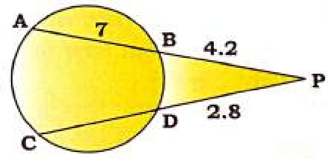
$\Rightarrow 36 = 5x^2 - 3x$

$\Rightarrow 5x^2 - 3x - 36 = 0$

$\Rightarrow x = 3$ सेमी

Ex. एक वृत्त की दो जीवाएँ AB और CD हैं, जिन्हें वृत्त के बाहर एक बिंदु P पर मिलने के लिए बढ़ाया गया है। यदि AB = 7 सेमी, BP = 4.2 सेमी और PD = 2.8 सेमी है, तो CD की लंबाई क्या है?

HINTS



$\because PA \times PB = PC \times PD$

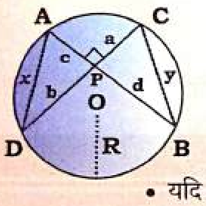
$\Rightarrow 11.2 \times 4.2 = (2.8 + CD) \times 2.8$

$\Rightarrow 2.8 + CD = \dfrac{11.2 \times 4.2}{2.8}$

$\Rightarrow CD = 16.8 - 2.8 = 14$ सेमी

महत्वपूर्ण परिणाम (i)

एक वृत्त की जीवाएँ AB और CD एक दूसरे को P पर काटती हैं और एक दूसरे के लंबवत हैं। यदि AD = x, BC = y, PC = a, PD = b, PA = c, PB = d और R = त्रिज्या है, तो:



$R = \dfrac{\sqrt{AP^2 + PD^2 + CP^2 + BP^2}}{2}$

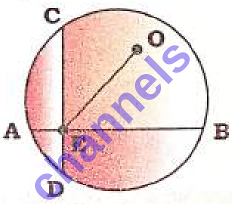
या, $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4R^2$

- यदि $\angle APD = 90°$, $R = \dfrac{\sqrt{BC^2 + AD^2}}{2}$

या, $x^2 + y^2 = 4R^2$

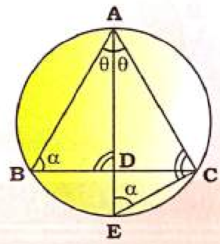
यदि O वृत्त के अंदर कोई बिंदु है, तो:

CD = 2b, AB = 2a, EO = c



$r = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2}$

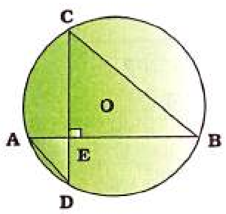
दी गई आकृति में, AE, ∠BAC का कोण समद्विभाजक है, तो:



$AB \times AC + AE \times DE = AE^2$

Ex. एक वृत्त की दो जीवाएँ AB और CD एक दूसरे को E पर काटती हैं और एक दूसरे के लंबवत हैं। खंड AE, EB और ED की लंबाई क्रमशः 2 सेमी, 6 सेमी और 3 सेमी है। वृत्त के व्यास की लंबाई (सेमी में) क्या है?

HINTS



$\because AE \times BE = CE \times ED$

$\Rightarrow 2 \times 6 = CE \times 3$

$\Rightarrow CE = 4$ सेमी

$AD = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$

$BC = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52}$

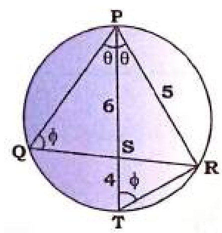
$r = \dfrac{\sqrt{BC^2 + AD^2}}{2}$

$= \dfrac{\sqrt{52 + 13}}{2} = \dfrac{\sqrt{65}}{2}$

$\therefore$ व्यास $= 2r = 2 \times \dfrac{\sqrt{65}}{2} = \sqrt{65}$ सेमी

Ex. एक वृत्त के अंदर एक त्रिभुज ΔPQR बना हुआ है। ∠P का समद्विभाजक QR को S पर और वृत्त को T पर काटता है। यदि PR = 5 सेमी, PS = 6 सेमी और ST = 4 सेमी है, तो PQ की लंबाई क्या है?

HINTS



$PT^2 = PQ \times PR + PT \times ST$

$\Rightarrow 10^2 = PQ \times 5 + 10 \times 4$

$\Rightarrow 100 = 5PQ + 40 \Rightarrow 5PQ = 60$

$\Rightarrow PQ = 12$ सेमी

वैकल्पिक विधि

ΔPQS और ΔPTR में:

∠QPS = ∠TPR ($\because$ PT कोण का समद्विभाजक है)

∠PQR = ∠PTR (समान जीवा PR द्वारा निर्मित कोण)

$\therefore \Delta PQS \sim \Delta PTR$

$\Rightarrow \dfrac{PS}{PR} = \dfrac{PQ}{PT} \Rightarrow \dfrac{6}{5} = \dfrac{PQ}{10}$

$\Rightarrow PQ = 12$ सेमी

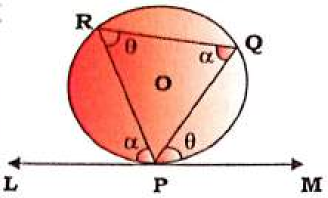
@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

एकांतर खंड प्रमेय

☞ यदि किसी स्पर्श रेखा के स्पर्श बिंदु से एक जीवा खींची जाती है, तो वह जीवा स्पर्श रेखा के साथ जो कोण बनाती है, वह कोण उस जीवा द्वारा वृत्त के एकांतर खंड में बनाए गए कोण के बराबर होता है।



यदि $\angle MPQ = \theta$, है, तो

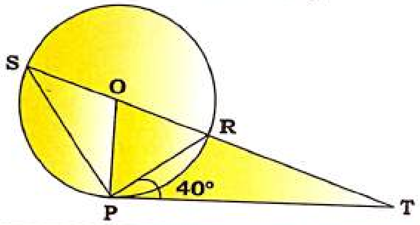
$\angle PRQ = \theta$ होगा।

और यदि $\angle LPR = \alpha$, है, तो $\angle PQR = \alpha$ होगा।

उपर्युक्त गुण का विलोम भी सत्य है। यदि एक वृत्त की जीवा के अंतिम बिंदु से एक रेखा इस प्रकार खींची जाती है कि जीवा के साथ बना कोण, एकांतर खंड में जीवा द्वारा बनाए गए कोण के बराबर हो, तो वह रेखा वृत्त की एक स्पर्श रेखा होगी।

जब भी आप किसी प्रश्न में 'जीवा' और 'स्पर्श रेखा' शब्दों को एक साथ देखें और आपको कोण ज्ञात करना हो, तो आपको एकांतर खंड प्रमेय की प्रयोज्यता की जाँच अवश्य करनी चाहिए।

Ex. दी गई आकृति में, O वृत्त का केंद्र है और PT, P पर एक स्पर्श रेखा है। यदि $\angle RPT = 40°$ है, तो $\angle RTP$ का माप क्या है?



HINTS

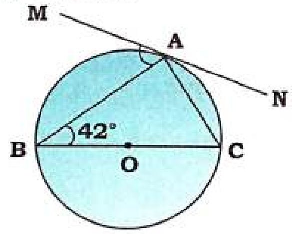
$\angle TPR = \angle PSR = 40°$ (एकांतर खंड प्रमेय)

$\angle SPR = 90°$ (वृत्त की परिधि पर व्यास द्वारा बनाया गया कोण हमेशा एक समकोण (90°) होता है।)

$\angle SPT = 90° + 40° = 130°$

$\therefore \angle RTP = 180° - (130° + 40°) = 10°$

Ex. दी गई आकृति में, MN केंद्र O वाले एक वृत्त पर बिंदु A पर एक स्पर्श रेखा है। यदि BC वृत्त का व्यास है और $\angle ABC = 42°$ है, तो $\angle MAB$ का माप क्या है?



HINTS

$\angle BAC = 90°$ (वृत्त की परिधि पर व्यास द्वारा बनाया गया कोण।)

ΔABC में:

$\angle ABC + \angle BAC + \angle BCA = 180°$

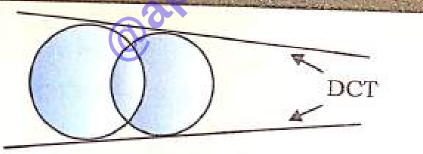
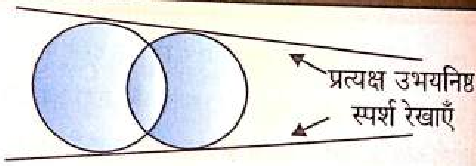
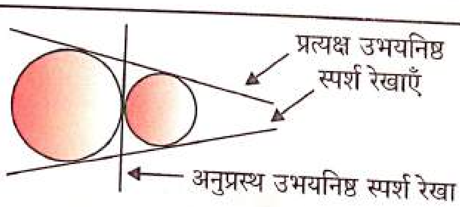
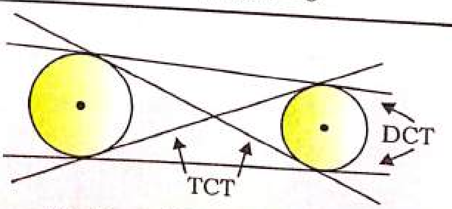
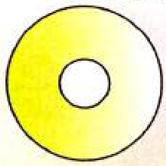
$\Rightarrow 42° + 90° + \angle BCA = 180°$

$\Rightarrow \angle BCA = 48°$

$\Rightarrow \angle BCA = \angle BAM = 48°$ (एकांतर खंड प्रमेय)

@apna_channels

अधिकतम और न्यूनतम संभावित उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाएँ

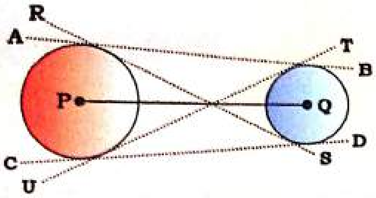
वृत्त	अधिकतम उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाएँ	न्यूनतम उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाएँ
एक दूसरे को प्रतिच्छेद करना	 उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं की संख्या = 2	 उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं की संख्या = 2
एक दूसरे को स्पर्श करना	 जब दो वृत्त बाहरी रूप से स्पर्श करते हैं, तो उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं की संख्या = 3	जब दो वृत्त आंतरिक रूप से स्पर्श करते हैं, तो उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं की संख्या = 1 होती है।
न तो स्पर्श करते हैं और न ही प्रतिच्छेद करते हैं	 उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं की संख्या = 4	 उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं की संख्या = 0

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा की लम्बाई

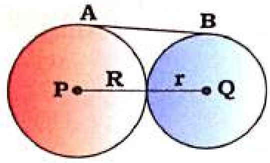
जब 'R' और 'r' त्रिज्या वाले, क्रमशः 'P' और 'Q' केंद्रों के दो वृत्त इस प्रकार अलग होते हैं कि उनके केंद्रों के बीच की दूरी 'd' है, तो:



- प्रत्यक्ष उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा (DCT) AB और CD की लंबाई = $\sqrt{d^2-(R-r)^2}$
- अनुप्रस्थ उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा (TCT) RS और TU की लंबाई = $\sqrt{d^2-(R+r)^2}$

प्रत्यक्ष उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा की विशेष स्थितियां

जब 'R' और 'r' त्रिज्या वाले दो वृत्त एक दूसरे को बाहर से स्पर्श करते हैं, तो:

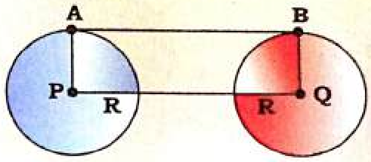


केंद्रों के बीच की दूरी = R + r

प्रत्यक्ष उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा की लंबाई।

$= \sqrt{(R+r)^2-(R-r)^2} = 2\sqrt{Rr}$

यदि वृत्तों की त्रिज्या समान हो।



$DCT = \sqrt{(PQ)^2-(R-R)}$

$\Rightarrow AB = \sqrt{(PQ)^2}$ $\Rightarrow AB = PQ$ अर्थात् प्रत्यक्ष उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा की लंबाई वृत्तों के केंद्रों के बीच की दूरी के बराबर है।

प्रत्यक्ष उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा की लंबाई अनुप्रस्थ उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा की लंबाई से अधिक होती है।

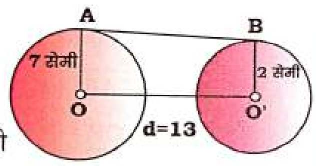
Ex. दो वृत्तों की त्रिज्याएँ 7 सेमी और 2 सेमी हैं। उनके केंद्रों के बीच की दूरी 13 सेमी है। वृत्तों की प्रत्यक्ष उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा की संपर्क बिंदुओं के बीच की लंबाई क्या है?

HINTS AB = DCT

$DCT = \sqrt{d^2-(r_1-r_2)^2}$

$= \sqrt{169-(7-2)^2}$

$= \sqrt{169-25} = \sqrt{144} = 12$ सेमी

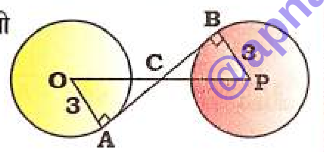


Ex. दो समान वृत्तों के केंद्रों के बीच की दूरी 10 सेमी है, जिनमें से प्रत्येक की त्रिज्या 3 सेमी है। अनुप्रस्थ उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा की लंबाई क्या है?

HINTS d = 10 सेमी, r = R = 3 सेमी

$TCT = \sqrt{d^2-(R+r)^2}$

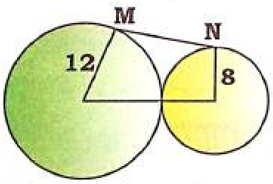
$= \sqrt{100-36} = \sqrt{64} = 8$ सेमी



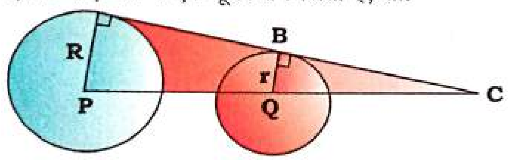
Ex. दो वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः 12 सेमी और 8 सेमी हैं, जो एक दूसरे को बाहर से स्पर्श करते हैं। इन वृत्तों पर एक उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा खींची गई है जो वृत्तों को क्रमशः M और N पर स्पर्श करती है। MN की लंबाई क्या है?

HINTS MN = $2\sqrt{Rr}$ सेमी

$= 2\sqrt{12\times8} = 8\sqrt{6}$ सेमी



☞ यदि सीधी उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा और वृत्तों के केंद्रों को जोड़ने वाली रेखा को आगे बढ़ाया जाए और वे एक दूसरे से मिलती हैं, तो:

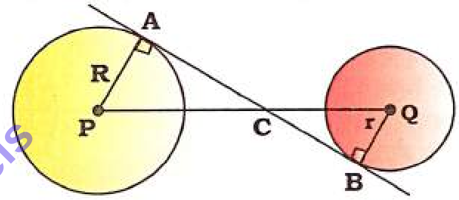


C, PQ को दोनों वृत्तों की त्रिज्याओं के अनुपात में बाहरी रूप से विभाजित करता है।

$\frac{CP}{CQ} = \frac{R}{r}$ (समरूपता द्वारा)

$CP = \left(\frac{R}{R-r}\right)\times PQ$ और $CQ = \left(\frac{r}{R-r}\right)\times PQ$

☞ यदि अनुप्रस्थ उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा (TCT) और केंद्रों को मिलाने वाली रेखा बिंदु C पर मिलती हैं, तो:



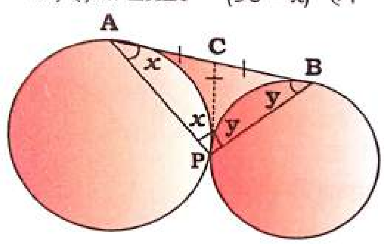
C, PQ को दोनों वृत्तों की त्रिज्याओं के अनुपात में विभाजित करता है, अर्थात:

$\frac{CP}{CQ} = \frac{R}{r}$ (समरूपता द्वारा)

$CP = \frac{R}{R+r}\times PQ$ और $CQ = \frac{r}{R+r}\times PQ$

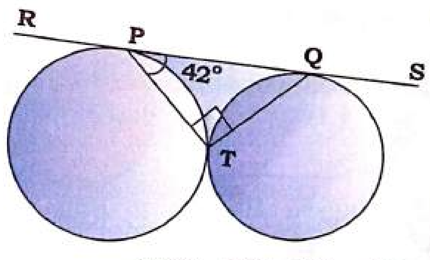
☞ यदि दो वृत्त एक दूसरे को बाहर से P पर स्पर्श करते हैं और AB वृत्तों की प्रत्यक्ष उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा है, तो ∠APB हमेशा समकोण होता है।

यदि ∠BAP = $x°$, है, तो ∠ABP = $(90-x)°$ है।



Ex. दो वृत्त एक दूसरे को बाहर से T पर स्पर्श करते हैं। RS एक प्रत्यक्ष उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा है जो वृत्तों को क्रमशः P और Q पर स्पर्श करती है। यदि ∠TPQ = 42° है, तो ∠PQT का माप क्या है?

HINTS

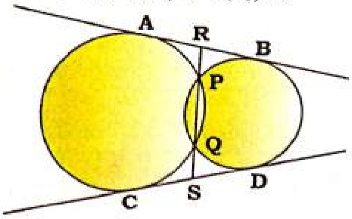


∠PQT = 90° − 42° = 48°

@apna_channels
Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

☞ यदि दो वृत्त दो अलग-अलग बिंदुओं पर एक-दूसरे को काटते हैं और दो उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाएँ दी गई हैं, तो:



$RS^2 = AB^2 + PQ^2$

Ex. PQ और RS दो वृत्तों की उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाएँ हैं जो A और B पर प्रतिच्छेद करती हैं। A और B, जब दोनों तरफ बढ़ाए जाते हैं, तो स्पर्श रेखाओं PQ और RS को क्रमशः X और Y पर मिलते हैं। यदि AB = 3 सेमी और XY = 5 सेमी है, तो PQ का माप क्या है?

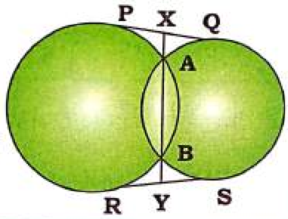
HINTS दिया गया है,

AB = 3 सेमी, XY = 5 सेमी

हम जानते हैं कि,

$PQ^2 = XY^2 - AB^2 \Rightarrow PQ = \sqrt{25-9}$

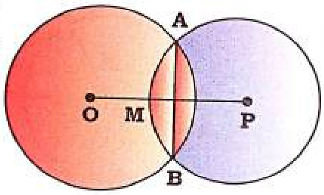
= 4 सेमी



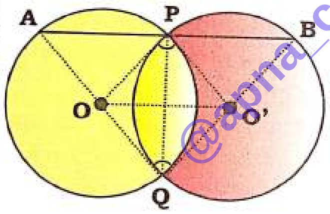
उभयनिष्ठ जीवा

☞ यदि दो वृत्त एक दूसरे को दो बिंदुओं पर काटते हैं, तो उनके केंद्रों को मिलाने वाली रेखा उनकी उभयनिष्ठ जीवा का लंब समद्विभाजक होती है।

दी गई आकृति में, उनके केंद्रों को मिलाने वाली रेखा, यानी OP, उभयनिष्ठ जीवा AB का लंब समद्विभाजक है।



(i) यदि दो समान वृत्त P और Q पर प्रतिच्छेद करते हैं और P से होकर जाने वाली एक सीधी रेखा वृत्तों को क्रमशः A और B पर मिलती है, तो QA = QB होगा।



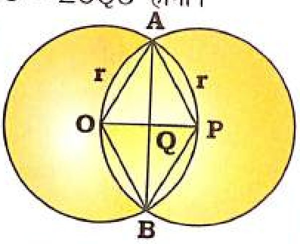
(ii) यदि O और O' केंद्रों वाले दो वृत्त P और Q पर प्रतिच्छेद करते हैं, तो ∠OPO' = ∠OQO' होगा।

☞ जब दोनों वृत्तों की त्रिज्याएँ बराबर हों और दोनों वृत्त एक-दूसरे के केंद्रों से होकर गुजरते हों, तो:

ΔOPA एक समबाहु त्रिभुज है।

$OP = r, \quad AB = \sqrt{3}r$

∴ OBPA एक समचतुर्भुज है।



O, P = वृत्तों के केंद्र

Ex. 4 सेमी त्रिज्या वाले दो समान वृत्त एक-दूसरे को इस प्रकार काटते हैं कि प्रत्येक वृत्त दूसरे के केंद्र से होकर गुजरता है। उभयनिष्ठ जीवा की लंबाई क्या है?

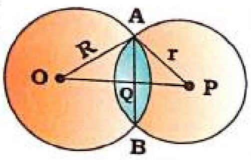
HINTS उभयनिष्ठ जीवा की लम्बाई $AB = \sqrt{3}\,r = 4\sqrt{3}$ सेमी

☞ 'R' और 'r' त्रिज्या वाले दो वृत्त एक दूसरे को काटते हैं और AB उनकी उभयनिष्ठ जीवा है, तो:

$AQ = BQ = \dfrac{AB}{2}$

$OP = \sqrt{R^2 - \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2} + \sqrt{r^2 - \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2}$

∠AQO = ∠AQP = 90°



O, P = वृत्तों के केंद्र

Ex. दो प्रतिच्छेदी वृत्तों की उभयनिष्ठ जीवा (AB) की लंबाई 24 सेमी है। यदि वृत्तों का व्यास क्रमशः 30 सेमी और 26 सेमी है, तो उनके केंद्रों के बीच की दूरी क्या है?

HINTS

$AQ = \dfrac{24}{2} = 12$ सेमी

$OQ = \sqrt{225-144} = \sqrt{81} = 9$ सेमी

$PQ = \sqrt{169-144} = \sqrt{25} = 5$ सेमी

OP = 9 + 5 = 14 सेमी

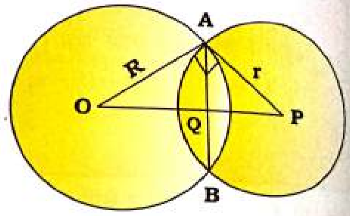
(c) जब ∠OAP = 90° हो, यानी एक वृत्त की बिंदु A या B पर स्पर्श रेखा दूसरे वृत्त के केंद्र से होकर गुजरती है, तो:

☞ $OP = \sqrt{R^2 + r^2}$

☞ $OQ = \dfrac{R^2}{\sqrt{R^2 + r^2}}$

☞ $QP = \dfrac{r^2}{\sqrt{R^2 + r^2}}$

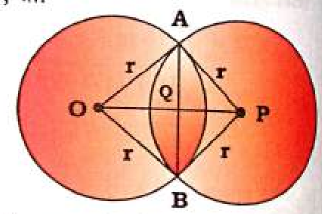
☞ $AB = \dfrac{2Rr}{\sqrt{R^2 + r^2}}$



(d) जब दोनों वृत्तों की त्रिज्याएँ बराबर हों, तो:

☞ $OP = \sqrt{4r^2 - AB^2}$

☞ $OQ = PQ = \dfrac{OP}{2}$



@apna_channels

Ex. दो समान वृत्त, जिनके केंद्र O और P हैं, एक दूसरे को A और B बिंदुओं पर काटते हैं। OP = 12 सेमी और AB = 16 सेमी है, तो वृत्त की त्रिज्या क्या है?

HINTS $OP = \sqrt{4r^2 - AB^2}$

$\Rightarrow 12^2 = 4r^2 - 16^2 \Rightarrow 144 + 256 = 4r^2$

$\Rightarrow 4r^2 = 400 \Rightarrow r = 10$ सेमी

Ex. दो वृत्त A और B पर प्रतिच्छेद करते हैं। पहले वृत्त पर A पर स्पर्श रेखा दूसरे वृत्त के केंद्र से होकर जाती है (∠OAP = 90°)। यदि केंद्रों के बीच की दूरी OP = 25 सेमी और जीवा AB = 24 सेमी है, तो वृत्तों की त्रिज्याएँ ज्ञात कीजिए।

HINTS $(R + r)^2 = 625 + 600 = 1225$

$\Rightarrow (R + r)^2 = 1225$

$\Rightarrow (R + r) = 35$ ...(i)

$(R - r)^2 = 625 - 600 = 25$

$\Rightarrow (R - r)^2 = 25$

$\Rightarrow (R - r) = 5$ ...(ii)

समीकरण (i) और (ii) से

$R = \dfrac{35+5}{2} = 20$ सेमी

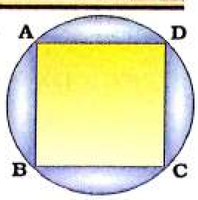
$r = \dfrac{35-5}{2} = 15$ सेमी

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

चक्रीय चतुर्भुज

यदि एक चतुर्भुज के चारों शीर्ष एक वृत्त की परिधि पर स्थित हों, तो उस चतुर्भुज को **चक्रीय चतुर्भुज** कहते हैं।



चक्रीय चतुर्भुज के गुणधर्म

यदि ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है, तो:

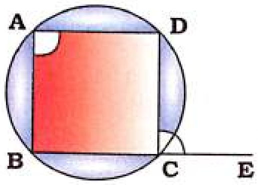
☞ विपरीत कोणों का योग 180° होता है।

$\angle A + \angle C = 180^\circ$

$\angle B + \angle D = 180^\circ$

☞ एक शीर्ष पर बना बाह्य कोण, सम्मुख विपरीत कोण के बराबर होता है।

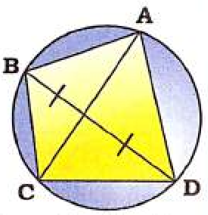
यदि BC को E तक बढ़ाया जाए, तो $\angle DCE = \angle A$ होगा।



Ex. यदि एक चक्रीय चतुर्भुज का बाह्य कोण 50° है, तो उसका सम्मुख आंतरिक कोण क्या है?

HINTS $\angle A = \angle DCE = 50^\circ$

☞ यदि एक चक्रीय चतुर्भुज का एक विकर्ण दूसरे विकर्ण को समद्विभाजित करता है, तो:



$$AB \times BC = CD \times AD$$

Ex. एक चक्रीय चतुर्भुज ABCD में, विकर्ण AC, विकर्ण BD को समद्विभाजित करता है। यदि AB = 16.5 सेमी, CD = 19.8 सेमी और AD = 11 सेमी है, तो BC का मान ज्ञात करें।

HINTS $AB \times BC = AD \times DC$

$\Rightarrow 16.5 \times BC = 11 \times 19.8$

$\Rightarrow BC = \frac{198}{15} = 13.2$ सेमी

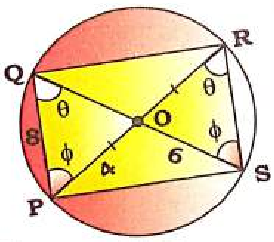
Ex. एक चक्रीय चतुर्भुज PQRS में, विकर्ण QS, विकर्ण PR को बिंदु O पर समद्विभाजित करता है। यदि PQ = 8 सेमी, PO = 4 सेमी और OS = 6 सेमी है, तो RS का मान क्या है?

HINTS OP = OR = 4 सेमी

$\Delta QOP \sim \Delta ROS$ (AAA समरूपता से)

$\frac{OP}{OS} = \frac{QP}{RS} \Rightarrow \frac{4}{6} = \frac{8}{RS}$

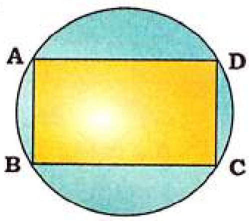
$\Rightarrow RS = 12$ सेमी



☞ यदि एक चक्रीय चतुर्भुज ABCD एक समानांतर चतुर्भुज है, तो वह निश्चित रूप से एक आयत होगा।

$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$,

AB = CD और BC = AD



Ex. यदि ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है जिसमें $\angle A = 4x^\circ$, $\angle B = 7x^\circ$, $\angle C = 5y^\circ$, $\angle D = y^\circ$, है, तो $x : y$ का मान क्या है?

HINTS $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$

$\Rightarrow 4x + 5y = 7x + y \Rightarrow 3x = 4y \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{4}{3}$

☞ यदि चक्रीय चतुर्भुज ABCD एक समलम्ब चतुर्भुज है, तो ABCD एक समद्विबाहु समलम्ब चतुर्भुज होगा।

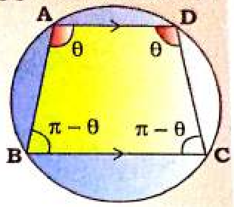
(a) AB = CD

(b) AC = BD (विकर्ण बराबर होते हैं)

(c) If $\angle BAD = \theta$, तो:

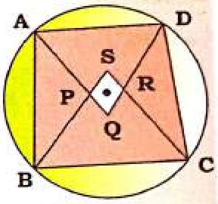
$\angle BAD = \angle ADC = \theta$ और

$\angle ABC = \angle DCB = \pi - \theta$



☞ एक चक्रीय चतुर्भुज के चारों कोणों के समद्विभाजकों से बना चतुर्भुज भी एक चक्रीय चतुर्भुज होता है।

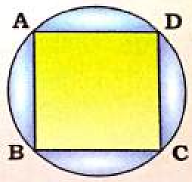
यदि AQ, BS, CS और DQ क्रमशः $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ और $\angle D$ के कोण समद्विभाजक हैं, तो चतुर्भुज PQRS चक्रीय होता है।



☞ **टोलेमी प्रमेय (Ptolemy's Theorem):**

यदि ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है, तो:

$$AB \times DC + BC \times AD = AC \times BD$$



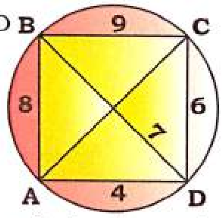
Ex. एक चक्रीय चतुर्भुज ABCD में, AB = 8 सेमी, BC = 9 सेमी, CD = 6 सेमी और DA = 4 सेमी है। यदि विकर्ण BD का मान 7 सेमी है, तो विकर्ण AC का मान क्या है?

HINTS $AC \times BD = AB \times DC + BC \times AD$

$\Rightarrow AC \times 7 = 8 \times 6 + 9 \times 4$

$\Rightarrow 7AC = 48 + 36 \Rightarrow 7AC = 84$

$\Rightarrow AC = 12$ सेमी



☞ यदि एक चक्रीय चतुर्भुज की भुजाएँ a, b, c और d हैं, तो चक्रीय चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$

जहां, $s = \frac{a+b+c+d}{2}$

Ex. उस चक्रीय चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी भुजाएँ 5 सेमी, 2 सेमी, 5 सेमी और 8 सेमी हैं।

HINTS

a = 5 सेमी, b = 2 सेमी, c = 5 सेमी, d = 8 सेमी

$s = \frac{5+2+5+8}{2} = \frac{20}{2} = 10$ सेमी

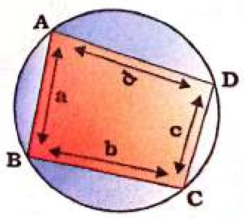
चक्रीय चतुर्भुज का क्षेत्रफल

$= \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} = \sqrt{5 \times 8 \times 5 \times 2}$

$= 5 \times 2 \times 2 = 20$ सेमी²

☞ यदि a, b, c और d एक चक्रीय चतुर्भुज की क्रमिक भुजाएँ हैं और 's' अर्द्ध -परिमाप है, तो त्रिज्या है:

$$R = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}$$



@apna_channels

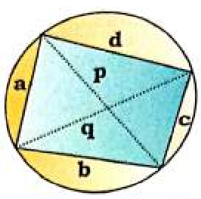
Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

☞ यदि a, b, c और d एक चक्रीय चतुर्भुज की क्रमिक भुजाएँ हैं और p और q विकर्ण हैं, तो:

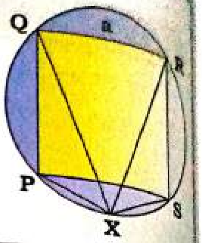
$$p = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}$$

$$q = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}}$$



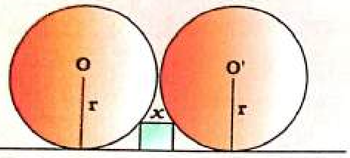
☞ PQRS एक 'a' भुजा वाला चक्रीय वर्ग है और X वृत्त पर एक बिंदु है, तो:

$$PX^2 + QX^2 + RX^2 + SX^2 = 4a^2$$



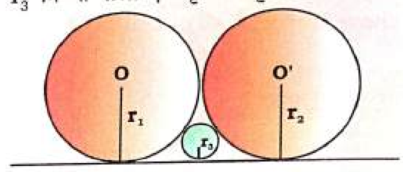
कुछ महत्वपूर्ण परिणाम

- जब 'r' त्रिज्या वाले दो समान वृत्त एक दूसरे को बाहर से स्पर्श कर रहे हों और 'x' भुजा वाला एक वर्ग भी वृत्तों को स्पर्श कर रहा हो जैसा कि चित्र में दिखाया गया है, तो:

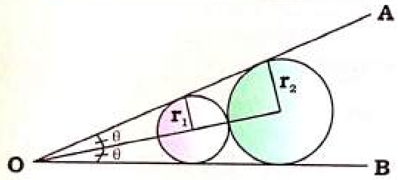


$$x = \frac{2}{5}r$$

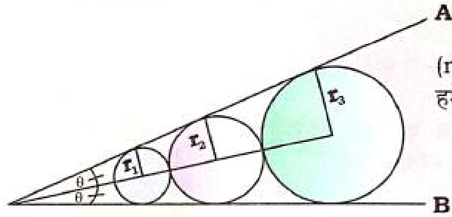
- जब 'r_1' और 'r_2' त्रिज्या वाले दो वृत्त बाहरी रूप से एक दूसरे को स्पर्श कर रहे हों और 'r_3' त्रिज्या वाला एक वृत्त भी वृत्तों को चित्र में दिखाए अनुसार स्पर्श कर रहा हो, तो:



$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$$

- 

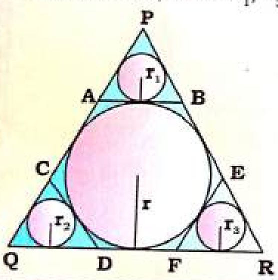
$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}$$

- 

$$r_2 = \sqrt{r_1 \times r_3}$$

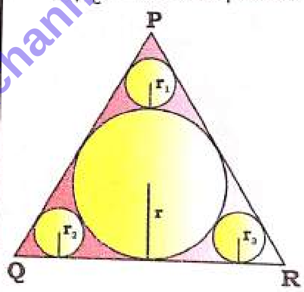
(r_1, r_2, r_3 हमेशा गुणोत्तर श्रेणी में)

- PQR एक त्रिभुज है जिसका अंत:त्रिज्या 'r' है। AB, CD और EF, ΔPQR के अंत:वृत्त की 3 स्पर्श रेखाएँ हैं। ΔPAB, ΔQCD और ΔREF की अंत:त्रिज्याएँ क्रमशः r_1, r_2 और r_3 हैं, तो:



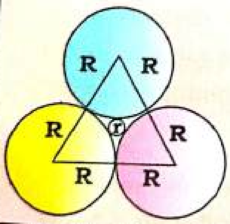
$$r = r_1 + r_2 + r_3$$

- PQR एक त्रिभुज है जिसकी अंत:त्रिज्या 'r' है। आकृति में दिखाए अनुसार खींचे गए वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः r_1, r_2 और r_3 हैं, तो:



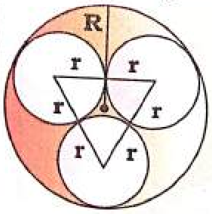
$$r = \sqrt{r_1r_2} + \sqrt{r_2r_3} + \sqrt{r_3r_1}$$

- 'R' त्रिज्या वाले 3 वृत्त एक दूसरे को स्पर्श कर रहे हैं। एक छोटा वृत्त भी मौजूद है जो इन सभी वृत्तों को स्पर्श कर रहा है। सबसे छोटे वृत्त की त्रिज्या 'r' है:

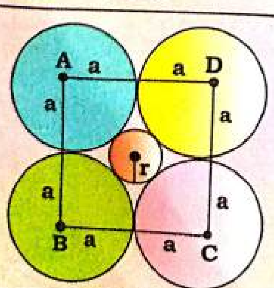


$$r = R\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1\right)$$

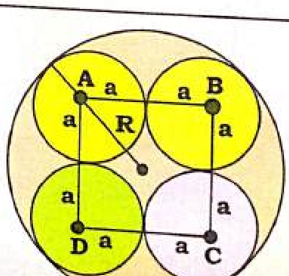
- 'r' त्रिज्या वाले 3 वृत्त एक दूसरे को स्पर्श कर रहे हैं। एक बड़ा वृत्त भी मौजूद है जो इन सभी वृत्तों को स्पर्श कर रहा है। सबसे बड़े वृत्त की त्रिज्या 'R' है:



$$R = r\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} + 1\right)$$

- 

$$r = (\sqrt{2} - 1)a$$

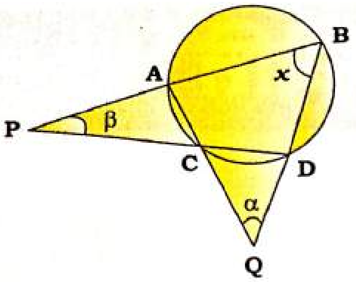
- 

$$R = (\sqrt{2} + 1)a$$

@apna_channels
Join Telegram: @apna_rwa

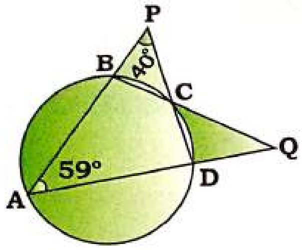
Join Telegram: @yct_publication

☞



$x = 90° - \frac{\alpha + \beta}{2}$

Ex. दी गई आकृति में, यदि ∠PAQ = 59°, और ∠APD = 40° है, तो ∠AQB का मान क्या है?



HINTS

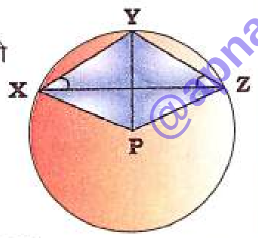
$\angle PAD = 90° - \left(\frac{\angle APD + \angle BQA}{2}\right)$

$\Rightarrow 59° = 90° - \left(\frac{40° + \angle AQB}{2}\right)$

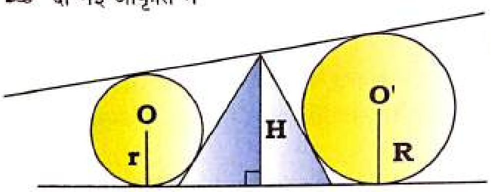
$\Rightarrow 31° = \frac{40° + \angle AQB}{2}$

$\Rightarrow \angle AQB = 62° - 40° = 22°$

☞ दी गई आकृति में, यदि P वृत्त का केंद्र है, तो ∠XPZ = 2 (∠XZY + ∠YXZ) है।



☞ दी गई आकृति में

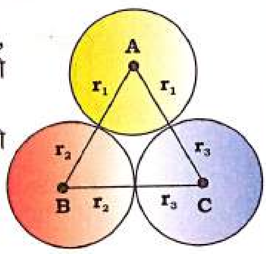


r + R = H

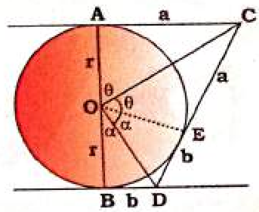
☞ तीन वृत्त जिनके केंद्र क्रमशः A, B और C हैं, इस प्रकार खींचे गए हैं कि वे एक दूसरे को वाहरी रूप से स्पर्श करते हैं।

यदि ΔABC की भुजाएँ x, y और z हैं, तो वृत्तों की त्रिज्याओं का योग है:

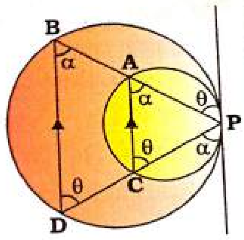
$(r_1 + r_2 + r_3) = \frac{x + y + z}{2}$



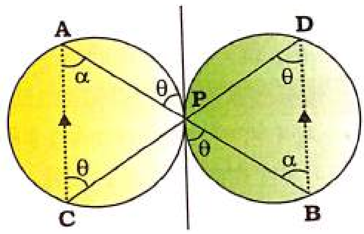
☞ "जब एक वृत्त दो समानांतर रेखाओं के बीच खींचा जाता है और वृत्त पर एक स्पर्श रेखा इन दो समानांतर रेखाओं को काटती है,तो: $r = \sqrt{ab}$



☞ जब दो वृत्त एक-दूसरे को आंतरिक रूप से स्पर्श करते हैं और एक उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा दी गई है, तो: $\frac{PA}{PB} = \frac{PC}{PD}$

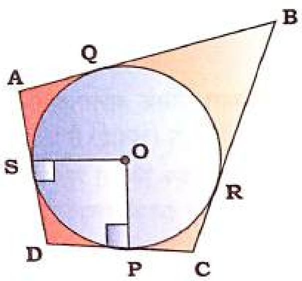


☞ जब दो वृत्त एक-दूसरे को बाहरी रूप से स्पर्श करते हैं और एक उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा दी गई है, तो: $\frac{PA}{PB} = \frac{PC}{PD}$



Ex. दी गई आकृति में, एक चतुर्भुज ABCD के अंदर एक वृत्त अंकित है। दिया गया है कि BC = 38 सेमी, QB = 27 सेमी, DC = 25 सेमी और AD, DC के लंबवत है। वृत्त की त्रिज्या क्या है?

@apna_channels



HINTS

BC = 38 सेमी, QB = 27 सेमी

DC = 25 सेमी

BQ = BR = 27 सेमी (बाहरी बिंदु से खींची गई स्पर्श रेखाएँ बराबर होती हैं)

CR = 38 – 27 = 11 सेमी

CR = CP = 11 सेमी

DP = 25 – 11 = 14 सेमी

∵ DPOS एक वर्ग है

∴ r = OS = DP = 14 सेमी

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

अध्याय 02

द्विविमीय क्षेत्रमिति

परिचय

क्षेत्रमिति शब्द का शाब्दिक अर्थ है 'मापना'। यह गणित की एक शाखा है जो विभिन्न ज्यामितीय आकृतियों के परिमाप, क्षेत्रफल और आयतन के मापन से संबंधित है।

मापन को निम्नलिखित भागों में विभाजित किया गया है।

(i) शून्य - आयामी आकृति

(ii) एक - आयामी आकृति

(iii) दो - आयामी आकृति

(iv) त्रि - आयामी आकृति

शून्य - आयामी आकृति

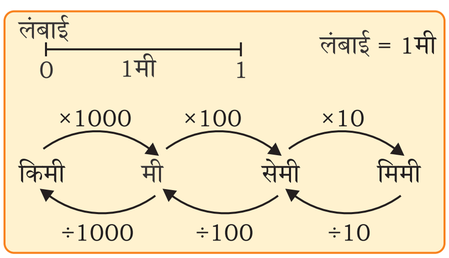
- शून्य आयामी आकृति एक बिंदु है जिसका
  - कोई लंबाई नहीं, कोई चौड़ाई नहीं, कोई ऊंचाई नहीं।
- दूसरे शब्दों में, एक बिंदु एक आयामहीन वस्तु है जो स्थान में एक सटीक स्थान को दर्शाता है।

एक-आयामी क्षेत्रमिति (1D)

इसमें उन आकृतियों का मापन शामिल है जिनका केवल एक आयाम है, जो कि लंबाई है।

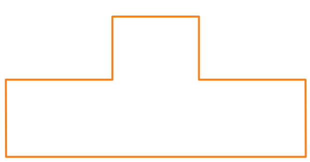
- **रेखा:** दोनों दिशाओं में अनंत तक फैली एक सीधी रास्ता है इसका माप इसकी लंबाई है।
- **रेखाखंड:** रेखा का वह भाग जिसके अलग-अलग अंत बिंदु होते हैं। इसका माप अंत बिंदुओं के बीच की दूरी (लंबाई) है।
- **किरण:** रेखा का वह भाग जो एक बिंदु से शुरू होकर एक दिशा में अनंत तक विस्तारित होता है। इसका माप इसकी लंबाई है।

☞ **एक आयाम**



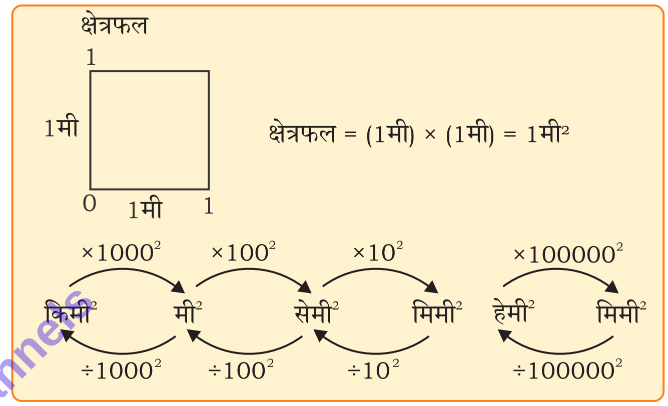
द्विविमीय क्षेत्रमिति (2D)

- इसमें समतल आकृतियों का मापन शामिल है, जिनके दो आयाम हैं - लंबाई और चौड़ाई (चौड़ाई)। ये आकृतियाँ समतल में स्थित होती हैं। द्विविमीय क्षेत्रमिति में मुख्य मापन में शामिल हैं।
- द्वि-आयामी मापन में हम द्वि-आयामी आकृतियों (समतल आकृतियों) का अध्ययन करेंगे, जैसे त्रिभुज, चतुर्भुज, बहुभुज, वृत्त आदि।
- **परिधि:** परिधि को किसी आकृति को घेरने वाले पथ या सीमा के रूप में परिभाषित किया जा सकता है। इसे किसी आकृति की प्रारूप की लंबाई के रूप में भी परिभाषित किया जा सकता है।



- **क्षेत्रफल:** क्षेत्रफल को किसी सपाट आकृति या किसी वस्तु की सतह द्वारा घेरे गए स्थान के रूप में परिभाषित किया जा सकता है। किसी आकृति का क्षेत्रफल इकाई वर्गों की संख्या है जो किसी बंद आकृति की सतह को घेरता हैं। क्षेत्रफल को वर्ग इकाइयों जैसे वर्ग सेंटीमीटर, वर्ग मीटर आदि में मापा जाता है।

☞ **दो आयाम**



- यदि 2D आकृति की प्रत्येक संगत लंबाई को k से गुणा किया जाए तो नया परिमाप P' होगा।

  $P' = k \times P$

- यदि 2D आकृति की प्रत्येक संगत लंबाई को k से गुणा किया जाए तो नया क्षेत्र A' होगा।

  $A' = k \times$ लंबाई $\times k \times$ चौड़ाई

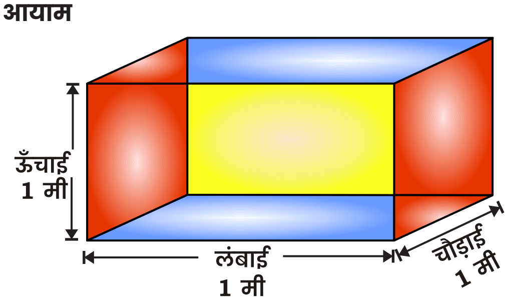
  $\Rightarrow A' = k^2$ (लंबाई $\times$ चौड़ाई)

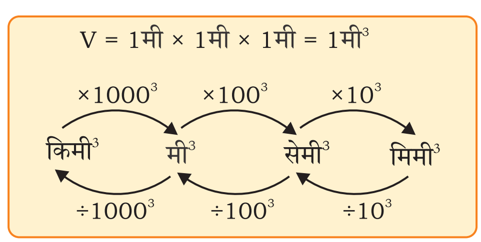
  $\Rightarrow A' = k^2 \times A$

त्रिविमीय क्षेत्रमिति (3D)

त्रिविमीय क्षेत्रमिति में हम घन, घनाभ, बेलन, शंकु, छिन्नक, गोला, अर्धगोला, प्रिज्म, पिरामिड आदि त्रिविमीय क्षेत्रमिति आकृतियों का अध्ययन करेंगे।

☞ **तीन आयाम**





@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram @yct_publication

द्रव्यमान के लिए इकाई रूपांतरण

- 1 किलोग्राम = 1000 ग्राम = 10^3
- 1 हेक्टोग्राम = 100 ग्राम = 10^2
- 1 डेकाग्राम = 10 ग्राम = 10^1
- 1 डेसीग्राम = 0.1 ग्राम = 10^{-1}
- 1 सेंटीग्राम = 0.01 ग्राम = 10^{-2}
- 1 मिलीग्राम = 0.001 ग्राम = 10^{-3}

लंबाई के लिए इकाई रूपांतरण

- 1 मिलीमीटर = 0.001 मीटर
- 1 सेंटीमीटर = 0.01 मीटर
- 1 डेसीमीटर = 0.1 मीटर
- 1 हेक्टोमीटर = 100 मीटर
- 1 किलोमीटर = 1000 मीटर
- 1 इंच = 2.54×10^{-2} मीटर
- 5 मील = 8 किमी
- 1 फीट = 0.3048 मीटर

क्षेत्रमिति के लिए कुछ महत्वपूर्ण रूपांतरण

क्षेत्रफल के लिए इकाइयों का रूपांतरण

- 1 वर्ग मील = 2.5899×10^6 वर्ग मीटर
- 1 हेक्टेयर = 1×10^4 वर्ग मीटर
- 1 एकड़ = 4.0468×10^3 वर्ग मीटर
- 1 वर्ग फुट = 9.92903×10^{-2} वर्ग मीटर
- 1 वर्ग इंच = 6.4516×10^{-4} वर्ग मीटर

कुछ अन्य इकाई रूपांतरण

- 1 पाउंड = 16 औंस
- 1 टन = 2000 पाउंड

द्रव्यमान, घनत्व और आयतन के बीच संबंध

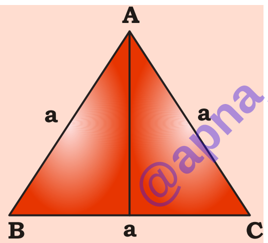
द्रव्यमान = घनत्व $\times$ आयतन

घनत्व = $\dfrac{\text{द्रव्यमान}}{\text{आयतन}}$

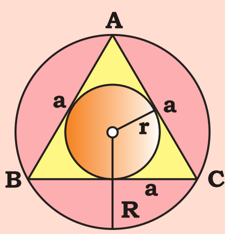
त्रिभुज

समबाहु त्रिभुज

समबाहु त्रिभुज वह त्रिभुज है जिसमें तीन भुजाएँ बराबर लंबाई की होती हैं तथा सभी आंतरिक कोण 60° होते है।



- परिमाप = 3a
- अर्द्ध परिमाप (s) = $\dfrac{3a}{2}$
- ऊंचाई (h) = $\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$
- क्षेत्रफल = $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \dfrac{h^2}{\sqrt{3}}$
- अंत: त्रिज्या (r) = $\dfrac{a}{2\sqrt{3}} = \dfrac{h}{3}$
- अंत: वृत्त का क्षेत्रफल = $\dfrac{\pi a^2}{12}$
- परि-त्रिज्या (R) = $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$
- परिवृत्त का क्षेत्रफल = $\dfrac{\pi a^2}{3}$
- $\dfrac{\text{अंत:वृत्त की त्रिज्या (r)}}{\text{परिवृत्त की त्रिज्या (R)}} = \dfrac{1}{2}$
- $\dfrac{\text{अंत:वृत्त का क्षेत्रफल}}{\text{परिवृत्त का क्षेत्रफल}} = \dfrac{1}{4}$
- r : a : R का अनुपात = 1 : $2\sqrt{3}$: 2



भुजा	ऊंचाई	क्षेत्रफल
2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
↓×k	↓×k	↓×k²
2k	$\sqrt{3}$k	$\sqrt{3}k^2$
↓	↓	↓
(2 × 3 = 6)	($\sqrt{3}$ × 3 = $3\sqrt{3}$)	($\sqrt{3} \times 3^2 = 9\sqrt{3}$)

Ex. एक समबाहु त्रिभुज की प्रत्येक भुजा की लंबाई 22 सेमी है। इस त्रिभुज का क्षेत्रफल (सेमी में²) ज्ञात कीजिए।

HINTS समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times 22 \times 22 = 121\sqrt{3}$ सेमी²

वैकल्पिक विधि

भुजा	क्षेत्रफल
2	$\sqrt{3}$
↓×11	↓×11²
22	$121\sqrt{3}$

Ex. एक समबाहु त्रिभुज की ऊँचाई $3\sqrt{3}$ सेमी है। इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

HINTS समबाहु Δ की ऊँचाई = $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a \Rightarrow 3\sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$

$\Rightarrow a = 6$

∴ समबाहु Δ का क्षेत्रफल = $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times 36 = 9\sqrt{3}$ सेमी²

वैकल्पिक विधि

∴ समबाहु Δ का क्षेत्रफल = $\dfrac{h^2}{\sqrt{3}} = \dfrac{(3\sqrt{3})^2}{\sqrt{3}} = \dfrac{27}{\sqrt{3}} = 9\sqrt{3}$ सेमी²

Ex. एक समबाहु त्रिभुज की ऊंचाई $12\sqrt{5}$ सेमी है, तो परिवृत्त और अन्त:वृत्त के क्षेत्रफलों के बीच अंतर ज्ञात कीजिए?

HINTS समबाहु त्रिभुज की ऊँचाई = $\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2}a = 12\sqrt{5} \Rightarrow a = \dfrac{24\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$

परिवृत्त और अन्त:वृत्त के क्षेत्रफल में अंतर

$= \pi a^2\left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{12}\right) = \pi \times \dfrac{576 \times 5}{3} \times \dfrac{1}{4} = 240\pi$ सेमी²

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram @yct_publication

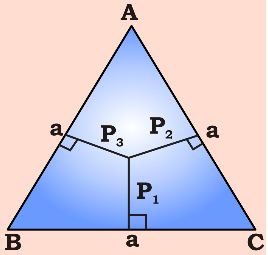
☞ यदि P_1, P_2 तथा P_3 एक समबाहु त्रिभुज के अन्दर स्थित एक बिंदु से उसकी भुजाओं पर खींचे गए लंबों की लंबाइयाँ हैं, तो

(a) $P_1 + P_2 + P_3 = \frac{\sqrt{3}a}{2} = h$ (ऊँचाई),

$a = \frac{2}{\sqrt{3}}(P_1 + P_2 + P_3)$

(b) समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल

$= \frac{(P_1 + P_2 + P_3)^2}{\sqrt{3}}$



Ex. 'P' एक समबाहु त्रिभुज के अंदर स्थित बिंदु है और यदि 'P' से त्रिभुज की प्रत्येक भुजा पर खींचे गए लंबों की लंबाई 2 सेमी, 3 सेमी और 4 सेमी है। समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

HINTS समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{(P_1 + P_2 + P_3)^2}{\sqrt{3}}$

$= \frac{(9)^2}{\sqrt{3}} = 27\sqrt{3}$ सेमी²

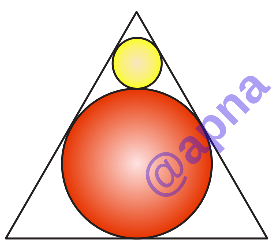
☞ यदि किसी समबाहु त्रिभुज की प्रत्येक भुजा की लंबाई में x की वृद्धि की जाए तो क्षेत्रफल में y की वृद्धि हो जाती है

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{4}(a + x)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + y$

जहाँ $y = x^2 + 2ax$

☞ एक समबाहु त्रिभुज में, अलग-अलग त्रिज्याओं वाले दो वृत्त त्रिभुज के अंदर रखे जाते हैं, तो

$\frac{\text{छोटे वृत्त की त्रिज्या}}{\text{बड़े वृत्त की त्रिज्या}} = \frac{1}{3}$



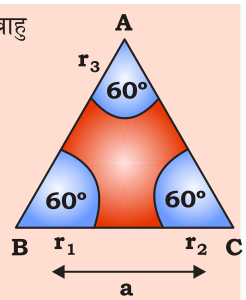
☞ यदि 3 गायों को 'a' सेमी भुजा वाले एक समबाहु त्रिभुजाकार खेत के प्रत्येक कोने पर r_1, r_2 और r_3 सेमी लंबाई की रस्सियों से बाँधा गया है, तो

गायों द्वारा चरे जाने वाले भाग का क्षेत्रफल

$= \frac{\pi}{6}(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)$

गायों द्वारा न चरे जाने वाले भाग का क्षेत्रफल

$= \frac{\sqrt{3}a^2}{4} - \frac{\pi}{6}(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)$



Ex. यदि 3 गायों को एक समबाहु त्रिभुजाकार मैदान के प्रत्येक कोने पर 7 सेमी लम्बी रस्सी से बाँधा गया है, तो गायों द्वारा चरे वाले भाग का कुल क्षेत्रफल ज्ञात करें।

HINTS गायों द्वारा चरे जाने वाला क्षेत्र $= \frac{\pi}{6}(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)$

$= \frac{22}{7 \times 6} \times (7^2 + 7^2 + 7^2) = \frac{22}{42} \times 147$

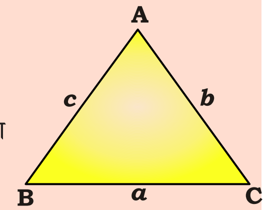
= 77 सेमी²

विषमबाहु त्रिभुज

विषमबाहु त्रिभुज एक त्रिभुज है जिसमें तीन असमान भुजाएँ और तीन असमान कोण होते हैं

- परिमाप = $a + b + c$
- अर्द्ध परिमाप (s) = $\frac{a+b+c}{2}$
- **क्षेत्रफल :** त्रिभुज का क्षेत्रफल Δ चिह्न द्वारा दर्शाया जाता है।

  क्षेत्रफल = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$
- अंत: त्रिज्या (r) = $\frac{\Delta}{s}$
- परि-त्रिज्या (R) = $\frac{abc}{4\Delta}$



Ex. एक त्रिभुज की भुजाओं की लंबाई 5 सेमी, 7 सेमी और 10 सेमी है। त्रिभुज का क्षेत्रफल (सेमी² में) ज्ञात कीजिए।

HINTS

अर्द्ध परिमाप (s) = $\frac{a+b+c}{2} = \frac{5+7+10}{2} = 11$

हीरोन के सूत्र से,

त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{11(11-5)(11-7)(11-10)}$

$= \sqrt{11 \times 6 \times 4 \times 1} = 2\sqrt{66}$ सेमी²

Ex. एक त्रिभुज का क्षेत्रफल 15 वर्ग सेमी है और उसके अन्त:वृत्त की त्रिज्या 3 सेमी है। इसका परिमाप बराबर है:

HINTS $15 = 3 \times s \Rightarrow s = 5$ सेमी

$\therefore$ परिमाप = 5 × 2 = 10 सेमी

☞ **विशेष स्थिति जब भुजाएँ 13, 14, 15 हों**

Ex. एक त्रिभुज के लिए जिसकी भुजाएँ 13 सेमी, 14 सेमी, 15 सेमी हैं।

(i) त्रिभुज का क्षेत्रफल

(ii) त्रिभुज की अंत:त्रिज्या

HINTS

अर्द्ध-परिमाप (s) = $\frac{13+14+15}{2} = 21$सेमी

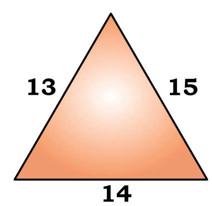
(i) त्रिभुज का क्षेत्रफल

$= \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)}$

$= \sqrt{21 \times 8 \times 7 \times 6} = \sqrt{7 \times 3 \times 8 \times 7 \times 6}$

= 7 × 12 = 84 सेमी²

(ii) अंत: त्रिज्या (r) = $\frac{\Delta}{s} = \frac{84}{21} = 4$

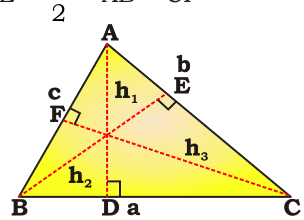


☞ क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × भुजा × संगत ऊँचाई

$\Delta = \frac{1}{2} \times BC \times AD = \frac{1}{2} \times AC \times BE = \frac{1}{2} \times AB \times CF$

$\therefore ah_1 = bh_2 = ch_3$ = (स्थिर)

$\therefore a : b : c = \frac{1}{h_1} : \frac{1}{h_2} : \frac{1}{h_3}$



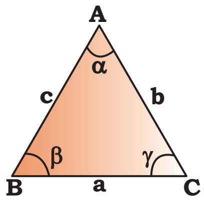
Join Telegram: @apna_rwa
@apna_channels

Join Telegram @yct_publication

☞ जब किसी त्रिभुज की दो भुजाएँ तथा उनके बीच का कोण दिया हो, तो,

$$\text{क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times bc\sin\alpha = \frac{1}{2} \times ca\sin\beta$$

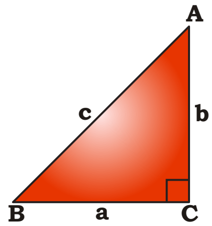
$$= \frac{1}{2} \times ab\sin\gamma$$



☞ दो दी गई भुजाओं वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल अधिकतम होगा यदि ये दोनों भुजाएँ एक दूसरे के समकोण पर स्थित हों।

यदि a, b त्रिभुज की दो भुजाएँ हैं तो अधिकतम

$$\text{क्षेत्रफल} = \frac{1}{2}ab$$



☞ त्रिभुज की भुजाओं के मध्य-बिंदुओं को मिलाने से जो त्रिभुज बनता है, उसका परिमाप मूल त्रिभुज के परिमाप का आधा तथा उसका क्षेत्रफल मूल त्रिभुज के क्षेत्रफल का एक-चौथाई होता है।

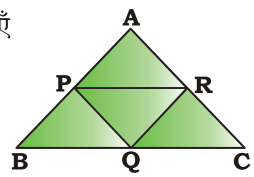
यदि P, Q और R क्रमशः भुजाएँ AB, BC और AC, के मध्य-बिंदु हों, तो

(a) ΔPQR का परिमाप

$= \frac{1}{2}$ × ΔABC का परिमाप

(b) यदि ΔABC का क्षेत्रफल Δ है, तो

ΔPQR का क्षेत्रफल $= \frac{\Delta}{4}$



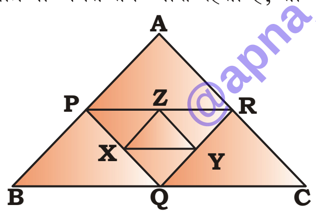
☞ मान लीजिए ΔABC की भुजाओं के मध्य-बिंदुओं को मिलाकर एक त्रिभुज PQR बनाया जाता है, फिर ΔPQR की भुजाओं के मध्य-बिंदुओं को मिलाकर एक ΔXYZ बनाया जाता है, यदि यह प्रक्रिया अनंत तक जारी रहती है, तो

(a) सभी त्रिभुजों का क्षेत्रफल

$= \frac{4}{3}$ × ΔABC का क्षेत्रफल

(b) सभी त्रिभुजों का परिमाप

= 2 × ΔABC का परिमाप



Ex. एक इकाई लंबाई की भुजा वाले एक समबाहु त्रिभुज पर विचार करें। एक समबाहु त्रिभुज के मध्य-बिंदुओं को मिलाकर एक नया समबाहु त्रिभुज बनाया जाता है, फिर दूसरे समबाहु त्रिभुज के मध्य-बिंदु को मिलाकर एक तीसरा समबाहु त्रिभुज बनाया जाता है। यह प्रक्रिया जारी रहती है। इस प्रकार बने सभी त्रिभुजों का परिमाप है:

HINTS सभी परिमापों का योग

= 2 × मूल त्रिभुज का परिमाप = 2 × 3 × 1 = 6 इकाई

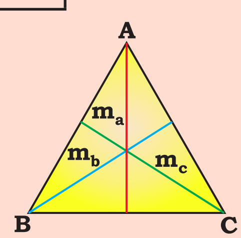
☞ यदि किसी त्रिभुज की तीन माध्यिकाएँ - m_a, m_b, m_c दी गई हैं तो त्रिभुज का क्षेत्रफल है

$$\Delta = \frac{4}{3}\sqrt{S_m(S_m - m_a)(S_m - m_b)(S_m - m_c)}$$

जहाँ, $S_m = \dfrac{m_a + m_b + m_c}{2}$

☞ यदि $m_a^2 = m_b^2 + m_c^2$, तो

$$\text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{2}{3}m_b\, m_c$$



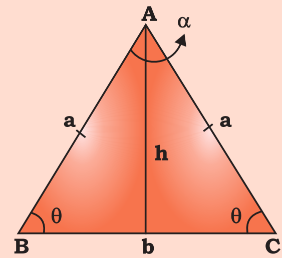
समद्विबाहु त्रिभुज

समद्विबाहु त्रिभुज वह त्रिभुज है जिसमें दो भुजाएँ समान लंबाई की तथा दो कोण समान माप के होते हैं।

- भुजा (AB = AC) = a
- परिमाप = 2a + b
- क्षेत्रफल = $\frac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2} = \frac{1}{2}a^2\sin\theta$
- ऊंचाई

$$= \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} = \frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{2} = \frac{a^2}{2R}$$

- परित्रिज्या (R) = $\dfrac{a^2}{\sqrt{4a^2 - b^2}}$
- आधार = $\frac{a}{R}\sqrt{(2R+a)(2R-a)}$



Ex. एक समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी भुजाएँ 8 सेमी, 5 सेमी और 5 सेमी हैं।

HINTS क्षेत्रफल = $\frac{8}{4}\sqrt{4 \times 5^2 - 8^2}$

$= 2\sqrt{(36)}$ = 12 सेमी²

Ex. एक समद्विबाहु त्रिभुज का परिमाप 100 सेमी है। यदि आधार 36 सेमी है, तो इसका अर्द्ध परिमाप (सेंटीमीटर में) ज्ञात कीजिए।

HINTS अर्द्ध परिमाप $= \frac{100}{2}$ = 50 सेमी

@apna_channels

Ex. एक समद्विबाहु त्रिभुज का परिमाप 91 सेमी है। यदि बराबर भुजाओं में से एक की माप 28 सेमी है, तो दूसरी असमान भुजा का मान क्या है?

HINTS एक बराबर भुजा = 28 सेमी

समद्विबाहु त्रिभुज का परिमाप = 91

⇒ 28 + 28 + a = 91 ⇒ a = 35 सेमी

Ex. एक समद्विबाहु त्रिभुज की प्रत्येक बराबर भुजा और तीसरी भुजा की लंबाई का अनुपात 3 : 5 है। यदि त्रिभुज का क्षेत्रफल 30√11 सेमी² है, तो तीसरी भुजा की लंबाई (सेमी में) क्या है?

HINTS मान लीजिए, बराबर भुजाओं की लंबाई = $3x$

तीसरी भुजा की लंबाई = $5x$

$$AD = \sqrt{9x^2 - \frac{25x^2}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{36x^2 - 25x^2}{4}} = \frac{x\sqrt{11}}{2}$$

प्रश्नानुसार,

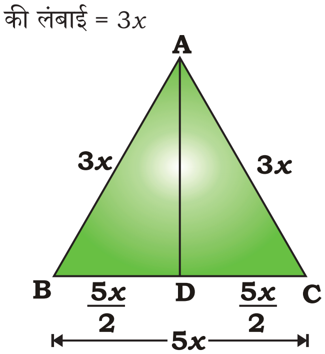
त्रिभुज का क्षेत्रफल $= 30\sqrt{11}$ सेमी²

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \times 5x \times \frac{x\sqrt{11}}{2} = 30\sqrt{11}$$

$$\Rightarrow x = 2\sqrt{6}$$

$\therefore$ BC = $5x$ = 5 × $2\sqrt{6} = 10\sqrt{6}$ सेमी

$\therefore$ तीसरी भुजा की लंबाई = $10\sqrt{6}$ सेमी



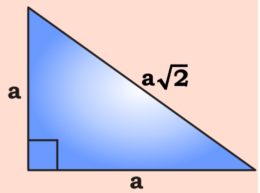
Join Telegram @yct_publication

समद्विबाहु-समकोण त्रिभुज

- परिमाप (P) = $a(2 + \sqrt{2})$

  $= a\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)$

- क्षेत्रफल = $\frac{a^2}{2}$



Ex. यदि एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज का परिमाप $8(\sqrt{2}+1)$ सेमी है, तो त्रिभुज के कर्ण की लंबाई क्या है?

HINTS $8(\sqrt{2}+1) = a \times \sqrt{2}(\sqrt{2}+1) \Rightarrow a = 4\sqrt{2}$

$\therefore$ कर्ण = $a\sqrt{2} = 4 \times 2 = 8$ सेमी

Ex. एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल 16 वर्ग मीटर है। इसका कर्ण ______ है।

HINTS समद्विबाहु समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल= $\frac{a^2}{4}$

$\Rightarrow \frac{a^2}{4} = 16 \Rightarrow a^2 = 64 \Rightarrow a = 8$

Ex. एक समद्विबाहु, समकोण त्रिभुज का परिमाप 2p इकाई है। उसी त्रिभुज का क्षेत्रफल है-

HINTS मान लीजिए, समद्विबाहु समकोण Δ की भुजा = AB = AC = a

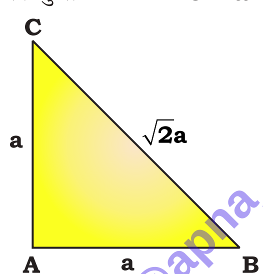
$\Rightarrow BC = \sqrt{2}a$

$\because AB + AC + BC = \Delta ABC$ का परिमाप

$\Rightarrow 2p = 2a + \sqrt{2}a$

$\Rightarrow p = a + \frac{a}{\sqrt{2}}$

क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times a \times a = \frac{1}{2}a^2$



$= \frac{1}{2}\left(\frac{p}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\right)^2 = \frac{p^2}{(\sqrt{2}+1)^2} = \frac{p^2(2+1-2\sqrt{2})}{1} = p^2(3-2\sqrt{2})$

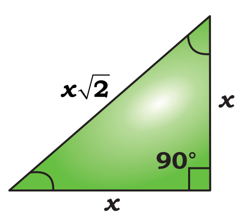
Ex. एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज का परिमाप 30 मीटर है। इसका क्षेत्रफल (मीटर² में) ज्ञात कीजिए। (निकटतम पूर्णांक मान तक पूर्णांकित)

HINTS परिमाप = $x + x + x\sqrt{2}$

$\Rightarrow 2x + x\sqrt{2} = 30$

$\Rightarrow x = \frac{30}{2+\sqrt{2}} = \frac{30 \times (2-\sqrt{2})}{2}$

$= 15(2-\sqrt{2})$



त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times [15(2-1.41)]^2$

$= \frac{225 \times 0.59 \times 0.59}{2} \approx 39$ मी²

वैकल्पिक विधि

$2p = 30$ मी $\Rightarrow p = 15$ मी

त्रिभुज का क्षेत्रफल = $p^2(3-2\sqrt{2}) = 15^2(3-2\sqrt{2})$

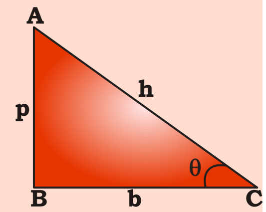
$= 225 \times 0.172 \sim 39$ मी²

समकोण त्रिभुज

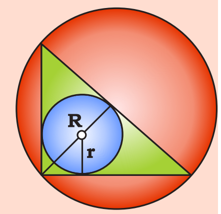
समकोण त्रिभुज वह त्रिभुज है जिसमें दो भुजाएँ लंबवत होती हैं, जो समकोण बनाती हैं।

- $p^2 + b^2 = h^2$
- परिमाप = p + b + h
- त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times p \times b$
- समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल

  $= \frac{h^2}{4}\sin 2\theta$



- अंत:त्रिज्या (r) = $\frac{p+b-h}{2}$ 'या' $\left[\frac{\text{लंब + आधार – कर्ण}}{2}\right]$
- परिमाप (R) = $\frac{h}{2}$ 'या' $\left[\frac{\text{कर्ण}}{2}\right]$



Ex. यदि एक त्रिभुज जिसका आधार 6 सेमी है, का क्षेत्रफल 18 सेमी² है, तो उसकी ऊँचाई क्या है?

HINTS त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × आधार × ऊँचाई

$\Rightarrow 18 = \frac{1}{2} \times 6 \times$ ऊंचाई

$\Rightarrow$ ऊंचाई = 6 सेमी

Ex. एक समकोण त्रिभुज का एक कोण 15° है और कर्ण 1 मीटर है। त्रिभुज का क्षेत्रफल (वर्ग सेमी में) है

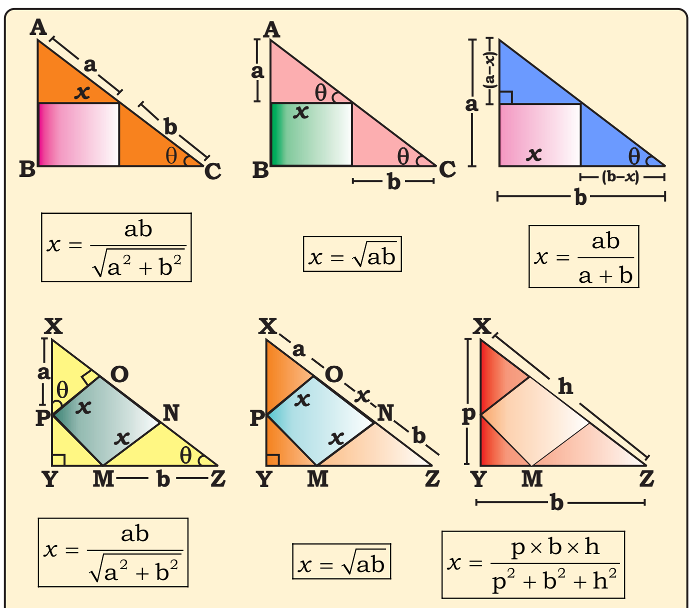
HINTS क्षेत्रफल = $\frac{h^2}{4}\sin 2\theta$

$= \frac{100 \times 100}{4} \times \sin 30° = 1250$ सेमी²

Ex. यदि किसी समकोण Δ का कर्ण 10 सेमी है, तो उसका अधिकतम क्षेत्रफल क्या हो सकता है?

HINTS क्षेत्रफल$_{\text{अधिकतम}}$ = $\frac{10 \times 10}{4} = 25$ सेमी²

समकोण त्रिभुज के अंदर वर्ग



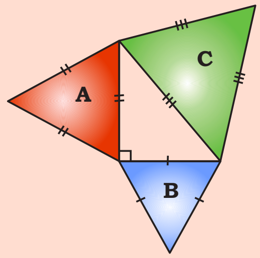
@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram @yct_publication

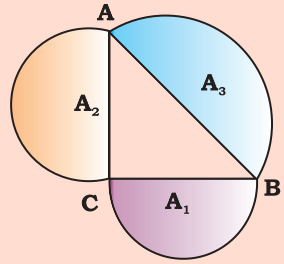
छायांकित भाग का क्षेत्रफल

समकोण त्रिभुज की प्रत्येक भुजा पर समबाहु त्रिभुज का निर्माण



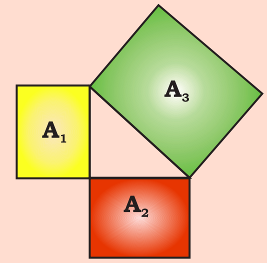
क्षेत्रफल (ΔC) = क्षेत्रफल (ΔA) + क्षेत्रफल (ΔB)

समकोण त्रिभुज की प्रत्येक भुजा पर अर्धवृत्त का निर्माण



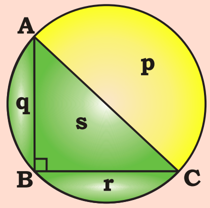
क्षेत्रफल (A_3) = क्षेत्रफल (A_1) + क्षेत्रफल (A_2)

समकोण त्रिभुज की प्रत्येक भुजा पर वर्ग का निर्माण

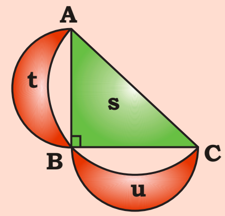


क्षेत्रफल (A_3) = क्षेत्रफल (A_2) + क्षेत्रफल (A_1)

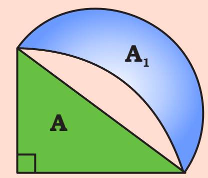
- छायांकित भाग (p) का क्षेत्रफल = भाग (q), (r) और (s) के क्षेत्रफल का योग



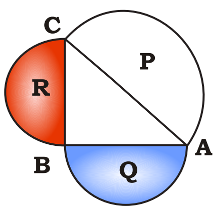
- छायांकित भाग (s) का क्षेत्रफल = भाग (t) और (u) के क्षेत्रफल का योग



- छायांकित भाग (A_1) का क्षेत्रफल = त्रिभुज (A) का क्षेत्रफल



Ex. छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जहाँ AC = 10 सेमी.



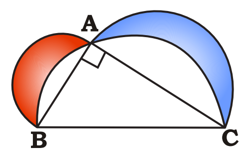
HINTS कुल आवश्यक क्षेत्रफल

= कर्ण पर बने अर्धवृत्त का क्षेत्रफल

$= \frac{\pi \times 10^2}{4} = 25\pi$ सेमी²

@apna_channels

Ex. दी गई आकृति में, ΔABC की तीन भुजाओं पर 3 अर्धवृत्त खींचे गए हैं। यदि AB = 21 सेमी, AC = 28 सेमी और BC = 35 सेमी है, तो छायांकित भाग का क्षेत्रफल (सेमी² में) क्या है?



HINTS

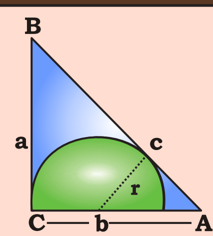
छायांकित भाग का क्षेत्रफल = ΔABC का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2} \times 21 \times 28 = 294$ सेमी²

महत्त्वपूर्ण परिणाम

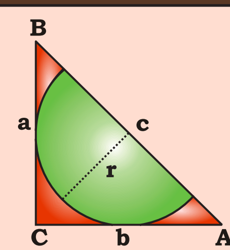
☞ जब एक समकोण त्रिभुज के अन्दर एक अर्धवृत्त अंकित किया जाता है, जैसा कि चित्र में दिखाया गया है। तब–

त्रिज्या (r) $= \frac{ab}{a+c}$



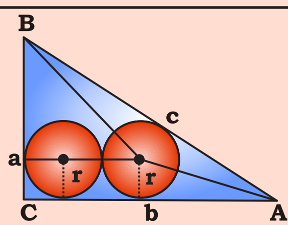
☞ जब r-त्रिज्या वाला एक अर्धवृत्त एक समकोण त्रिभुज में अंकित होता है जो कर्ण पर स्थित होता है जैसा कि चित्र में दिखाया गया है, तो

त्रिज्या (r) $= \frac{ab}{a+b}$



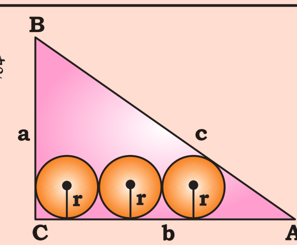
☞ जब समान त्रिज्या वाले दो वृत्तों को एक समकोण त्रिभुज में अंकित किया जाता है जैसा कि चित्र में दिखाया गया है, तो

त्रिज्या (r) $= \frac{ab}{3a+b+c}$



☞ जब समान त्रिज्या वाले तीन वृत्तों को एक समकोण त्रिभुज में अंकित किया जाता है जैसा कि चित्र में दिखाया गया है, तो

त्रिज्या (r) $= \frac{ab}{5a+b+c}$



Join Telegram: @apna_rwa

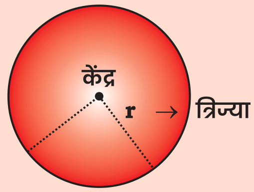
Join Telegram @yct_publication

वृत्त

एक वृत्त एक बंद 2D आकृति है जिसमें समतल के सभी बिंदुओं का समूह एक निश्चित बिंदु से समान दूरी पर होता है जिसे केंद्र कहते हैं।

- व्यास (d) = 2r = $\sqrt{\frac{4A}{\pi}}$

  जहाँ, r = त्रिज्या, A = क्षेत्रफल
- वृत्त का क्षेत्रफल = πr^2
- वृत्त की परिधि = $2\pi r$



त्रिज्या	परिधि = $2\pi r$	क्षेत्रफल = πr^2
7	44	154
↓	↓	↓
7k	44k	$154k^2$
↓	↓	↓
(14 = 7×2)	44×2	154×2^2
↓	↓	↓
$\left(3.5 = 7\times\frac{1}{2}\right)$	$44\times\frac{1}{2} = 22$	$154\times\frac{1}{4} = 38.5$

Ex. एक वृत्त का क्षेत्रफल 1386 वर्ग सेमी है। वृत्त की त्रिज्या क्या है? [π = 22/7 लीजिए]

HINTS वृत्त का क्षेत्रफल= πr^2

$\Rightarrow 1386 = \frac{22}{7}\times r^2$

$\Rightarrow r^2 = \frac{1386\times7}{22}$

$\Rightarrow r^2 = 441$

$\Rightarrow$ r = 21 सेमी

वैकल्पिक विधि

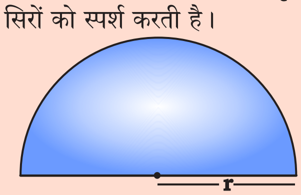
त्रिज्या	क्षेत्रफल
7	154
↓ ×3	↓ $\times3^2$
21	1386 सेमी²

अर्द्ध वृत्त

अर्धवृत्त को एक ऐसे आधे वृत्त के रूप में परिभाषित किया जाता है जो किसी वृत्त को दो बराबर भागों में काटने से बनता है। यह तब बनता है जब एक रेखा वृत्त के केंद्र से होकर गुजरती है और उसके दोनों सिरों को स्पर्श करती है।

- अर्धवृत्त का क्षेत्रफल = $\frac{\pi r^2}{2}$
- अर्धवृत्त की परिधि

  = $\pi r + 2r$



त्रिज्या	परिधि	क्षेत्रफल
7	36	77
	↓	↓
	$2r + \pi r$	$\frac{\pi r^2}{2}$
	$= 2\times7+\frac{22}{7}\times7$	$= \frac{22}{7}\times\frac{7\times7}{2}$
	= 36	= 77

Ex. एक अर्धवृत्ताकार शीट की त्रिज्या 21 सेमी है, इसकी परिधि ज्ञात कीजिए।

HINTS

त्रिज्या	परिधि
7	36
↓ ×3	↓ ×3
21	108

Ex. 35 सेमी त्रिज्या वाले अर्धवृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

HINTS

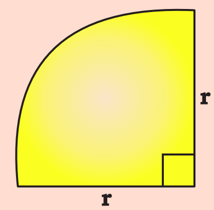
त्रिज्या	क्षेत्रफल
7	77
↓ ×5	↓ $\times5^2$
35	1925 सेमी²

चतुर्थांश

यह एक वृत्त का एक-चौथाई भाग है। यह दो रेखाओं के समूह से बनता है जो प्रकृति में लंबवत होती हैं।

- वृत्त के चतुर्थांश का क्षेत्रफल = $\frac{1}{4}\pi r^2$
- वृत्त के चतुर्थांश की परिधि

  $= \frac{\pi r}{2} + 2r$



त्रिज्या	परिधि	क्षेत्रफल
7	25	$\frac{154}{4} = 38.5$
	↓	↓
	$2r + \frac{2\pi r}{4}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
	$= 2\times7+2\times\frac{22}{7}\times\frac{7}{4}$	$= \frac{22}{7}\times\frac{7^2}{4}$
	= 25	= 38.5

Ex. 14 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त के चतुर्थांश का क्षेत्रफल क्या है?

HINTS क्षेत्रफल = $\frac{1}{4}\pi r^2 = \frac{1}{4}\times\frac{22}{7}\times14^2$ = 154 सेमी²

वैकल्पिक विधि

त्रिज्या	क्षेत्रफल
7	38.5
↓ ×2	↓ $\times2^2$
14	154

Ex. 21 सेमी त्रिज्या वाले एक वृत्त के चतुर्थांश का परिमाप (परिधि) ज्ञात कीजिए।

HINTS चतुर्थांश का परिमाप = $\frac{\pi r}{2} + 2r$

$= \frac{22}{7}\times\frac{21}{2} + 2\times21$

= 33 + 42 = 75 सेमी²

वैकल्पिक विधि

त्रिज्या	परिधि
7	25
↓ ×3	↓ ×3
21	75

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

त्रिज्यखंड

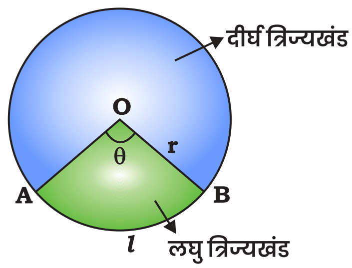
त्रिज्यखंड (सेक्टर) वृत्त का वह भाग है जो दो त्रिज्याओं और चाप के बीच घिरा होता है।

- **r** = वृत्त की त्रिज्या।
- **θ** = त्रिज्यखंड का केंद्रीय कोण (डिग्री या रेडियन में)
- चाप की लंबाई **(*l*)** = वक्रीय सीमा की लंबाई
- **क्षेत्रफल (A)** = त्रिज्यखंड द्वारा घेरा गया क्षेत्र

दीर्घ त्रिज्यखंड

यदि $\theta > 180°$

- क्षेत्रफल = $\frac{\theta}{360°} \times \pi r^2$
- चाप की लंबाई = $\frac{\theta}{360°} \times 2\pi r$
- त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times l\, r$



लघु त्रिज्यखंड

यदि $\theta < 180°$

- क्षेत्रफल = $1 - \frac{\theta}{360°} \times \pi r^2$
- चाप की लंबाई = $1 - \frac{\theta}{360°} \times 2\pi r$

Ex. यदि चाप की लंबाई = 6 सेमी और वृत्त की त्रिज्या = 5 सेमी है, तो वृत्त के त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

HINTS क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times 6 \times 5 = 15$ सेमी^{2}

Ex. 7 सेमी त्रिज्या वाले एक वृत्त के त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसका केन्द्रीय कोण 90° है।

HINTS क्षेत्रफल = $\frac{\pi r^2}{360°} \times 90° = \frac{\pi \times 7 \times 7}{4} = \frac{77}{2} = 38.5$ सेमी^{2}

"केन्द्रीय कोण यह निर्धारित करता है कि कोई त्रिज्यखंड दीर्घ है या लघु"

वृत्तखंड

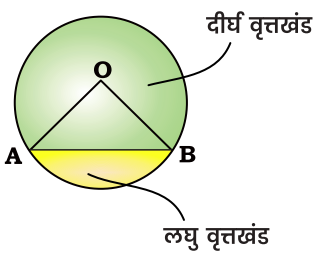
खण्ड जीवा और संगत चाप के बीच का क्षेत्र है।

लघु वृत्तखंड

यदि θ डिग्री में है:-

- लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल

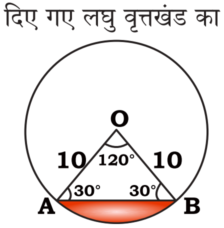
$= r^2\left[\frac{\pi\theta}{360°} - \frac{\sin\theta}{2}\right]$



यदि θ रेडियन में है:-

- लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल = $\frac{r^2}{2}(\theta - \sin\theta)$

Ex. नीचे दिए गए चित्र में दिए गए लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



HINTS लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल = त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल – ΔOAB का क्षेत्रफल

$= \frac{\pi r^2\theta}{360^0} - \frac{1}{2}r^2\sin\theta = \pi 10^2 - \frac{1}{2} \times 10^2 \times \sin 120°$

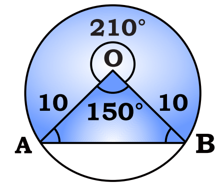
$= \left(\frac{100\pi}{3} - 25\sqrt{3}\right)$ सेमी^{2}

दीर्घ वृत्तखंड

दीर्घ वृत्तखंड का क्षेत्रफल = $\left(\frac{\pi r^2\theta}{360°} + \frac{1}{2}r^2\sin\theta\right)$

वृत्तखंड का परिमाप = $2r\left[\frac{\pi\theta}{360°} + \frac{\sin\theta}{2}\right]$

Ex. दी गई आकृति में दीर्घ वृत्तखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



HINTS दीर्घ वृत्तखंड का क्षेत्रफल

= त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल (210°) + ΔOAB का क्षेत्रफल

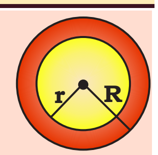
$= \frac{\pi r^2\theta}{360^0} + \frac{1}{2}r^2\sin\theta$

$= \pi 10^2 \frac{210°}{360°} + \frac{1}{2} \times 10^2 \times \sin 150° = \left(\frac{175\pi}{3} + 25\right)$ सेमी^{2}

वलय (Ring)

यदि R और r दो संकेंद्रित वृत्तों की त्रिज्याएँ हैं, तो

- दो वृत्तों से घिरा क्षेत्रफल = $\pi (R + r)(R - r)$
- पथ की चौड़ाई = $\frac{\text{बाह्य परिधि} - \text{आंतरिक परिधि}}{2\pi}$



Ex. संकेन्द्रीय वृत्तों के बीच का क्षेत्रफल 770 सेमी^{2} है तथा बाह्य वृत्त की त्रिज्या 21 सेमी है, तो आंतरिक वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

HINTS दो वृत्तों के बीच का क्षेत्रफल = $\pi(R^2 - r^2)$

$\Rightarrow \frac{22}{7}(21^2 - r^2) = 770$ सेमी$^2 \Rightarrow r = \sqrt{196} = 14$ सेमी

Ex. दो संकेन्द्रीय वृत्तों से घिरे एक वृत्ताकार पथ का क्षेत्रफल 3080 वर्ग मीटर है। यदि वृत्ताकार पथ के बाहरी किनारे और भीतरी किनारे की त्रिज्याओं के बीच का अंतर 10 मीटर है, तो दोनों त्रिज्याओं का योग (मीटर में) क्या है?

HINTS $\pi(R^2 - r^2) = 3080$

$\Rightarrow \frac{22}{7}(R + r)(R - r) = 3080 \Rightarrow R + r = 98$ सेमी

पहिया

एक घूमते पहिये द्वारा एक मिनट में पूरी की गई परिक्रमाओं की संख्या

$= \frac{\text{1 मिनट में तय की गई दूरी}}{\text{परिधि}}$

Ex. एक एथलीट 7 मीटर त्रिज्या वाले एक वृत्ताकार मैदान के चारों ओर 3 मिनट 40 सेकंड में 8 चक्कर लगाता है। उसकी गति (किमी/घंटा में) क्या है?

HINTS 8 राउंड में तय की गई कुल दूरी

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 8 = 352$ मी $= \frac{352}{1000}$ किमी

कुल समय = 3 मिनट 40 सेकंड = 220 सेकंड

$= \frac{220}{3600}$ घंटे $= \frac{11}{180}$ घंटे

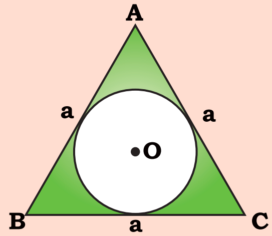
गति = $\frac{352}{1000} \times \frac{180}{11} = \frac{144}{25}$ किमी/घंटा

@apna_channels

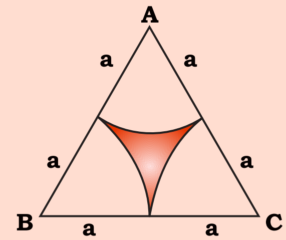
Join Telegram @yct_publication

महत्त्वपूर्ण परिणाम

☞ छायांकित भाग का क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 - \pi\left(\frac{a^2}{12}\right)$



☞ छायांकित भाग का क्षेत्रफल $= a^2\left(\sqrt{3} - \frac{11}{7}\right)$

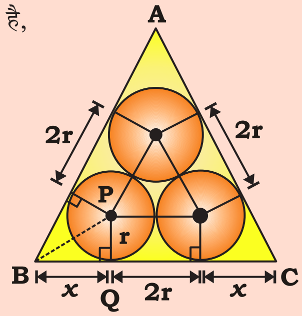


☞ एक समबाहु त्रिभुज तीनों वृत्तों के परिगत है, जिनमें से प्रत्येक की त्रिज्या 'r' है, तो

भुजा = 2r ($\sqrt{3}$ + 1)

त्रिभुज का परिमाप

= 3 × भुजा = 6r($\sqrt{3}$ + 1)

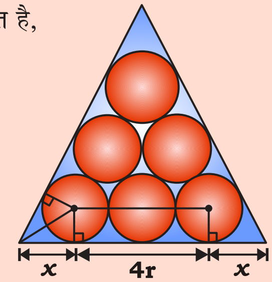


☞ एक समबाहु त्रिभुज सभी छह वृत्तों के परिगत है, जिनमें से प्रत्येक की त्रिज्या 'r' है, तो

भुजा = 2r($\sqrt{3}$ + 2)

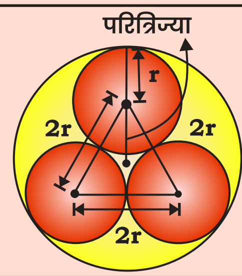
त्रिभुज का परिमाप

= 6r($\sqrt{3}$ + 2)



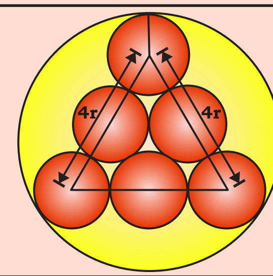
☞ त्रिज्या r वाले तीन बराबर वृत्त एक बड़े वृत्त द्वारा परिबद्ध हैं।

बड़े वृत्त की त्रिज्या $= r \times \left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)$



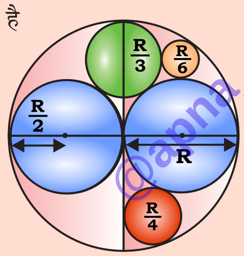
☞ छः बराबर वृत्त, जिनमें से प्रत्येक की त्रिज्या r है, एक बड़े वृत्त द्वारा परिबद्ध हैं।

$\therefore$ बड़े वृत्त की त्रिज्या $= \frac{r}{\sqrt{3}}(\sqrt{3}+4)$



@apna_channels

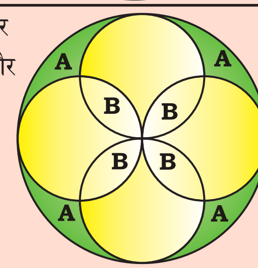
☞ चित्र के अनुसार, यदि बाहरी वृत्त की त्रिज्या R है तो प्रत्येक वृत्त की त्रिज्या:



☞ दी गई आकृति के अनुसार, एक बड़ा वृत्त और उसके अन्दर 4 छोटे वृत्त दिए गए हैं, तो A और B का अनुपात 1:1 होगा।

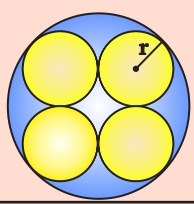
A = B

A : B = 1 : 1



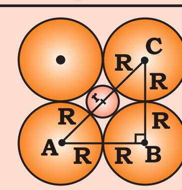
☞ दी गई आकृति में सभी आंतरिक वृत्त की त्रिज्या 'r' है तो बड़े (बाहरी) वृत्त की त्रिज्या

$R = \left(\sqrt{2}+1\right)r$



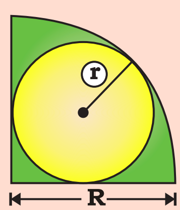
☞ जब सभी बाहरी वृत्तों की त्रिज्याएँ 'R' हों, तो आंतरिक वृत्त की त्रिज्या

$r = (\sqrt{2}-1)R$



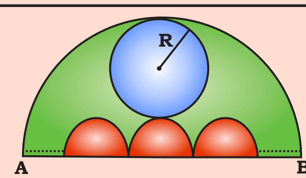
☞ जब एक वृत्त को चित्र में दिखाए अनुसार चतुर्थांश में अंकित किया जाता है तब

$r = (\sqrt{2}-1)R$



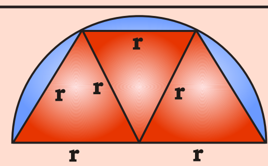
☞ $R = \frac{n(AB)}{4(n+1)}$

n = अर्धवृत्त की संख्या



☞ त्रिज्या 'r' सेमी के अर्धवृत्त में अंकित तीन समबाहु त्रिभुज का कुल क्षेत्रफल

क्षेत्रफल $= 3 \times \frac{\sqrt{3}}{4}r^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$



☞ आकृति के अनुसार, एक चतुर्थांश में दो अर्धवृत्त अंकित हैं।

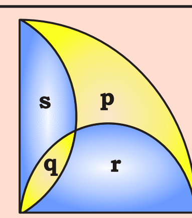
(i) भाग (p) का क्षेत्रफल = भाग (q) का क्षेत्रफल

(ii) छायांकित भाग (r) का क्षेत्रफल

= छायांकित भाग (s) का क्षेत्रफल

(iii) भाग (p), (q), (r), (s) के क्षेत्रफलों का अनुपात क्रमशः है

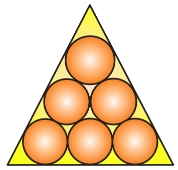
p : q : r : s = 4 : 4 : 7 : 7



Join Telegram: @apna_rwa

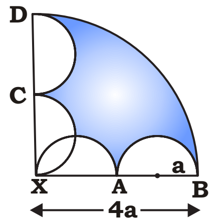
Join Telegram: @yct_publication

Ex. एक समबाहु त्रिभुज सभी वृत्तों के परिगत है, जिनमें से प्रत्येक की त्रिज्या 10 सेमी है। समबाहु त्रिभुज का परिमाप क्या है?



HINTS परिमाप = $3 \times 2 \times 10\ (\sqrt{3}+2) = 60(\sqrt{3}+2)$ सेमी

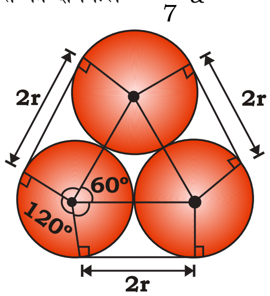
Ex. XBD एक वृत्त का चतुर्थांश है जहाँ XB = 4a सेमी, XA = AB = XC = CD है। XA, AB, XC और CD को व्यास मानकर चार अर्धवृत्त खींचे गए हैं। छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



HINTS XB = 4a सेमी

छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल = त्रिज्या (4a) के चतुर्थांश का क्षेत्रफल – 4 × त्रिज्या (a) के अर्धवृत्त का क्षेत्रफल + त्रिज्या (a) के पत्ते का क्षेत्रफल = $\frac{48}{7}a^2$

Ex. समान त्रिज्या r सेमी वाले तीन वृत्ताकार वलय एक-दूसरे को स्पर्श कर रहे हैं। एक डोरी इन वलय समूहों के चारों ओर बहुत ही सटीक रूप से घूमती है। तीनों वलय को इस प्रकार बाँधने के लिए आवश्यक डोरी की न्यूनतम लंबाई क्या है?



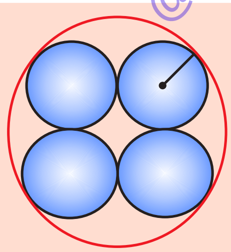
HINTS

तीन चाप की लंबाई = $3 \times \left(\frac{2\pi r}{360^\circ} \times 120^\circ\right) = 2\pi r$

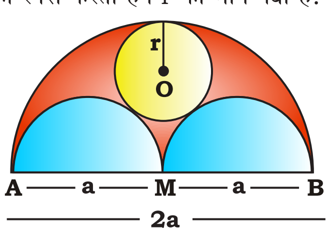
∴ डोरी की लंबाई = $2\pi r$ + व्यास × वृत्तों की संख्या

$= 2\pi r + 3 \times 2r = 2r(\pi + 3)$

☞ समान त्रिज्या r सेमी वाले चार वृत्ताकार छल्ले एक-दूसरे को स्पर्श कर रहे हैं। एक डोरी इन छल्लों के चारों ओर बहुत कसकर बंधी हुई है। तो डोरी की न्यूनतम लंबाई $= 8r + 2\pi r$



Ex. नीचे दी गई आकृति में, AB एक 2a लंबाई की रेखा है, जिसका मध्य-बिंदु M है। एक ओर AM, MB और AB को व्यास मानकर अर्धवृत्त खींचे गए हैं। केंद्र O और त्रिज्या r वाला एक वृत्त इस प्रकार खींचा गया है कि यह वृत्त तीनों अर्धवृत्तों को स्पर्श करता है। r का मान क्या है?



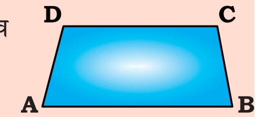
HINTS $2R = 2a \Rightarrow R = a$

$\therefore r = \frac{R}{3} = \frac{a}{3}$

चतुर्भुज

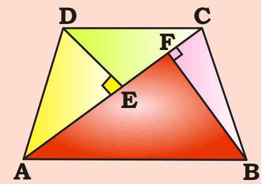
चतुर्भुज एक बहुभुज है जिसमें चार भुजाएँ, चार शीर्ष और चार कोण होते हैं।

- चतुर्भुज के आंतरिक कोणों का योग सदैव 360° होता है।



$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$

- चतुर्भुज का क्षेत्रफल



$= \left(\frac{1}{2} \times AC \times DE\right) + \left(\frac{1}{2} \times AC \times BF\right)$

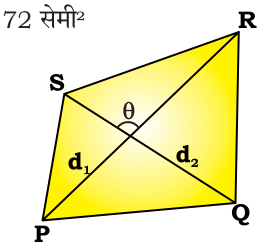
$= \frac{1}{2} \times AC\ (DE + BF)$

$= \frac{1}{2}$ × विकर्ण × (उस पर डाले गए लंबों का योग)

Ex. चतुर्भुज ABCD में, AC = 12 सेमी, यदि B और D से रेखा AC पर खींचे गए लंबों की लंबाई 5 सेमी और 7 सेमी है, तो चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल है:

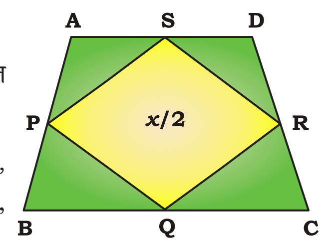
HINTS क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times 12 \times (7+5) = 72$ सेमी²

☞ d_1 और d_2 चतुर्भुज PQRS के विकर्ण हैं।



क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2 \sin\theta$

☞ चतुर्भुज की आसन्न भुजा के मध्य-बिंदु को मिलाने से बना चतुर्भुज आधे क्षेत्रफल वाला एक समांतर चतुर्भुज होगा।



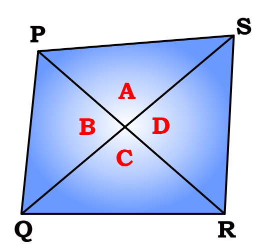
यदि P, Q, R, S क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्य-बिंदु हैं, तो–

(a) PQRS एक समांतर चतुर्भुज है।

(b) यदि चतुर्भुज का क्षेत्रफल x है, तो

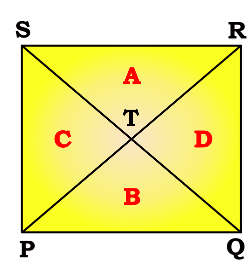
समांतर चतुर्भुज PQRS का क्षेत्रफल $= \frac{x}{2}$

☞ किसी भी चतुर्भुज में A, B, C और D दो विकर्णों द्वारा बनाए गए त्रिभुजों के क्षेत्रफल हैं तो



$A \times C = B \times D$

☞ PQRS कोई भी आयत/वर्ग है। T इसके अंदर एक बिंदु है। A, B, C, D क्षेत्रफल हैं, तो



$A + B = C + D$

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

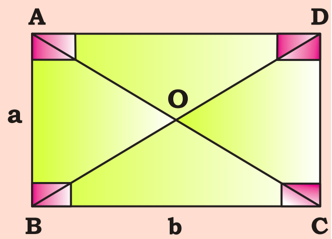
Join Telegram @yct_publication

चतुर्भुज के प्रकार

आयत | वर्ग | चतुर्भुज | विषमकोण | समलंब

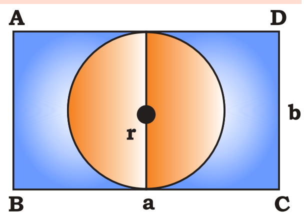
आयत

- AB = CD = a और
  BC = AD = b
- AC = BD = $\sqrt{a^2+b^2}$
- AO = OC = OB = OD
  = $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$
- परिमाप = 2(लंबाई + चौड़ाई) = 2(a + b)
- क्षेत्रफल = लंबाई × चौड़ाई = ab
- ΔAOB का क्षेत्रफल = ΔDOC का क्षेत्रफल = ΔAOD का क्षेत्रफल
  = ΔBOC का क्षेत्रफल= $\frac{ab}{4}$



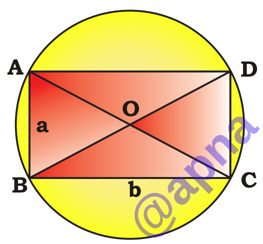
☞ अधिकतम बड़े संभावित वृत्त की त्रिज्या

$r = \frac{\text{चौड़ाई}}{2} = \frac{b}{2}$

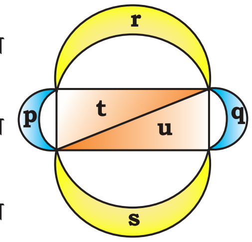


☞ आयत ABCD के परिगत वृत्त की त्रिज्या R हो, तो

$R = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$



☞



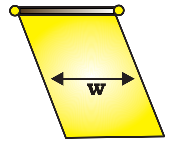
(i) छायांकित भाग (p) का क्षेत्रफल = छायांकित भाग (q) का क्षेत्रफल

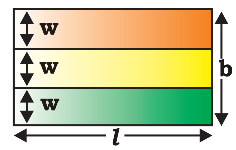
(ii) छायांकित भाग (r) का क्षेत्रफल = छायांकित भाग (s) का क्षेत्रफल

(iii) छायांकित भाग (t) का क्षेत्रफल = छायांकित भाग (u) का क्षेत्रफल

(iv) छायांकित भाग (p), (q), (r), (s) का क्षेत्रफल = आयताकार भाग का क्षेत्रफल

☞ एक कालीन की चौड़ाई निश्चित होती है





(i) मान लीजिए कि चौड़ाई w का कालीन $l \times b$ आयाम के फर्श को ढकता है

कालीन का क्षेत्रफल = फर्श का क्षेत्रफल ⇒ $l_c \times w = l \times b$

कालीन की आवश्यक लंबाई (l_c) = $\frac{lb}{w}$

(ii) मान लीजिए कि $(x \times y)$ आयाम वाली आयताकार टाइलें $(l \times b)$ आयाम वाले फर्श को ढकती हैं

⇒ n टाइल्स का क्षेत्रफल = फर्श का क्षेत्रफल

⇒ $n \times x \times y = l \times b \Rightarrow n = \frac{lb}{xy}$

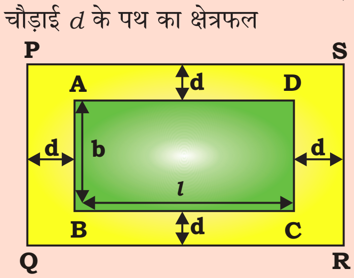
(iii) यदि फर्श न्यूनतम संख्या में वर्गाकार टाइलों से ढका है, तो वर्गाकार टाइल की भुजा फर्श की लंबाई और चौड़ाई का HCF है।

> यदि आयत की लंबाई x गुना तथा चौड़ाई y गुना हो जाए, तो आयत का क्षेत्रफल xy गुना हो जाएगा।

@apna_channels

एक आयत के अंदर/बाहर का पथ

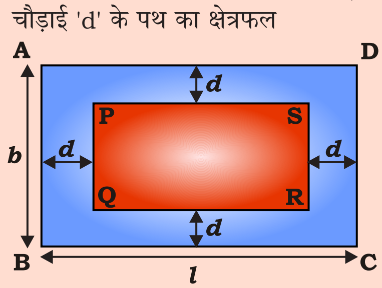
☞ आयत ABCD के बाहर चारों ओर एकसमान चौड़ाई d के पथ का क्षेत्रफल



पथ का क्षेत्रफल = $2d\,(l + b + 2d)$

पथ की परिधि = $4\,(l + b + 2d)$

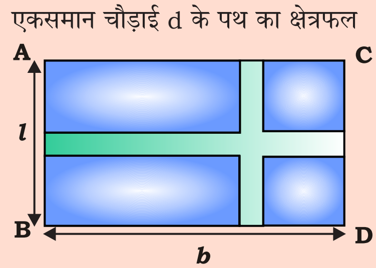
☞ आयत ABCD के अंदर चारों ओर एकसमान चौड़ाई 'd' के पथ का क्षेत्रफल



पथ का क्षेत्रफल = $2d\,(l + b - 2d)$

पथ का परिमाप = $4\,(l + b - 2d)$

☞ आयत ABCD में लंबाई और चौड़ाई के अनुदिश एकसमान चौड़ाई d के पथ का क्षेत्रफल



पथ का क्षेत्रफल = $(l + b - d)d$

पथ का परिमाप = $2\,(l + b - 2d)$

Ex. 10 मीटर चौड़ी एक सड़क बाहर से एक आयताकार बगीचे को घेरती है जिसका माप 200 मीटर × 180 मीटर है। पथ का क्षेत्रफल (वर्ग मीटर में) है:

HINTS पथ का क्षेत्रफल

= 2 × 10 (200 + 180 + 20) = 20 (400) = 8000 मी²

Ex. 37 मीटर × 30 मीटर विमाओं वाले एक आयताकार पार्क के भीतरी भाग में 570 वर्ग मीटर क्षेत्रफल में फैला एक पथ बनाया गया है। पथ की चौड़ाई क्या है?

(a) 10 मी (b) 15 मी (c) 5 मी (d) 28 मी

HINTS पथ का क्षेत्रफल = $2d \times (l + b - 2d)$

⇒ 570 = 2d × (37 + 30 – 2d)

⇒ 570 = 2d × (67 – 2d)

विकल्पों की मदद से, d = 5

570 = 2 × 5 × (67 – 10)

⇒ 570 = 570

अत: पथ की चौड़ाई = 5 मीटर

Join Telegram: @apna_rwa

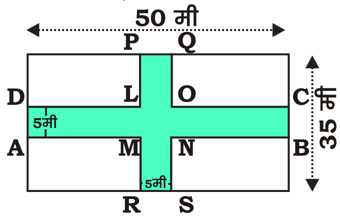
Join Telegram @yct_publication

Ex. नीचे दिया गया आरेख 50 मीटर लंबे और 35 मीटर चौड़े एक आयताकार मैदान के अंदर खींचे गए दो रास्तों को दर्शाता है। प्रत्येक रास्ते की चौड़ाई 5 मीटर है। छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

HINTS छायांकित भाग का क्षेत्रफल

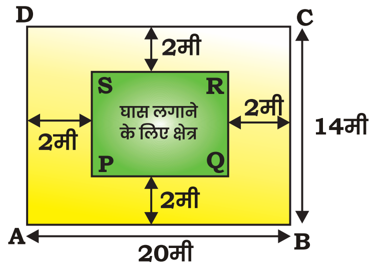
$= (l + b - d)d$

$= (50 + 35 - 5)5 = 400$ मी^{2}



Ex. 20 मीटर लंबे और 14 मीटर चौड़े एक आयताकार भूखंड को चारों ओर 2 मीटर जगह छोड़कर घास से ढकना है। घास लगाने के लिए आवश्यक क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

HINTS



घास वाले लॉन की लंबाई

$= 20 - 2 \times 2 = 20 - 4$

$= 16$ मी

घास वाले लॉन की चौड़ाई

$= 14 - 2 \times 2 = 14 - 4$

$= 10$ मी

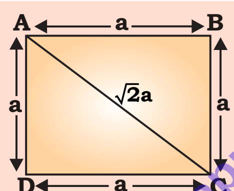
घास वाले लॉन का क्षेत्रफल = लंबाई × चौड़ाई

$= 16 \times 10 = 160$ मी^{2}

वर्ग

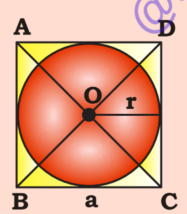
- परिमाप = 4 × भुजा = 4a
- क्षेत्रफल = (भुजा)^2 = a^2
- जब विकर्ण दिया गया हो तो,

  क्षेत्रफल $= \frac{(\text{विकर्ण})^2}{2} = \frac{d^2}{2}$



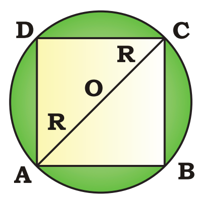
- ΔAOB का क्षेत्रफल = ΔBOC का क्षेत्रफल = ΔCOD का क्षेत्रफल

  = ΔDOA का क्षेत्रफल $= \frac{a^2}{4}$



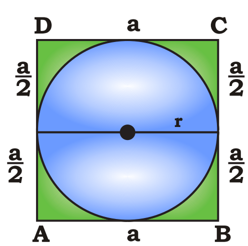
- भुजा 'a' के वर्ग के बाहर खींचे गए सबसे बड़े वृत्त की त्रिज्या

  परिवृत्त की त्रिज्या (R) $= \frac{a}{\sqrt{2}}$



- भुजा 'a' वाले वर्ग के अंदर अंकित सबसे बड़े वृत्त की त्रिज्या

  अंत:वृत्त की त्रिज्या (r) $= \frac{a}{2}$



- परित्रिज्या (R) : अंत:त्रिज्या (r) $= \sqrt{2} : 1$

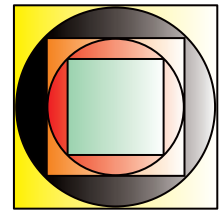
  ⇒ क्षेत्रफल = 2 : 1
- यदि विकर्ण या परिमाप में से कोई एक x गुना हो जाए तो क्षेत्रफल x^2 गुना हो जाएगा या $(x^2 - 1)$ गुना बढ़ जाएगा।

- दो वर्गों के लिए

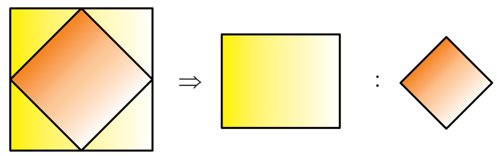
  (a) दो वर्गों के लिए भुजाओं का अनुपात = विकर्ण का अनुपात = परिमाप का अनुपात

  (b) क्षेत्रफल का अनुपात = (भुजाओं का अनुपात)^2 = (विकर्ण का अनुपात)^2 = (परिमाप का अनुपात)^2

☞ यदि हम एक वर्ग के अंदर एक वृत्त बनाते हैं और फिर वृत्त के अंदर एक वर्ग बनाते हैं और इसी तरह आगे बढ़ते हैं तो क्षेत्रफल आधा हो जाएगा और आगे भी ऐसे ही।

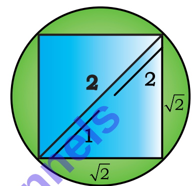


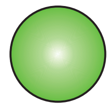
सबसे बड़े वर्ग का क्षेत्रफल : मध्य वर्ग का क्षेत्रफल : सबसे छोटे वर्ग का क्षेत्रफल = 4 : 2 : 1



क्षेत्रफल = 2 : 1

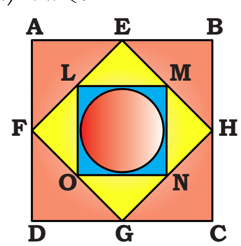
☞ वृत्त के क्षेत्रफल और वर्ग के क्षेत्रफल का अनुपात है:



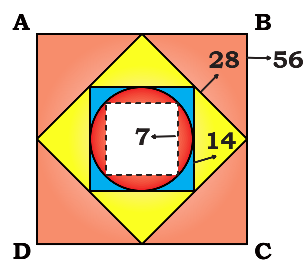


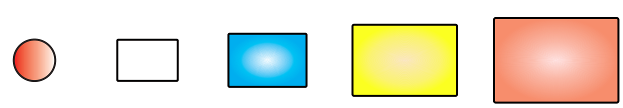
क्षेत्रफल = $\pi 1^2$	:	$(\sqrt{2})^2$
$= \pi$	:	2
$= \frac{22}{7}$	:	2
11	:	7

Ex. दी गई आकृति में, ABCD एक वर्ग है। EFGH, ABCD की भुजाओं के मध्य-बिंदुओं को मिलाकर बना एक वर्ग है। LMNO, EFGH की भुजाओं के मध्य-बिंदुओं को मिलाकर बना एक वर्ग है। LMNO के अंदर एक वृत्त बना है। यदि वृत्त का क्षेत्रफल 38.5 वर्ग सेमी है, तो वर्ग ABCD का क्षेत्रफल (वर्ग सेमी में) क्या है?



HINTS





11 : 7 : 14 : 28 : 56

↓ 11 → 38.5 सेमी^{2} ; ↓ 56 → 196 सेमी^{2}

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram @yct_publication

जब एक वृत्त की परिधि एक वर्ग के परिमाप के बराबर हो तो क्षेत्रफल का अनुपात 14 : 11 होगा।

Ex. जब एक तार को वर्ग के आकार में मोड़ा जाता है, तो उसके द्वारा घेरा गया क्षेत्रफल 5929 सेमी² होता है। यदि तार को वृत्त के आकार में मोड़ा जाए, तो तार द्वारा घेरा गया क्षेत्रफल कितना होगा?

HINTS दिया गया है,

$a^2 = 5929$ सेमी² और $2\pi R = 4a$

$\Rightarrow R = \frac{4a}{2\pi} = \frac{2a}{\pi}$

क्षेत्रफल $= \pi R^2 = \pi \times \frac{2a}{\pi} \times \frac{2a}{\pi} = \frac{4a^2}{\pi}$

$= \frac{4 \times 5929 \times 7}{22} = 7546$ सेमी²

वैकल्पिक विधि

	वर्ग	:	वृत्त
क्षेत्रफल का अनुपात →	11	:	14
	↓ ×539		↓ ×539
क्षेत्रफल →	5929		**7546**

वृत्त का क्षेत्रफल = 7546 सेमी²

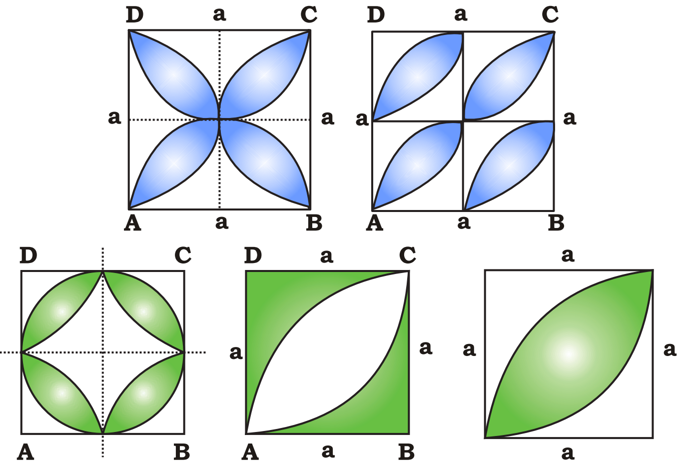
Ex. एक तांबे के तार को एक वर्ग के आकार में मोड़ा गया है और यह 30.25 सेमी² क्षेत्रफल घेरता है। यदि उसी तार को एक वृत्त बनाने के लिए मोड़ा जाए, तो वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

HINTS

	वर्ग	:	वृत्त
क्षेत्रफल का अनुपात →	11	:	14
	↓ ×2.75		↓ ×2.75
क्षेत्रफल →	30.25		**38.5**

वृत्त का क्षेत्रफल = 38.5 सेमी²

☞ आकृति के अनुसार छायांकित भाग का क्षेत्रफल



"प्रत्येक स्थिति में छायांकित भाग का क्षेत्रफल बराबर है"

प्रत्येक स्थिति में छायांकित भाग का क्षेत्रफल $= \frac{4}{7}a^2$

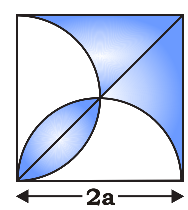
Ex. ABCD एक वर्ग है जिसकी भुजा 14 सेमी है, छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

HINTS छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल $= \frac{4}{7}a^2$

$= \frac{4}{7} \times 14 \times 14 = 112$ सेमी²

@apna_channels

Ex. यदि वर्ग की भुजा = 2a सेमी है, तो छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

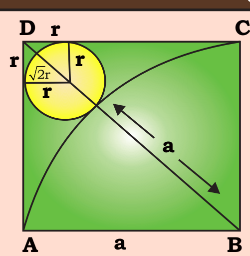


HINTS छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल = भुजा (2a) वाले वर्ग का क्षेत्रफल – 2 × त्रिज्या (a) वाले अर्धवृत्त का क्षेत्रफल + 2 त्रिज्या (a) वाले पत्ते का क्षेत्रफल = 2a²

महत्त्वपूर्ण परिणाम

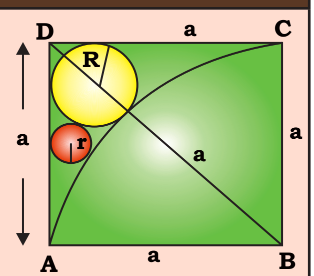
☞ ABCD भुजा 'a' का वर्ग है। AC एक वक्र है और त्रिज्या r का एक वृत्त खींचा गया है, तो

$r = \left(\sqrt{2}-1\right)^2 a$



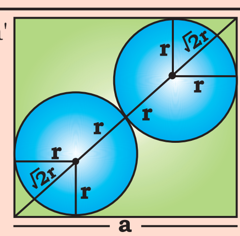
☞ ABCD भुजा 'a' का वर्ग है। AC एक वक्र है और त्रिज्या r और R के दो वृत्त खींचे गए हैं, तो

$\frac{1}{\sqrt{r}} = \frac{1}{\sqrt{R}} + \frac{1}{\sqrt{a}}$ $r = \frac{R}{2}$



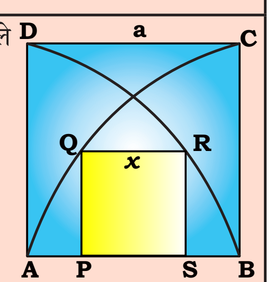
☞ जब समान त्रिज्या 'r' वाले दो वृत्तों को भुजा 'a' के एक वर्ग के अंदर रखा जाता है तो

$r = \frac{a\left(\sqrt{2}-1\right)}{\sqrt{2}}$



☞ ABCD और PQRS भुजाओं 'a' और x वाले वर्ग हैं। वक्र AC, BD, PQRS को Q और R पर काटते हैं।

$x = \frac{3a}{5}$



Join Telegram: @apna_rwa

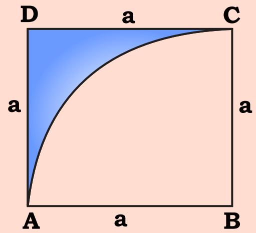
Join Telegram @yct_publication

छायांकित भाग का क्षेत्रफल

☞ यदि वर्ग की भुजा = a सेमी तो

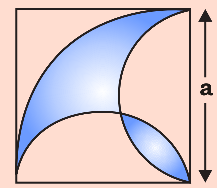
छायांकित भाग का क्षेत्रफल

$= \frac{a^2}{4}(4-\pi)$



☞ यदि वर्ग की भुजा = a सेमी तो

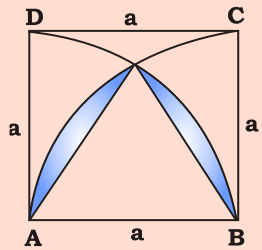
छायांकित भाग का क्षेत्रफल $= \frac{a^2(\pi-2)}{4}$



☞ निम्नलिखित आकृति में वर्ग की भुजा 'a' है।

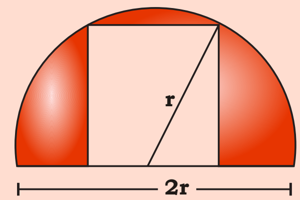
छायांकित भाग का क्षेत्रफल

$= 2\left(\frac{a^2\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}a^2\right)$



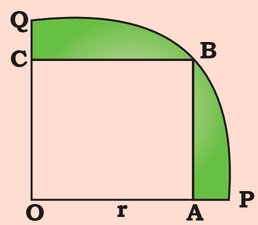
☞ त्रिज्या r के अर्धवृत्त के अन्दर खींचे जा सकने वाले सबसे बड़े वर्ग का क्षेत्रफल।

वर्ग का क्षेत्रफल $= \frac{4}{5}r^2$



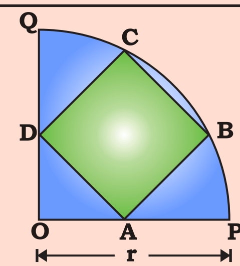
☞ त्रिज्या 'r' वाले वृत्त के चतुर्थांश में अंकित वर्ग का क्षेत्रफल (जैसा कि चित्र में दिखाया गया है)।

वर्ग का क्षेत्रफल $= \frac{r^2}{2}$



☞ त्रिज्या 'r' वाले वृत्त के चतुर्थांश में अंकित वर्ग का क्षेत्रफल (जैसा कि चित्र में दिखाया गया है)।

वर्ग का क्षेत्रफल $= \frac{2}{5}r^2$



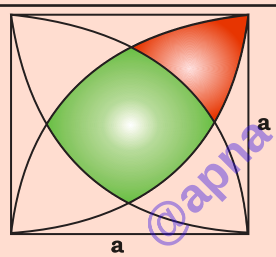
☞ आकृति के अनुसार छायांकित भाग का क्षेत्रफल

हरे भाग का क्षेत्रफल

$= \frac{a^2}{3}\{3(1-\sqrt{3})+\pi\}$

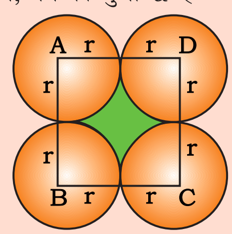
लाल भाग का क्षेत्रफल

$= \frac{a^2}{12}[\pi - 12 + 6\sqrt{3}]$



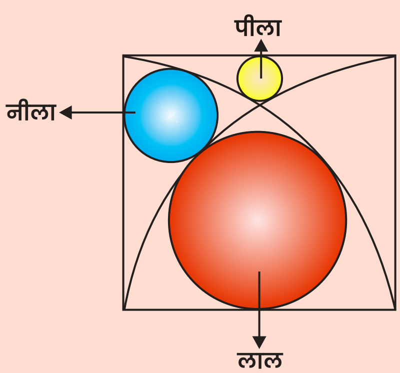
@apna_channels

☞ निम्नलिखित आकृति में, वर्ग की भुजा 'a' है



हरे भाग का क्षेत्रफल $= \frac{3a^2}{14} = r^2(4-\pi)$

☞ यदि वर्ग की भुजा = 'a'

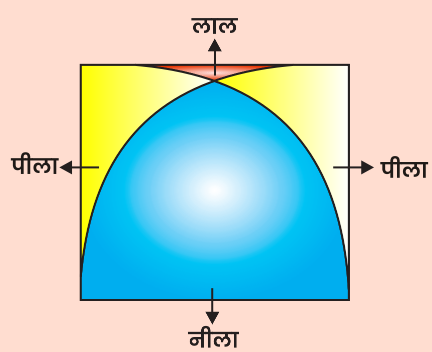


पीले वृत्त की त्रिज्या = $\frac{a}{16}$

नीले वृत्त की त्रिज्या = $\frac{a}{6}$

लाल वृत्त की त्रिज्या = $\frac{3a}{8}$

☞ निम्नलिखित आकृति में वर्ग की भुजा 'a' है।



नीले भाग का क्षेत्रफल $= \frac{\pi a^2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

पीले भाग का क्षेत्रफल $= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 - \frac{\pi a^2}{12}\right)$

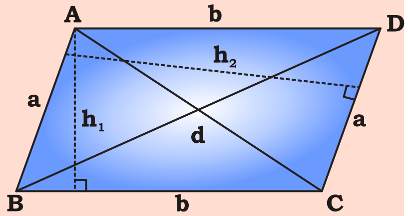
लाल भाग का क्षेत्रफल $= a^2 - \frac{\pi a^2}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram @yct_publication

समानांतर चतुर्भुज

समांतर चतुर्भुज ABCD में, मान लीजिए भुजा AB = a सेमी और BC = b सेमी है, तो



- AB = CD और BC = AD
- प्रत्येक विकर्ण AC या BD समांतर चतुर्भुज को सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करता है।
- $AC^2 + BD^2 = 2(a^2 + b^2)$
- परिमाप = 2(a + b)
- क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई = $a \times h_2 = b \times h_1$
- एक विकर्ण की लंबाई d है तो, समांतर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल $= 2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-d)}$

  जहाँ, $s = \dfrac{a+b+d}{2}$

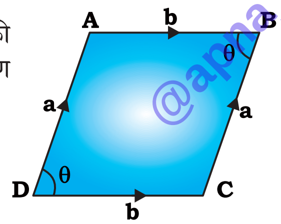
समांतर चतुर्भुज के प्रकार

1. **आयत** - सभी कोण 90° के होते हैं, विकर्ण बराबर होते हैं।
2. **समचतुर्भुज** - सभी भुजाएँ बराबर होती हैं, विकर्ण लंबवत होते हैं।
3. **वर्ग** - सभी भुजाएँ और कोण बराबर होते हैं। यह एक समचतुर्भुज और एक आयत होता है।

Ex. एक समांतर चतुर्भुज ABCD की भुजा AB, 24 सेमी और भुजा AD = 16 सेमी है। AB और CD के बीच की दूरी 10 सेमी है, तो AD और BC के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

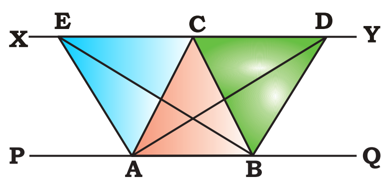
HINTS क्षेत्रफल ⇒ $24 \times 10 = 16 \times x \Rightarrow x = 15$ सेमी

☞ ABCD एक समांतर चतुर्भुज है जिसकी भुजाएँ a और b हैं तथा उनके बीच का कोण θ है, तो



$$\text{क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} ab \sin(\theta)$$

☞ समान आधार वाले सभी त्रिभुजों तथा समान्तर रेखाओं के बीच का क्षेत्रफल समान होता है।

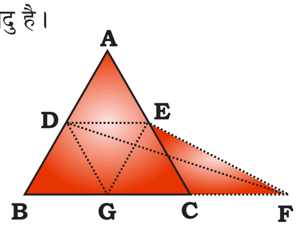


यदि XY || PQ, तो

ΔABC का क्षेत्रफल = ΔABD का क्षेत्रफल = ΔABE का क्षेत्रफल

Ex. ΔABC में, D और E क्रमशः भुजाओं AB और AC के मध्य बिंदु हैं। BC को F तक इस प्रकार बढ़ाया जाता है कि CF = BC है। तो ΔDEF और ΔABC के बीच क्या संबंध है?

HINTS मान लीजिए G, BC का मध्य बिंदु है।



∴ ΔDEG का क्षेत्रफल $= \dfrac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{4}$

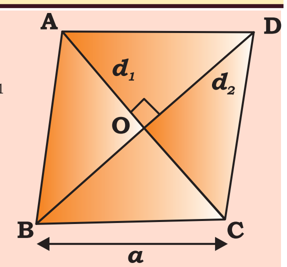
यदि D और E क्रमशः AB और AC के मध्य बिंदु हैं तो DE || BC || BF

ΔDEF का क्षेत्रफल = ΔDEG का क्षेत्रफल (समान आधार वाली समान्तर रेखाओं के बीच त्रिभुज)

$= \dfrac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{4}$

समचतुर्भुज

समचतुर्भुज ABCD में, मान लीजिए भुजा BC = a, AC = d_1 और BD = d_2, तो



- AB = BC = CD = DA = a
- भुजा (a) $= \dfrac{1}{2}\sqrt{d_1^2 + d_2^2}$ और,

  $4a^2 = d_1^2 + d_2^2$
- परिमाप = 4a
- क्षेत्रफल $= \dfrac{1}{2} \times d_1 \times d_2$
- एक समचतुर्भुज का परिमाप 2p इकाई है तथा विकर्णों की लंबाइयों का योग m इकाई है, तो समचतुर्भुज का क्षेत्रफल

  $= \dfrac{1}{4}(m^2 - p^2)$ वर्ग इकाई

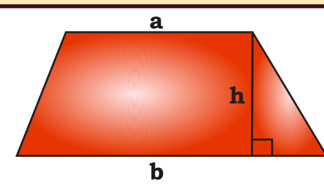
Ex. एक समचतुर्भुज की प्रत्येक भुजा की लंबाई 13 सेमी है और एक विकर्ण 24 सेमी है। समचतुर्भुज का क्षेत्रफल (वर्ग सेमी में) क्या है?

HINTS $4 \times 13 \times 13 = 24^2 + d_2^2 \Rightarrow d_2 = 10$ सेमी

क्षेत्रफल $= \dfrac{1}{2} \times 24 \times 10 = 120$ सेमी²

@apna_channels

समलम्ब चतुर्भुज



$$\text{समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times \text{समांतर भुजाओं का योग} \times \text{ऊँचाई}$$

Ex. एक समलम्ब चतुर्भुज की समांतर भुजाओं की लंबाई का अनुपात 3 : 2 है। उनके बीच की न्यूनतम दूरी 15 सेमी है। यदि समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल 450 वर्ग सेमी है, तो समांतर भुजाओं की लंबाई का योग क्या होगा?

HINTS समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \dfrac{1}{2} \times$ समांतर भुजाओं का योग × ऊँचाई

$\Rightarrow 450 = \dfrac{1}{2}(2x + 3x) \times 15$

$\Rightarrow 5x = 30 \times 2 \Rightarrow x = 12$

∴ समानांतर भुजाओं की लंबाई का योग

$= 5x = 5 \times 12 = 60$ सेमी

Ex. एक दीवार समलम्ब चतुर्भुज के आकार की है जिसकी ऊँचाई 4 मीटर है और समान्तर भुजाएँ क्रमशः 3 मीटर और 5 मीटर हैं। दीवार को रंगने की लागत क्या है, यदि रंगने की दर 25 प्रति वर्ग मीटर है?

HINTS समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \dfrac{1}{2}(3 + 5) \times 4 = 16$ मी²

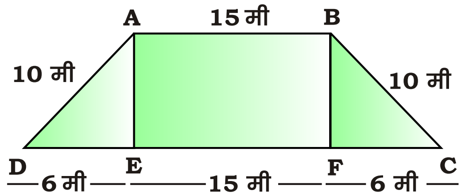
पेंटिंग की कुल लागत = 16 × 25 = ₹400

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. एक समलम्ब चतुर्भुज ABCD में, AB और DC एक-दूसरे के समांतर हैं और उनके बीच 8 मीटर की लम्बवत दूरी है। साथ ही, (AD) = (BC) = 10 मीटर, और (AB) = 15 मीटर < (DC) है। समलम्ब चतुर्भुज ABCD का परिमाप (मीटर में) क्या है?

HINTS



पाइथागोरस प्रमेय से, DE = $\sqrt{AD^2 - AE^2}$

= $\sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6$ मी

समलम्ब चतुर्भुज का परिमाप

= AD + DC + BC + AB

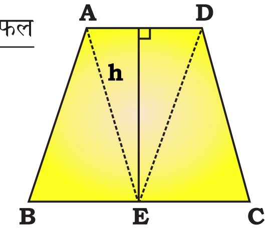
=10 + 27 +10 + 15

= 62 मी

Ex. ABCD एक समलम्ब चतुर्भुज है जिसकी AD और BC समांतर भुजाएँ हैं, E, BC पर स्थित एक बिंदु है। ABCD के क्षेत्रफल का ΔAED के क्षेत्रफल से अनुपात क्या है?

HINTS $\frac{\text{समलम्ब चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल}}{\Delta\text{AED का क्षेत्रफल}}$

$= \frac{\frac{1}{2}(AD + BC) \times h}{\frac{1}{2} AD \times h} = \frac{AD + BC}{AD}$



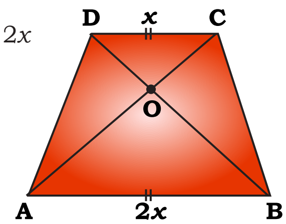
Ex. ABCD एक समलम्ब चतुर्भुज है जिसमें AB || DC और AB = 2CD है। विकर्ण AC और BD बिंदु O पर मिलते हैं। ΔAOB और ΔCOD के क्षेत्रफलों का अनुपात क्या है?

HINTS माना CD = x तो AB = 2 CD = $2x$

ΔCOD ~ ΔAOB

$\frac{\Delta\text{AOB का क्षेत्रफल}}{\Delta\text{COD का क्षेत्रफल}} = \frac{AB^2}{CD^2}$

$= \frac{(2x)^2}{x^2} = 4 : 1$



@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

अध्याय 03

त्रिविमीय क्षेत्रमिति

परिचय

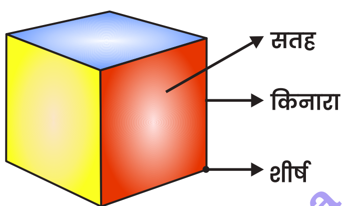
एक त्रि-आयामी आकृति (3-D Solid) वह ठोस आकृति होती है जिसमें लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई (या मोटाई) होती है, जो कि समतल द्वि-आयामी (2-D) आकृतियों से भिन्न होती है। ये ठोस आकृतियाँ सपाट परतों से घिरी होती हैं, जिन्हें सतह (Faces) कहा जाता है। जब दो सतह आपस में मिलती हैं, तो वे एक किनारा (Edge) बनाती हैं, और जब दो या अधिक किनारे मिलते हैं, तो वे शीर्ष बिंदु (Vertices) बनाते हैं।

किसी भी त्रि-आयामी ठोस आकृति की संरचना को समझाने के लिए महान गणितज्ञ यूलर (Euler) ने शीर्ष बिंदुओं (V), किनारों (E) और सतहों (F) के बीच एक गणितीय संबंध प्रस्तुत किया। इस संबंध को **यूलर का सूत्र (Euler's Formula)** कहा जाता है, जो इस प्रकार है:

$$\boxed{V + F = E + 2}$$

इसका अर्थ है कि प्रत्येक त्रि-आयामी ठोस आकृति जो एक उत्तल बहुभुज (Convex Polyhedron) होती है, उसमें शीर्ष बिंदुओं (Vertices) और सतहों (Faces) का योग हमेशा किनारों (Edges) की संख्या से दो अधिक होता है।

इसे घन के उदाहरण के माध्यम से समझते है:



V= 8, F = 6 तथा E = 12

यूलर के नियम से, V+F = E + 2

⇒ 8 + 6 = 12+2

⇒ 14 = 14

पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल

यह 3D आकृति की वक्र सतह के क्षेत्रफल को संदर्भित करता है। इसका उपयोग आमतौर पर बेलन, शंकु और गोले जैसी वस्तुओं के लिए किया जाता है। एक बेलन का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल गोलाकार शीर्ष और तल को छोड़कर घुमावदार भाग का क्षेत्रफल है।

कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल

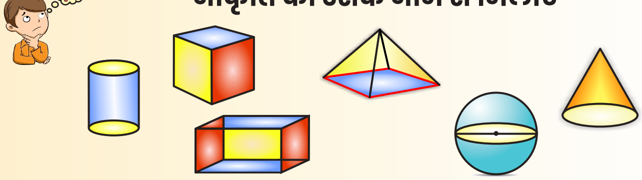
किसी ठोस का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल और आधार और शीर्ष के क्षेत्रफलों का योग है।

कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल + ऊपरी सतह का क्षेत्रफल + निचली सतह का क्षेत्रफल

आयतन

यह किसी वस्तु द्वारा घेरे गए स्थान की मात्रा को संदर्भित करता है, जिसे घन इकाइयों में मापा जाता है। केवल 3-D वस्तुओं में ही आयतन होता है।

आकृति को उसके नाम से मिलाएं

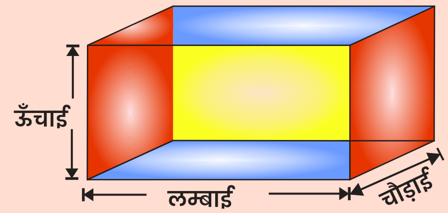


गोला | शंकु | पिरामिड

घनाभ | बेलन | घन

घनाभ

घनाभ एक आयताकार ठोस है जिसमें छह आयताकार सतहें होती हैं। इसे कभी-कभी आयताकार समानान्तर चतुर्भुज भी कहा जाता है।



लंबाई (l), चौड़ाई (b) और ऊंचाई (h) वाले घनाभ के लिए

(i) पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल = चारों दीवारों का क्षेत्रफल = $2(l + b)\,h$

(ii) कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2(lb + bh + hl)$

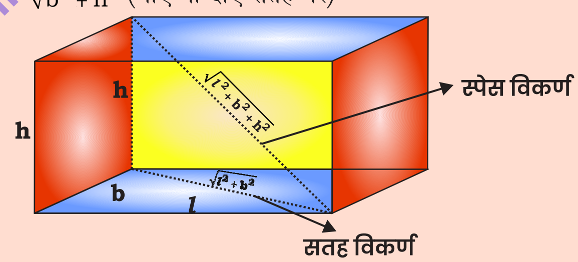
(iii) घनाभ का आयतन = $l \times b \times h$

(iv) घनाभ का सतह (face) विकर्ण

= $\sqrt{l^2 + b^2}$ (नीचे या ऊपर के सतह पर)

= $\sqrt{l^2 + h^2}$ (सामने या पीछे के सतह पर)

= $\sqrt{b^2 + h^2}$ (बाएँ या दाएँ सतह पर)

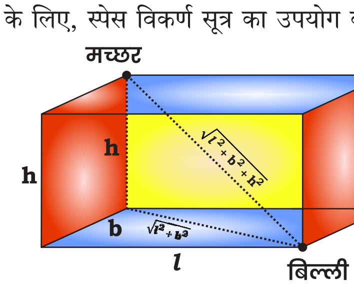


(v) स्पेस विकर्ण = $\sqrt{l^2 + b^2 + h^2}$ (सबसे लम्बा)

किसी कमरे में रखी जा सकने वाली सबसे बड़ी छड़ की लम्बाई = स्पेस विकर्ण = $\sqrt{l^2 + b^2 + h^2}$

Ex. 7 × 3 × 2.5 मी आयाम वाले एक घनाभीय कमरे के ऊपरी कोने पर बैठा एक मच्छर कमरे के सबसे निचले कोने पर सो रही एक बिल्ली को देखता है। बिल्ली को काटने के लिए मच्छर को कितनी दूरी तक उड़ना होगा?

HINTS घनाभ के आर-पार सबसे छोटी सीधी रेखा दूरी (एक कोने से विपरीत कोने तक) ज्ञात करने के लिए, स्पेस विकर्ण सूत्र का उपयोग करें। यदि घनाभ की भुजाएँ a, b, और c हैं, तो दूरी $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ होगी।



दूरी = $\sqrt{7^2 + 3^2 + 2.5^2}$

= $\sqrt{49 + 9 + 6.25}$

= $\sqrt{64.25} \simeq 8.01$ मी

(क्योंकि मच्छर हवा में स्वतंत्र रूप से उड़ सकता है, उसे दीवारों या सतहों के साथ चलने की जरूरत नहीं होती वह सीधे 3D स्थान में सबसे छोटा सीधा रास्ता तय करता है।)

@apna_channels

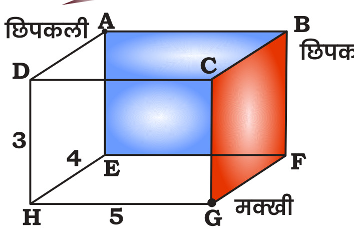
Join Telegram: @apna_rwa

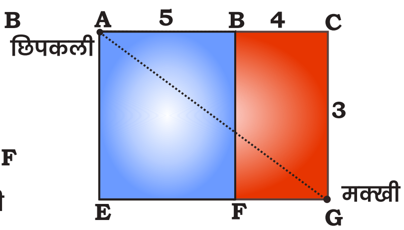
Join Telegram @yct_publication

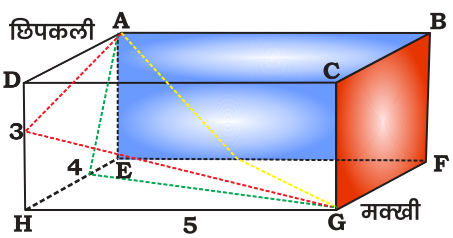
सामान्यतः यदि किसी घनाभ के आयाम a, b, c हों, जहाँ $a \ge b \ge c$ तो उसकी सतह के साथ चलते हुए प्राप्त की जाने वाली सबसे छोटी दूरी $\sqrt{(b+c)^2+a^2}$ होगी। (इसे यदि चाहें तो बीजगणितीय रूप से सिद्ध किया जा सकता है)।

Ex. एक छिपकली 5 × 4 × 3 मी के आयताकार कमरे के एक ऊपरी कोने में बैठी है और वह कमरे के सबसे दूर के निचले कोने में सोती हुई एक मक्खी को देखती है। छिपकली को मक्खी तक पहुँचने के लिए कितनी दूरी रेंगनी होगी?

HINTS







दो आसन्न सतहों को एक सपाट आयत में खोलें, जिससे 3D एक सीधी 2D रेखा में बदल जाए।

पथ 1 (हरी रेखा) = A → E → G

$AG = \sqrt{(4+3)^2+5^2} = \sqrt{74} \approx 8.6$ मी (सबसे छोटा)

पथ 2 (लाल रेखा) = A → D → H → G

$AG = \sqrt{(5+3)^2+4^2} = \sqrt{80} \approx 8.94$ मी (मध्यम दूरी)

पथ 3 (बैंगनी रेखा) = A → B → F → G

$AG = \sqrt{(5+4)^2+3^2} = \sqrt{90} \approx 9.48$ मी (सबसे लम्बी)

इसलिए, सतहों के साथ रेंगते हुए सबसे छोटा मार्ग = 8.6 मी (ऊँचाई + चौड़ाई वाले सतहों को खोलकर)

वैकल्पिक विधि

रंगकर तय की गई सबसे छोटी दूरी = $\sqrt{(b+c)^2+a^2}$ $(a \ge b \ge c)$

$\sqrt{(4+3)^2+5^2} = \sqrt{74} \approx 8.6$ m

(मच्छर के विपरीत, छिपकली उड़ नहीं सकती। मक्खी तक पहुंचने के लिए उसे कमरे की सतह पर रेंगना पड़ता है। इसलिए हमें घनाभ की दीवारों के साथ रेंगने का सबसे छोटा पथ खोजना होगा।)

संलग्न सतहों वाला घनाभ

माना एक घनाभ के आयाम हैं:

लम्बाई = l, चौड़ाई = b, ऊँचाई = h

माना एक कोने पर मिलने वाली तीन संलग्न सतहों के क्षेत्रफल इस प्रकार हैं:

P = lb (आधार क्षेत्रफल), Q = bh (पार्श्व क्षेत्रफल), R = hl (मुख्य सतह का क्षेत्रफल)

आयतन (V = l × b × h), P, Q, R का प्रयोग करने पर

P × Q × R = (lb) × (bh) × (hl) = $l^2b^2h^2$

आयतन = = $l$bh = $\sqrt{PQR}$

यदि किसी घनाभ की तीन संलग्न सतहों के क्षेत्रफल ज्ञात हों, तो आप उसके आयतन को सीधे निम्नलिखित सूत्र से ज्ञात कर सकते हैं:

आयतन = $\sqrt{PQR}$

Ex. एक घनाभ के तीन आसन्न फलकों का क्षेत्रफल 32 सेमी², 24 सेमी² और 48 सेमी² है। घनाभ का आयतन ज्ञात कीजिए?

HINTS आयतन = $\sqrt{32 \times 24 \times 48}$ = 192 सेमी³

☞ घनाभ के विकर्ण और कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल में सम्बंध

$(l + b + h)^2 = l^2 + b^2 + h^2 + 2(lb + bh + hl)$

या (विमाओं का योगफल)² = (विकर्ण)² + (कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल)

Ex. एक घनाभ की लंबाई, चौड़ाई और ऊंचाई का योग 20 सेमी है। यदि विकर्ण की लंबाई 12 सेमी है, तो घनाभ का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करें।

HINTS (विमाओं का योगफल)² = (विकर्ण)² + (कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल)

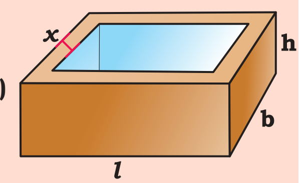
⇒ (20)² = 12 × 12 + कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल

⇒ कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = 256 सेमी²

☞ खोखले घनाभ का आयतन

= $l$bh – (l – 2x) (b – 2x) (h – 2x)

जहाँ, x घनाभ की दीवार की मोटाई है।



@apna_channels

Ex. एक आयताकार बक्से की विमाएँ क्रमशः 20 सेमी × 12 सेमी × 10 सेमी है। लकड़ी की मोटाई 1 सेमी है। बक्से को बनाने में लगी लकड़ी का आयतन ज्ञात करें।

HINTS खोखले घनाभ का आयतन

= 20 × 12 × 10 – (20 – 2) (12 – 2) (10 – 2) = 960 सेमी³

Ex. एक घनाभ (cuboid) की माप 30 सेमी × 25 सेमी × 20 सेमी है। यदि इस घनाभ का द्रव्यमान 15 किग्रा है, तो इसका घनत्व ग्राम/सेमी³ में ज्ञात कीजिए।

HINTS

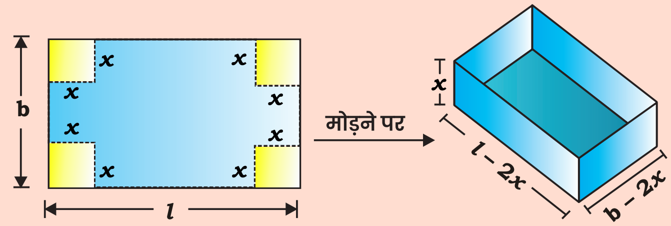
आयतन = 30 × 25 × 20 = 15000 सेमी³

द्रव्यमान = 15 किग्रा = 15000 ग्राम

घनत्व = $\frac{\text{द्रव्यमान}}{\text{आयतन}} = \frac{15000}{15000}$ = 1 ग्राम/सेमी³

आयताकार शीट से खुला डिब्बा बनाना

चार कोनों पर x इकाई भुजा वाले बराबर वर्गों को काटकर तथा शेष को मोड़कर एक खुला आयताकार बॉक्स बनाया जा सकता है।



आयताकार डिब्बे का आयतन = (l – 2x) (b – 2x)x

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram @yct_publication

Ex. 25 सेमी × 20 सेमी आयाम वाली एक आयताकार शीट के चारों कोनों से 2 सेमी भुजा वाला वर्ग काट दिया जाता है और एक बॉक्स बनाया जाता है। बॉक्स का आयतन है

HINTS आयताकार बॉक्स का आयतन = $(l - 2x)(b - 2x)x$

$= (25 - 2 \times 2)(20 - 2 \times 2) \times 2 = 21 \times 16 \times 2 = 672$ सेमी^{3}

Ex. चारों कोनों से 3 सेमी भुजा वाला वर्ग एक 24 सेमी लंबे तथा 18 सेमी-चौड़े आयताकार शीट से काट दिया गया तथा शेष भाग को मोड़कर एक खुला बक्सा बनाया गया। बक्से का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करें।

HINTS खुले हुए बॉक्स का पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= (l - 2x)(b - 2x) + 2(b - 2x)(x) + 2(x)(l - 2x)$

$= (24 - 2 \times 3)(18 - 2 \times 3) + 2(18 - 2 \times 3)(3) + 2(3)(24 - 2 \times 3)$

$= 18 \times 12 + 6 \times 12 + 6 \times 18 = 216 + 72 + 108 = 396$ सेमी^{2}

वैकल्पिक विधि

खुले हुए बॉक्स का पृष्ठीय क्षेत्रफल = आयत का क्षेत्रफल – 4 × 3 सेमी भुजा वाले वर्ग का क्षेत्रफल $= 24 \times 18 - 4 \times 3^2 = 396$ सेमी^{2}

> खुले बॉक्स की स्थिति में, ऊपरी सतह का क्षेत्रफल (lb) घटाया जाता है। इसी प्रकार, किसी कमरे की पेंटिंग की लागत की गणना करते समय, फर्श का क्षेत्रफल (lb) घटाया जाता है और शेष सतह क्षेत्रफल ($lb + 2bh + 2hl$) को प्रति इकाई क्षेत्रफल की लागत से गुणा किया जाता है।

Ex. एक कमरे की लंबाई, चौड़ाई और ऊंचाई क्रमशः 10 मी, 8 मी और 6 मी है। ₹7.50 प्रति वर्ग मीटर की दर से कमरे की दीवारों और छत पर सफेदी करने की लागत ज्ञात करें।

(a) ₹2,220 (b) ₹1,850 (c) ₹2,150 (d) ₹2,000

HINTS क्षेत्रफल $= (10 \times 8 + 2 \times 8 \times 6 + 2 \times 6 \times 10) = 296$ मी^{2}

सफेदी करने की लागत $= 296 \times 7.5 =$ ₹2220

> क्षेत्रमिति में, यदि प्रति इकाई क्षेत्रफल लागत एक अभाज्य संख्या या अभाज्य संख्या का गुणज है, तो अंतिम उत्तर भी उस अभाज्य संख्या का गुणज होगा, यदि यह 9 या 9 का गुणज है, तो सही उत्तर के अंकों का योग 9 होगा।
> उपर्युक्त उदाहरण में, 7.5 अभाज्य संख्या 3 का गुणज है, अतः अंतिम उत्तर भी 3 का गुणज होगा। दिए गए विकल्पों में से केवल विकल्प (a) ही 3 का गुणज है।

☞ एक आयताकार टैंक 'l' मीटर लंबा और 'h' मीटर गहरा है। यदि टैंक से 'x' घन मीटर पानी निकला जाता है, तो टैंक में पानी का स्तर 'd' मीटर कम हो जाता है, तो टैंक में रखे जा सकने वाले पानी की मात्रा $\left(\frac{x \times h}{d}\right)$ घन मीटर होती है तथा टंकी की चौड़ाई $\left(\frac{x}{ld}\right)$ मीटर होती है।

Ex. एक आयताकार टैंक 50 मी लंबा और 29 मी गहरा है। यदि टैंक से 1000 घन मीटर पानी निकाला जाता है, तो टैंक में पानी का स्तर 2 मी कम हो जाता है। टैंक कितने घन मीटर पानी रख सकता है और टैंक की चौड़ाई भी ज्ञात करें।

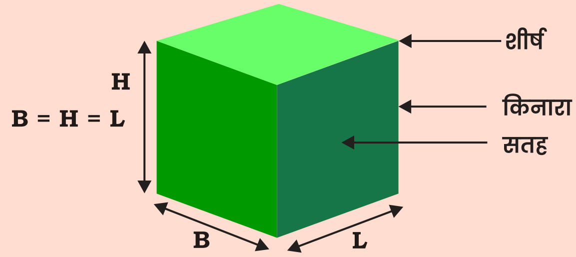
HINTS टैंक का आयतन $= \frac{1000 \times 29}{2} = 14500$ मी^{3}

> हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि भले ही आयताकार टैंक की लंबाई नहीं दी गई हो तो भी टैंक के आयतन की गणना की जा सकती है। टैंक की चौड़ाई ज्ञात करने के लिए लंबाई की आवश्यकता है लेकिन टैंक की ऊंचाई की नहीं।

$\therefore$ टैंक की चौड़ाई $= \frac{1000}{50 \times 2} = 10$ मी

घन

एक ठोस जिसकी सभी छह सतहें वर्गाकार हों, घन कहलाती है। इस प्रकार एक घन की लंबाई, चौड़ाई और ऊंचाई बराबर है।



माना 'a' घन की भुजा है

(i) पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4a^2$

(ii) कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 6a^2$

(iii) आयतन $= a^3 = \left(\sqrt{\frac{\text{कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल}}{6}}\right)^3$

(iv) विकर्ण $= \sqrt{3}a$

(v) सतह विकर्ण $= \sqrt{2}\,a$

(vi) यदि घन का विकर्ण दिया गया है तो घन का आयतन $= \left(\frac{\text{विकर्ण}}{\sqrt{3}}\right)^3$

Ex. एक घन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल 1728 सेमी^{2} है। इसका आयतन ज्ञात कीजिए।

@apna_channels

HINTS माना, घन की भुजा = a

घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 6a^2$

$\Rightarrow 6a^2 = 1728$

$\Rightarrow a = 12\sqrt{2}$

$\therefore$ घन का आयतन $= a^3 = \left(12\sqrt{2}\right)^3 = 3456\sqrt{2}$ सेमी^{3}

वैकल्पिक विधि

आयतन $= \left(\sqrt{\frac{\text{कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल}}{6}}\right)^3 = \left(\sqrt{\frac{1728}{6}}\right)^3$

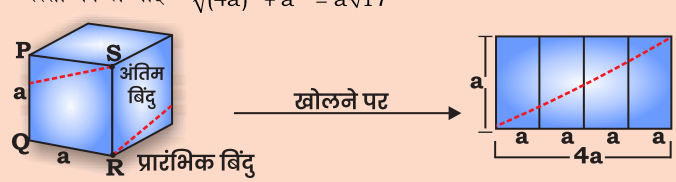
$= \left(\sqrt{288}\right)^3 = \left(12\sqrt{2}\right)^3$

$= 3456\sqrt{2}$ सेमी^{3}

Ex. एक घन के सबसे लंबे विकर्ण की लंबाई $7\sqrt{3}$ सेमी है। इसका आयतन (सेमी^{3} में) ज्ञात कीजिए।

HINTS घन का आयतन $= \left(\frac{\text{विकर्ण}}{\sqrt{3}}\right)^3 = \left(\frac{7\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)^3 = 343$ सेमी^{3}

> रस्सी इस आयत के निचले बाएँ कोने (बिंदु R) से ऊपरी दाएँ कोने (बिंदु S) तक तिरछी दिशा में जाती है।
> रस्सी की लम्बाई $= \sqrt{(4a)^2 + a^2} = a\sqrt{17}$



Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram @yct_publication

Ex. एक रस्सी घन की भुजाओं और सतहों के किनारे के साथ दो पूरे चक्कर लगाती है। यह नीचे के एक बिंदु से शुरू होकर, ठीक उसी के ऊपर स्थित बिंदु पर समाप्त होती है। रस्सी की लंबाई ज्ञात कीजिए।

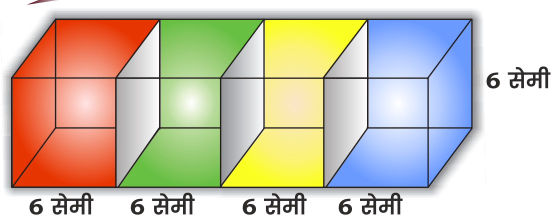
HINTS जब इसे खोला जाता है, तो यह एक आयत का आकार लेता है जिसकी चौड़ाई 8a (4 सतहें × 2 चक्कर) और ऊँचाई a होती है।

रस्सी की लम्बाई = $\sqrt{(8a)^2 + a^2} = a\sqrt{65}$

महत्वपूर्ण स्थिति I :-
जब एक घनाभ को बनाने के लिए n घनों (भुजा = a) को जोडा जाता है।
(i) घनाभ की लम्बाई = n × a
(ii) घनाभ की चौड़ाई तथा ऊँचाई = a
(iii) घनाभ का आयतन = $n \times a^3$
(iv) घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2a^2 (2n+1)$

Ex. 216 घन सेमी आयतन वाले चार घनों को एक दूसरे से जोड़कर एक नया ठोस बनाया गया है। नए ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल है:

HINTS घन का आयतन = $a^3 \Rightarrow a^3 = 216 \Rightarrow a = 6$



जब 4 घनों को आपस में जोड़ा जाता है तो लंबाई = 4 × 6 = 24 सेमी, चौड़ाई = ऊंचाई = 6 सेमी

घनाभ का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2(lb + bh + hl)$
= 2 × (24 × 6 + 6 × 6 + 6 × 24)
= 2 × (144 + 36 + 144) = 2 × 324 = 648 सेमी^{2}

वैकल्पिक विधि

घन का आयतन $(a)^3 = 216 \Rightarrow a = 6$ सेमी
घनों की संख्या (n) = 4
घनाभ की लम्बाई = n × a = 4 × 6 सेमी = 24 सेमी
ऊँचाई = चौड़ाई = 6 सेमी
घनाभ का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2a^2 (2n + 1)$
= $2 \times 6^2 (2 \times 4 + 1)$ = 648 सेमी^{2}

महत्वपूर्ण स्थिति II :-
जब न्यूनतम n घनों को बनाने के लिए किसी घनाभ को काटा जाता है।
(i) घन की भुजा = घनाभ की भुजाओं का म.स.प.
(ii) $n = \frac{\text{घनाभ का आयतन}}{\text{घन का आयतन}}$

Ex. लंबाई 20 सेमी, चौड़ाई 15 सेमी और ऊँचाई 10 सेमी के आयताकार ब्लॉक को बराबर घनों की सटीक संख्या में काट दिया जाता है। घनों की कम से कम संभव संख्या होगी।

HINTS घन की भुजा = (20, 15, 10) का म.स.प. = 5

$n = \frac{20 \times 15 \times 10}{5 \times 5 \times 5} = 24$

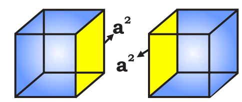
महत्वपूर्ण स्थिति III :-
जब एक घन को बनाने के लिए न्यूनतम n घनाभों को जोड़ा जाता है।
(i) घन की भुजा = घनाभ की भुजाओं का ल.स.प.
(ii) $n = \frac{\text{घन का आयतन}}{\text{घनाभ का आयतन}}$

Ex. 6 सेमी, 4 सेमी और 3 सेमी आयाम का एक घनाभ है। न्यूनतम ऐसे घनाभों को एक घन बनाने के लिए व्यवस्थित किया जाता है। घन का आयतन ज्ञात कीजिए।

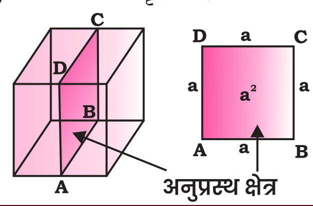
HINTS घन की भुजा = (6, 4, 3) का ल.स.प. = 12
घन का आयतन = 12^3 = 1728 सेमी^{3}

क्या आप जानते हैं ?

(i) घनों का जोड़: यदि हम दो घनों को जोड़ते हैं, तो उनकी दो सतहें समाप्त हो जाती हैं।

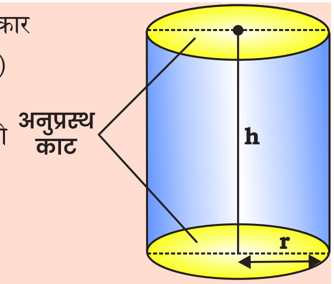


कुल वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = $6a^2 + 6a^2 - a^2 - a^2 = 10a^2$
(ii) n कट लगाने पर हमें (n + 1) घनाभ प्राप्त होते हैं।
कुल वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल में हुई वृद्धि = $2na^2$
इन (n + 1) भागों का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2a^2 (n+3)$



समवृत्तीय बेलन

एक ठोस जिसका अनुप्रस्थ काट सम वृत्ताकार होता है, उसे बेलन (या लम्बवृत्तीय बेलन) कहा जाता है।
मान लीजिए r वृत्ताकार अनुप्रस्थ काट की त्रिज्या है और h बेलन की ऊंचाई है, तो



(i) अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल = πr^2
(ii) अनुप्रस्थ काट की परिधि = $2\pi r$
(iii) वक्र (पार्श्व) पृष्ठीय क्षेत्रफल = अनुप्रस्थ काट की परिधि × ऊंचाई = $2\pi rh$
(iv) सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = वक्र (पार्श्व) पृष्ठीय क्षेत्रफल + 2 × अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल = $2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(r + h)$
(v) आयतन = अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल × ऊंचाई = $\pi r^2 h$
(vi) कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल से अनुपात = $\frac{h+r}{h}$

Ex. एक बेलन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल क्या है जिसकी आधार त्रिज्या 7 सेमी तथा ऊंचाई 5 सेमी है?

HINTS r = 7 सेमी, h = 5 सेमी
बेलन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2\pi r(h + r)$
= $2 \times \frac{22}{7} \times 7 (7 + 5) = 44 \times 12 = 528$ सेमी^{2}

Ex. यदि एक बेलन की ऊंचाई और व्यास क्रमशः 12 सेमी और 28 सेमी है तो कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल और वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल का अनुपात ज्ञात कीजिए

HINTS h = 12 सेमी, $r = \frac{28}{2}$ = 14 सेमी

$$\frac{TSA}{CSA} = \frac{h+r}{h} = \frac{12+14}{12} = \frac{26}{12} = \frac{13}{6}$$

Ex. यदि एक बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल 880 सेमी^{2} है तो उसकी ऊँचाई तथा त्रिज्या का गुणनफल क्या है?

HINTS वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2\pi rh$
$\Rightarrow 2 \times \frac{22}{7} \times rh = 880 \Rightarrow rh = 140$ सेमी^{2}

@apna_channels
Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram @yct_publication

> जब आयतन, CSA और TSA 11 का गुणज हों तो यह आवश्यक है कि त्रिज्या या ऊँचाई 7 का गुणज होगी।

(i) यदि पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल (c) तथा आयतन (v) दिया गया हो तो त्रिज्या का ऊंचाई से अनुपात है।

$$\frac{r}{h} = \frac{8\pi V^2}{c^3}$$

Ex. एक बेलनाकार स्तंभ का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल (CSA) 264 मी² है और इसका आयतन (V) 924 मी³ है। इसके व्यास और इसकी ऊँचाई का अनुपात ज्ञात कीजिए।

HINTS $\frac{\text{व्यास}}{\text{ऊँचाई}} = \frac{2r}{h} = \frac{2\times 8\pi V^2}{(CSA)^3} = \frac{2\times 8\times 22\times 924\times 924}{7\times 264\times 264\times 264} = \frac{7}{3}$

(ii) यदि पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल (c) तथा ऊंचाई (h) दिया गया हो तो बेलन का आयतन है।

$$V = \frac{c^2}{4\pi h}$$

Ex. 16 सेमी ऊंचाई का एक लंब वृत्तीय बेलन 16 सेमी × 22 सेमी आकार के एक आयताकार टिन की पतली पन्नी से ढका हुआ है। बेलन का आयतन है:

HINTS यदि बेलन को टिन की पन्नी से ढका गया है तो बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल टिन की पन्नी के क्षेत्रफल के बराबर होगा।

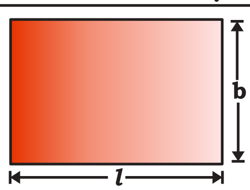
वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = 16 सेमी × 22 सेमी

h = 16 सेमी

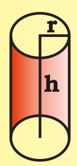
आयतन = $\frac{c^2}{4\pi h} = \frac{16\times 22\times 16\times 22\times 7}{4\times 22\times 16}$ = 616 सेमी³

एक आयताकार शीट को मोड़कर और घुमाकर बेलन बनाना

आयताकार शीट को मोड़ने पर



लंबाई के साथ मोड़ना

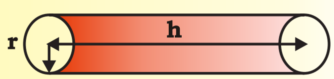


h = b

$2\pi r = l$

$\Rightarrow r = \frac{l}{2\pi}$

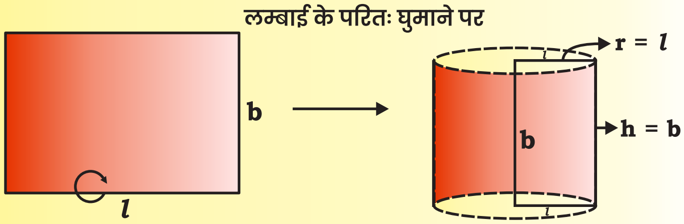
चौड़ाई के साथ मोड़ना



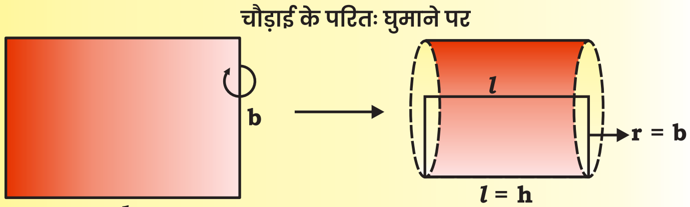
$h = l,\ 2\pi r = b \Rightarrow r = \frac{b}{2\pi}$

आयताकार शीट को घुमाने पर

लम्बाई के परितः घुमाने पर



चौड़ाई के परितः घुमाने पर



Ex. 22 सेमी × 12 सेमी आयाम वाली एक आयताकार कागज की शीट को उसकी लंबाई के साथ एक बेलन के रूप में मोड़ा जाता है। इस बेलन का आयतन कितना होगा?

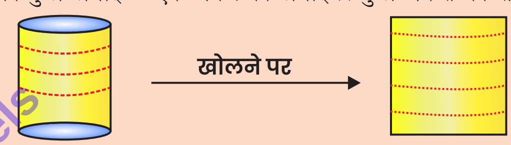
HINTS $2\pi r = 22 \Rightarrow r = \frac{22\times 7}{2\times 22} = \frac{7}{2}$ सेमी., h = 12 सेमी

∴ बेलन का आयतन = $\pi r^2 h = \frac{22}{7}\times\frac{49}{4}\times 12 = 462$ सेमी³

Ex. 7 सेमी × 4 सेमी आयाम वाली एक आयताकार शीट को उसकी चौड़ाई के परितः घुमाकर एक आकृति बनाई जाती है। इस प्रकार बनी आकृति का आयतन क्या है?

HINTS h = 7 सेमी, r = 4 सेमी

बेलन का आयतन = $\pi r^2 h = \frac{22}{7}\times 4\times 4\times 7 = 352$ सेमी³

> जब एक रस्सी को बेलन के चारों ओर कुंडलीदार (सर्पिल) रूप में लपेटा जाता है तो बेलन को खोलने पर एक आयत में बदल जाता है।
>
> प्रत्येक टर्न के लिए-
>
> रस्सी की लम्बाई (प्रत्येक टर्न) = $\sqrt{(\text{परिधि})^2 + (\text{प्रत्येक चक्कर में वृद्धि})^2}$
>
> जहाँ, परिधि = दी गई आधार परिधि
>
> प्रत्येक चक्कर में ऊँचाई = $\frac{\text{कुल ऊंचाई}}{\text{कुल चक्करों की सख्या}}$
>
> रस्सी की कुल लंबाई = एक चक्कर की लंबाई × कुल चक्करों की संख्या
>
> 
>

Ex. एक धागा 10 सेमी त्रिज्या और 24 सेमी ऊँचाई वाले बेलन के चारों ओर एक बार लपेटा गया है। धागे की लंबाई ज्ञात कीजिए।

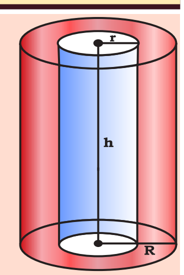
HINTS बेलन की परिधि = 2πr = 2 × 3.14 × 10 = 62.8

h = 24 सेमी, चक्करों की संख्या (n) = 1

प्रत्येक चक्कर की लम्बाई = $\sqrt{(62.8)^2 + (24)^2} = \sqrt{4519.84} \approx 67.2$ सेमी

धागे की लम्बाई = 67.2 सेमी

खोखला बेलन



(i) मोटाई = (R – r)

(ii) पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल = 2πrh + 2πRh

= 2πh(R + r)

(iii) कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = 2πh(R + r) + 2π(R² – r²)

(iv) खोखले बेलन में उपयोग किए गए पदार्थ का आयतन

= π(R² – r²)h

(v) खोखले बेलन का द्रव्यमान (भार) = घनत्व × पदार्थ का आयतन

Ex. एक खोखला बेलन स्टील का बना है। इसके बाहरी और भीतरी पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल में अंतर 132 सेमी² है। बेलन की ऊंचाई 21 सेमी है और इसकी आंतरिक और बाहरी त्रिज्या का योग भी 21 सेमी है। खोखले बेलन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल (सेमी² में) ज्ञात करें।

HINTS 2πh(R – r) = 132 ⇒ R – r = 1

R + r = 21 सेमी (दिया है) ⇒ R = 11 सेमी, r = 10 सेमी

अत : खोखले बेलन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = 2πh(R + r) + 2π (R² – r²)

= 2π(R + r) [h + R – r]]

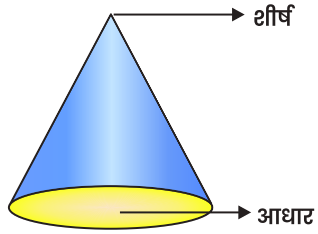
= $2\times\frac{22}{7}\times 21\,[21+1] = 6\times 22\times 22 = 2904$ सेमी²

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram @yct_publication

शंकु

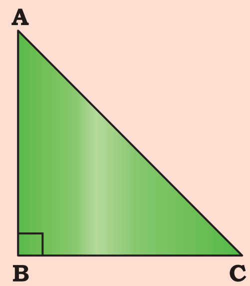
शंकु एक त्रिविमीय आकृति है, जिसका एक वृत्तीय आधार होता है। इस आधार के प्रत्येक बिंदु को एक सामान्य बिंदु (जिसे शीर्ष कहते हैं) से जोड़ने वाले रेखाखंड मिलकर शंकु बनाते हैं।

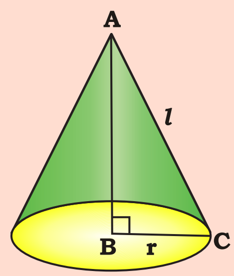


सम वृत्तीय शंकु

किसी समकोण त्रिभुज को उसकी किसी एक भुजा (कर्ण के अतिरिक्त) के परित: परिक्रमण करने पर प्राप्त ठोस को शंकु या लंब वृत्तीय शंकु कहते हैं।

मान लीजिए कि एक शंकु बनाने के लिए समकोण त्रिभुज ABC को उसकी भुजा AB के चारों ओर घुमाया जाता है; तब AB बने शंकु की ऊंचाई (h) है, BC इसके आधार की त्रिज्या (r) है और AC तिरछी ऊंचाई(l) है।





(i) तिर्यक ऊँचाई = $\sqrt{r^2+h^2}$

(ii) पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल = $\pi r l$

(iii) कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $\pi r(r + l)$

(iv) आयतन = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

Ex. एक शंक्वाकर टैंट जो कपड़े से बनाया गया है उसका आयतन 1232 मी³ है तथा आधार का क्षेत्रफल 154 मी² है। अगर कपड़े की चौड़ाई 2 मी है तो टैंट बनाने के लिए कितने लंबे कपड़े की जरूरत होगी।

HINTS $\pi R^2 = 154$ मी² $\Rightarrow R = 7$ मी

& $\pi R^2 h = 1232$ मी³ $\Rightarrow \frac{h}{3} = \frac{1232}{154} \Rightarrow h = 24$ मी

$\therefore l = 25$ मी (7, 24, 25 के त्रिक से)

तम्बू बनाने के लिए आवश्यक कैनवास का क्षेत्रफल = $\pi r l$

जो आयताकार कैनवास के क्षेत्रफल के बराबर होगा।

$\Rightarrow \frac{22}{7} \times 7 \times 25 = 2 \times$ कैनवास की लम्बाई

$\Rightarrow$ कैनवास की लम्बाई = 275 मी

> शंक्वाकार तम्बू बनाने के लिए आवश्यक कैनवास = शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

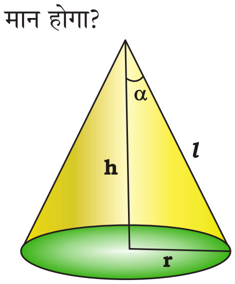
☞ S किसी शंकु के वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल को व्यक्त करत है, तथा h ऊँचाई और α अर्द्ध शीर्ष कोण को व्यक्त करता है, तब S का मान होगा?

$\tan\alpha = \frac{r}{h} \Rightarrow r = h\tan\alpha$

$\cos\alpha = \frac{h}{l} \Rightarrow l = h\sec\alpha$

शंकु का पृष्ठीय क्षेत्रफल = $\pi r l$

$= \pi h^2 \sec\alpha.\tan\alpha$



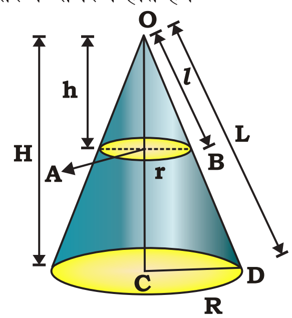
शंकु को काटने पर

☞ शंकु को काटने से बने सभी त्रिभुज एक दूसरे के समरूप होते हैं।

(A) (i) $\Delta OCD \sim \Delta OAB$

$(\angle A = \angle C = 90°, \angle O = \angle O)$

$\frac{H}{h} = \frac{R}{r} = \frac{L}{l}$ या $\frac{H}{R} = \frac{h}{r}$



☞ माना, V बड़े शंकु का आयतन तथा v छोटे शंकु का आयतन है

(ii) $\frac{V}{v} = \frac{\frac{1}{3}\pi R^2 H}{\frac{1}{3}\pi r^2 h} = \frac{R^2 H}{r^2 h}$

(iii) $\frac{V}{v} = \frac{H^3}{h^3} = \frac{R^3}{r^3} = \frac{L^3}{l^3}$

(B) शंकु के 5 भागों के क्षेत्रफल का अनुपात

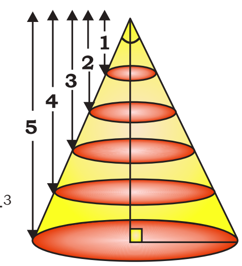
$= 1^2 : 2^2 - 1^2 : 3^2 - 2^2 : 4^2 - 3^2 : 5^2 - 4^2$

$= 1 : 3 : 5 : 7 : 9$

शंकु के 5 भागों के आयतन का अनुपात

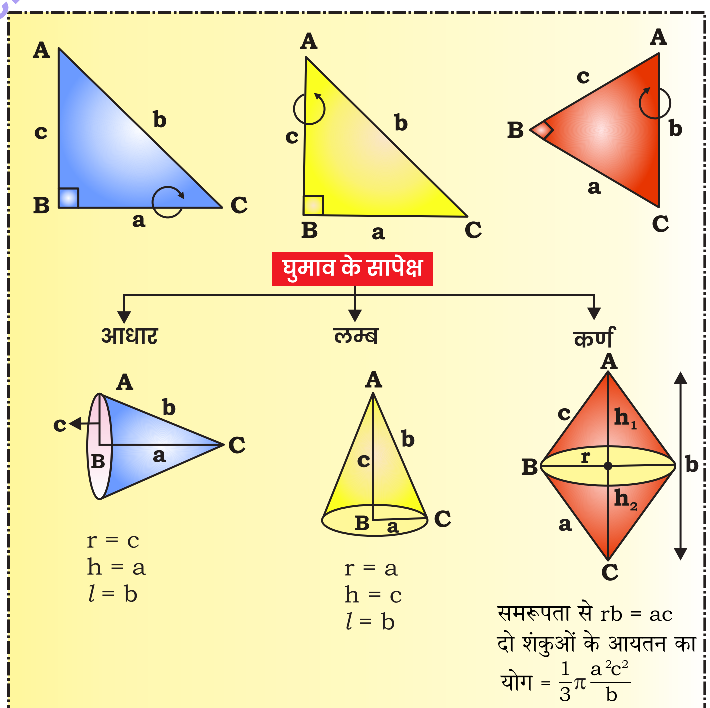
$= 1^3 : 2^3 - 1^3 : 3^3 - 2^3 : 4^3 - 3^3 : 5^3 - 4^3$

$= 1 : 7 : 19 : 37 : 61$



@apna_channels

समकोण त्रिभुज को घुमाने पर बना शंकु



Ex. 5 सेमी, 12 सेमी और 13 सेमी भुजाओं वाले एक समकोण त्रिभुज ABC को 12 सेमी भुजा के परित: घुमाया जाता है। इस प्रकार प्राप्त ठोस का आयतन क्या है?

HINTS r = 5 सेमी, h = 12 सेमी

शंकु का आयतन = $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \times 5^2 \times 12 = 100\pi$ सेमी³

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram @yct_publication

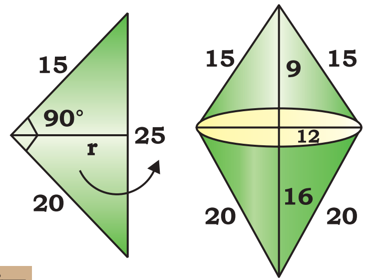
Ex. एक समकोण त्रिभुज जिसकी भुजाएँ 15 सेमी और 20 सेमी (कर्ण के अलावा) हैं, को उसके कर्ण के चारों ओर घुमाया जाता है। इस प्रकार बने दोहरे शंकु का आयतन ज्ञात कीजिए?

HINTS

$r = \frac{15 \times 20}{25} = 12$ सेमी

आयतन $= \frac{1}{3} \times 12^2 \times (9 + 16)$

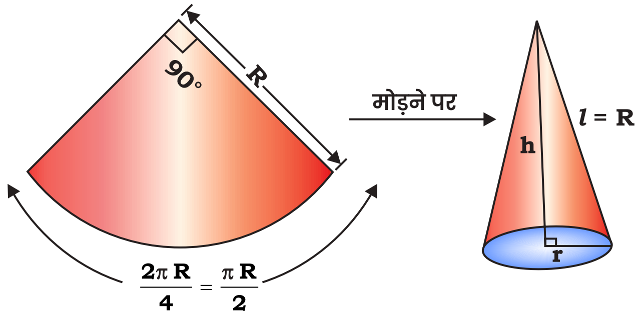
$= 48\pi \times 25 = 1200\pi$ सेमी³



त्रिज्यखंड को घुमाने पर बना शंकु

जब किसी त्रिज्यखंड को इस प्रकार घुमाया जाता है कि इसकी दो त्रिज्याएँ जुड़ जाती हैं, तो एक शंकु का निर्माण होता है।

1. R सेमी त्रिज्या के एक समकोणीय त्रिज्यखंड को घुमा कर बना शंकु



$\Rightarrow 2\pi r = \frac{\pi R}{2} \Rightarrow r = \frac{R}{4}$ & $l = R$

शंकु की ऊँचाई (h) $= \sqrt{l^2 - r^2}$

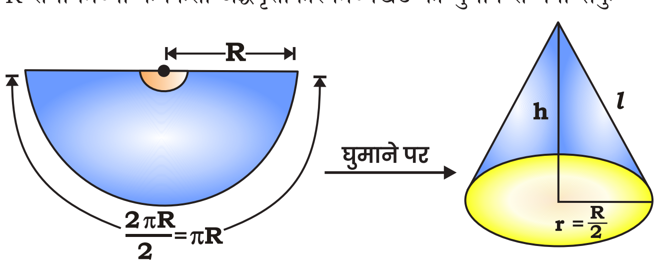
$= \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{16}} = \frac{\sqrt{15}R}{4}$

शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल $= \frac{\pi R^2}{4}$

शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi \times \left(\frac{R}{4}\right)^2 \times \frac{\sqrt{15}R}{4}$

$= \frac{\sqrt{15}\pi R^3}{192}$

2. R सेमी त्रिज्या के किसी अर्द्धवृत्ताकार त्रिज्यखंड को घुमाने से बना शंकु



शंकु की ऊँचाई (h)

$= \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}R}{2}$

शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल $= \frac{\pi R^2}{2}$

शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3}\pi \times \frac{R^2}{4} \times \frac{\sqrt{3}R}{2} = \frac{\pi R^3}{8\sqrt{3}}$

वृत्त से शंकु

• अर्द्धवृत्त (वृत्त का $\frac{1}{2}$ भाग) • शंकु → l = R $r = \frac{R}{2}$	• चतुर्थांश (वृत्त का $\frac{1}{4}$ भाग) • शंकु → l = R $r = \frac{R}{4}$
जहाँ R = अर्द्धवृत्त की त्रिज्या, l = शंकु की तिर्यक ऊँचाई r = शंकु की त्रिज्या	

Ex. एक शंकु 35 सेमी त्रिज्या और 90° के कोण वाले वृत्त से बना है। शंकु का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल कितना है?

HINTS कोण = 90° (वृत्त का $\frac{1}{4}$ भाग)

त्रिज्यखंड की त्रिज्या (R) = 35 = l

शंकु की त्रिज्या (r) $= \frac{35}{4}$

कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi r(l + r)$

$= \frac{22}{7} \times \frac{35}{4}\left(35 + \frac{35}{4}\right) = \frac{55}{2} \times \frac{175}{4} = 1203.125$ सेमी²

Ex. 28 सेमी व्यास वाली धातु की एक अर्धवृत्ताकार शीट को एक खुले शंक्वाकार कप के आकार में मोड़ा गया है। कप की धारिता है?

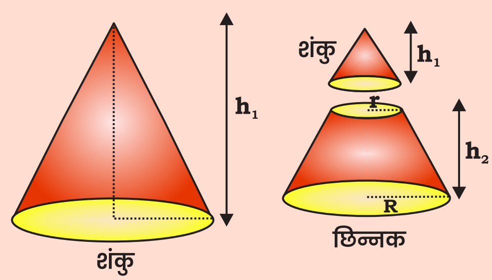
HINTS कप की धारिता $= \frac{\pi r^3}{8\sqrt{3}}$

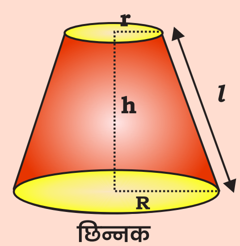
$= \frac{22 \times 14 \times 14 \times 14}{7 \times 8 \times 1.732} = 622.36$ सेमी³

@apna_channels

छिन्नक

यदि किसी शंकु को उसके आधार के समांतर समतल द्वारा काटा जाता है तो इस समतल और आधार के बीच ठोस भाग शंकु का छिन्नक कहलाता है।





(i) छिन्नक का आयतन $= \frac{1}{3}\pi(R^2 + r^2 + Rr)\,h$

(शंकु के आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$ से तुलना करें)

(ii) पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi(R + r)l$

(शंकु के पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi r l$ से तुलना करें)

(iii) कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi l(R + r) + \pi(R^2 + r^2)$

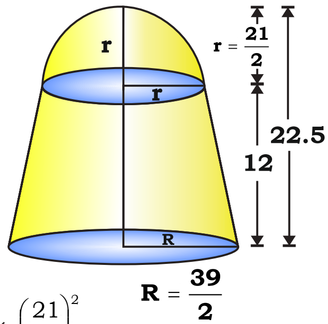
(शंकु के कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi r(r + l)$ से तुलना करें)

जहाँ $l = \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram @yct_publication

Ex. 22.5 मी ऊंचा एक तम्बू एक शंकु के छिन्नक के आकार का है जिसके ऊपर एक अर्धगोला लगा हुआ है। यदि छिन्नक के ऊपरी और निचले वृत्ताकार सिरों के व्यास क्रमशः 21 मी और 39 मी हैं, तो तम्बू बनाने में इस्तेमाल किए गए कपड़े का क्षेत्रफल (वर्ग मीटर में) ज्ञात करें (बर्बादी को नजरअंदाज करते हुए)।



HINTS $l = \sqrt{h^2 + (R-r)^2}$

$= \sqrt{12^2 + \left(\frac{39}{2} - \frac{21}{2}\right)^2} = 15$

आवश्यक क्षेत्रफल

$= \pi(r + R)l + 2\pi r^2$

$= \frac{22}{7}\left(\frac{21}{2} + \frac{39}{2}\right) 15 + 2 \times \frac{22}{7} \times \left(\frac{21}{2}\right)^2$

$= \frac{22}{7} \times \frac{60}{2} \times 15 + 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{21}{2} \times \frac{21}{2}$

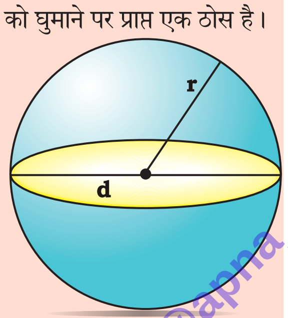
$= \frac{22}{7} \times \frac{1341}{2} = \frac{14751}{7} = 2107\ \frac{2}{7}$ मी²

गोला

गोला अपने किसी भी व्यास के चारों ओर एक वृत्त को घुमाने पर प्राप्त एक ठोस है।

(i) गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल = $4\pi r^2$

(ii) गोले का आयतन = $\frac{4}{3}\pi r^3$



☞ माना V_1 तथा V_2 और S_1 तथा S_2 दो गोले के आयतन और क्षेत्रफल हैं।

$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^{\frac{3}{2}}$ या $\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\frac{2}{3}}$

Ex. एक गोलाकार गेंद का व्यास ज्ञात कीजिए जिसका आयतन 38.808 सेमी³ है।

HINTS गोले का आयतन = $\frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow 38.808 = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times r^3$

$\Rightarrow r = 2.1$

$\therefore$ व्यास = 2.1 × 2 = 4.2 सेमी

Ex. दो गोलों के पृष्ठीय क्षेत्रफल का अनुपात 4 : 9 है। उनके आयतन का अनुपात होगा।

HINTS $\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{2^2}{3^2}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$

Ex. विभिन्न सामग्रियों के दो गोले के वजन का अनुपात 8: 17 है और प्रत्येक के प्रति 1cc सामग्री के वजन का अनुपात 289 : 64 है। दोनों गोले की त्रिज्याओं का अनुपात ज्ञात कीजिए।

HINTS घनत्व = $\frac{\text{द्रव्यमान}}{\text{आयतन}}$

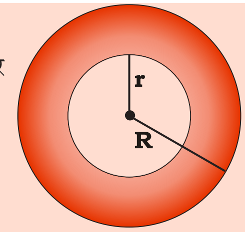
गोले के आयतन का अनुपात = $\frac{\frac{8}{289}}{\frac{17}{64}} = \frac{8 \times 64}{289 \times 17}$

$\Rightarrow \frac{\frac{4}{3}\pi r_1^3}{\frac{4}{3}\pi r_2^3} = \frac{8 \times 8 \times 8}{17 \times 17 \times 17} \Rightarrow \frac{r_1^3}{r_2^3} = \left(\frac{8}{17}\right)^3 \Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = \frac{8}{17}$

खोखला गोला

यह दो संकेंद्रित गोलों के बीच घिरा हुआ ठोस है।

मानो एक गोलाकार शैल की बाहरी त्रिज्या R और आंतरिक त्रिज्या r है, तब



(i) आयतन = गोलाकार खोल में पदार्थ का आयतन

$= \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)$

(ii) कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $4\pi(R^2 - r^2)$

Ex. एक खोखली गोलाकार धातु की गेंद का बाहरी व्यास 6 सेमी है और मोटाई $\frac{1}{2}$ सेमी है। गेंद के आयतन का मान (सेमी³ में) है

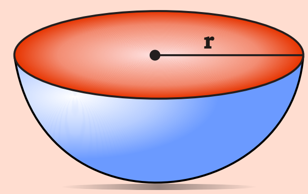
HINTS गेंद का आयतन = $\frac{4}{3}\pi\left[3^3 - \left(3 - \frac{1}{2}\right)^3\right]$

$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7}\left(27 - \frac{125}{8}\right) = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7}\left(\frac{216 - 125}{8}\right)$

$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{91}{8} = \frac{143}{3} = 47\frac{2}{3}$ सेमी³

अर्द्धगोला

जब एक ठोस गोले को उसके केंद्र से दो बराबर (समान) टुकड़ों में काटा जाता है, तो प्रत्येक टुकड़े को गोलार्द्ध अथवा अर्द्धगोला कहा जाता है।



(i) पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2\pi r^2$

(ii) कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= 2\pi r^2 + \pi r^2 = 3\pi r^2$

(iii) आयतन = $\frac{2}{3}\pi r^3$

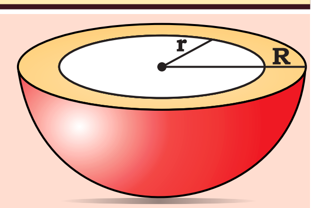
Ex. एक ठोस अर्धगोले का आयतन 19404 सेमी³ है। इसका कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल है:

HINTS $\frac{2}{3}\pi r^3 = 19404 \Rightarrow \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times r^3 = 19404$

$\Rightarrow r^3 = \frac{19404 \times 3 \times 7}{2 \times 22} = 9261 \Rightarrow r = (9261)^{\frac{1}{3}} = 21$ सेमी

$\therefore$ कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $3\pi r^2 = 3 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 = 4158$ सेमी²

अर्द्धगोलीय शेल



(i) पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2\pi(R^2 + r^2)$

(ii) कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= 2\pi R^2 + 2\pi r^2 + \pi(R^2 - r^2)$

$= 3\pi R^2 + \pi r^2$

(iii) आयतन = $\frac{2}{3}\pi(R^3 - r^3)$

Ex. एक अर्धगोलाकार कटोरा चांदी से बना है और इसका आंतरिक व्यास 4 सेमी है। यदि चांदी की मोटाई 0.5 सेमी है, तो कटोरे को बनाने में उपयोग की गई चांदी की मात्रा दशमलव के दो स्थानों तक सही ढंग से ज्ञात करें (π = 3.14 का उपयोग करें)।

HINTS r = 2 सेमी, R = 2 + 0.5 = 2.5 सेमी

प्रयोग की गई चाँदी की मात्रा = $\frac{2}{3}\pi(R^3 - r^3)$

$= \frac{2}{3} \times 3.14\,(2.5^3 - 2^3) = \frac{2}{3} \times 3.14 \times 7.625$

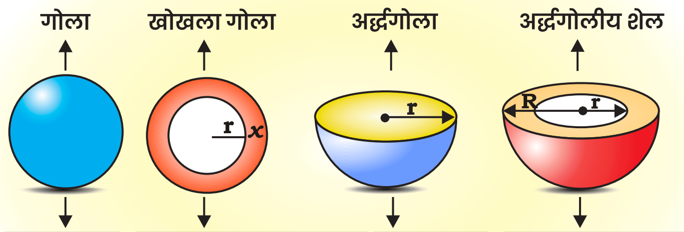
= 15.96 सेमी³

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram @yct_publication

सारांश



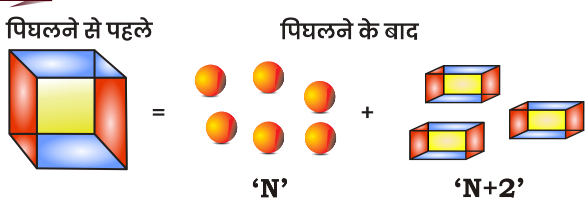
$V=\frac{4}{3}\pi r^3$ | $V=\frac{4}{3}\pi\left[(r+x)^3-r^3\right]$ | $V=\frac{2}{3}\pi r^3$ | $V=\frac{2}{3}\pi\left(R^3-r^3\right)$

पिघलने और पुनर्रचना की अवधारणा

पिघली हुई वस्तु का आयतन = पुनर्रचना के बाद वस्तु का आयतन

Ex. एक बड़े ठोस घन को पिघलाकर 'N' छोटे ठोस गोले बनाए गए हैं, जिनमें से प्रत्येक की त्रिज्या 3 सेमी है, और 'N + 2' छोटे ठोस घनाभ बनाए गए हैं, जिनकी प्रत्येक भुजा 4 सेमी × 4 सेमी × 6.5 सेमी है। यदि बड़े ठोस घन की प्रत्येक भुजा की लंबाई 12 सेमी है, तो 'N' का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS



दिया है, छोटे गोलों की त्रिज्या = 3 सेमी

घनाभ का आयतन = (4 × 4 × 6.5) सेमी^{3}

घन की भुजा = 12 सेमी

प्रश्नानुसार,

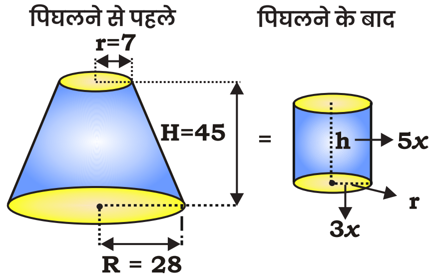
$12\times12\times12=\left(\frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times3\times3\times3\times N\right)+(N+2)(4\times4\times6\cdot5)$

$\Rightarrow 1728=\frac{88}{7}\times 9N+104N+208$

$\Rightarrow 1520=\frac{792}{7}\times N+104N \Rightarrow 1520=\frac{1520}{7}N \Rightarrow N=7$

Ex. 45 सेमी ऊँचे एक ठोस लम्ब-वृत्ताकार शंकु के छिन्नक के सिरों की त्रिज्याएँ 28 सेमी और 7 सेमी हैं। यदि इस छिन्नक को पिघलाकर एक ठोस लम्ब-वृत्ताकार बेलन बनाया जाए, जिसके आधार की त्रिज्या और ऊँचाई का अनुपात 3 : 5 है, तो इस बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल (सेमी^{2} में) ज्ञात कीजिए।

HINTS



छिन्नक का आयतन = बेलन का आयतन $\Rightarrow \frac{1}{3}\pi H\left(R^2+Rr+r^2\right)=\pi r^2h$

$\Rightarrow \frac{45}{3}\left[28^2+(28\times7)+7^2\right]=9x^2\times5x \Rightarrow 784+196+49=3x^3$

$\Rightarrow 1029=3x^3 \Rightarrow x^3=343 \Rightarrow x=7$

∴ बेलन की त्रिज्या = 3 × 7 = 21 सेमी

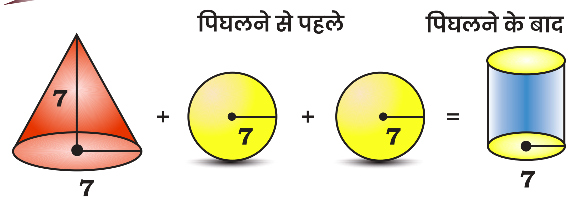
बेलन की ऊँचाई = 5 × 7 = 35 सेमी

∴ बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2\pi rh = 2\times\frac{22}{7}\times21\times35$

= 4620 सेमी^{2}

Ex. 7 सेमी त्रिज्या और 7 सेमी ऊँचाई वाले एक ठोस शंकु को 7 सेमी त्रिज्या वाले दो ठोस गोलों के साथ पिघलाकर 7 सेमी त्रिज्या वाला एक ठोस बेलन बनाया गया। बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल (सेमी^{2} में) क्या है?

HINTS



(शंकु + 2 गोले) का आयतन = बेलन का आयतन

$\Rightarrow \frac{1}{3}\times\pi\times7^2\times7+2\times\frac{4}{3}\pi\times7^3=\pi R^2h$

$\Rightarrow \frac{1}{3}\pi\times343\times(1+8)=\pi R^2h$

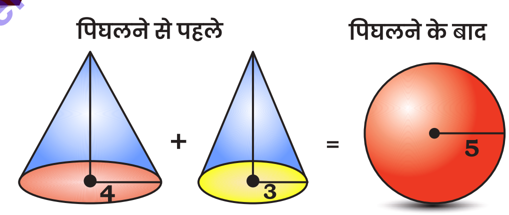
$\Rightarrow R^2h=343\times3 \Rightarrow 49\times h=343\times3 \Rightarrow h=21$ सेमी

∴ बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2\pi rh$

$=2\times\frac{22}{7}\times7\times21=44\times21=924$ सेमी^{2}

Ex. 3 सेमी और 4 सेमी आधार त्रिज्याओं वाले बराबर ऊंचाई वाले दो लम्ब वृत्तीय शंकुओं को एक साथ पिघलाकर 5 सेमी त्रिज्या वाला एक ठोस गोला बनाया जाता है। शंकु की ऊंचाई है:

HINTS



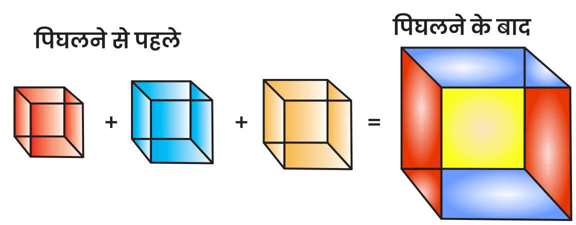
दो शंकुओं का आयतन = गोले का आयतन

$\Rightarrow \frac{1}{3}\pi\times3^2\times h+\frac{1}{3}\pi\times4^2\times h=\frac{4}{3}\pi\times5^3$

$\Rightarrow 9h+16h=4\times125 \Rightarrow h=\frac{4\times125}{25}=20$ सेमी

Ex. धातु के तीन घन जिनके किनारे क्रमशः 6 सेमी, 8 सेमी और 10 सेमी हैं। को पिघलाया जाता है और एक घन बनाया जाता है। नए बने घन के किनारे की लंबाई क्या है?

HINTS



पुनः निर्मित घन का आयतन = तीन घनों के आयतन का योग

$\Rightarrow a^3=6^3+8^3+10^3=216+512+1000=1728$

$\Rightarrow a=(1728)^{\frac{1}{3}}=12$ सेमी

जब कई घन मिलकर एक घन बनाते हैं, तो नए घन की भुजा $=\sqrt[3]{\text{सभी घनों की भुजाओं के घनों का योग}}$

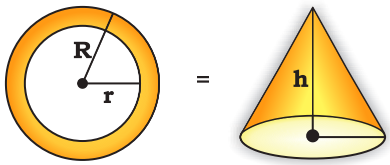
@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @ycet_publication

Ex. आंतरिक और बाह्य व्यास क्रमशः 6 सेमी और 10 सेमी वाले एक खोखले गोले को पिघलाकर 8 सेमी व्यास वाला एक लम्ब वृत्तीय शंकु बनाया गया है। शंकु की ऊँचाई है:

HINTS पिघलने से पहले पिघलने के बाद



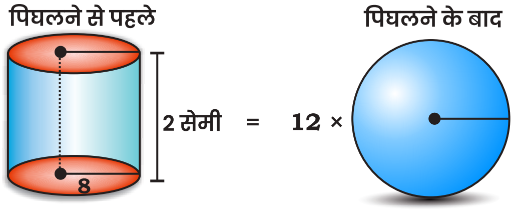
शंकु का आयतन = खोखले गोले का आयतन

$\Rightarrow \frac{1}{3}\pi \times 4^2 \times h = \frac{4}{3}\pi(5^3 - 3^3)$

$\Rightarrow h = \frac{125-27}{4} = \frac{98}{4} = \frac{49}{2} = 24.5$ सेमी

Ex. 16 सेमी व्यास और 2 सेमी ऊंचाई वाले एक ठोस बेलन को पिघलाकर समान आकार के 12 गोले बनाए गए हैं। प्रत्येक गोले का व्यास है:

HINTS पिघलने से पहले पिघलने के बाद



12 गोलों का आयतन = बेलन का आयतन

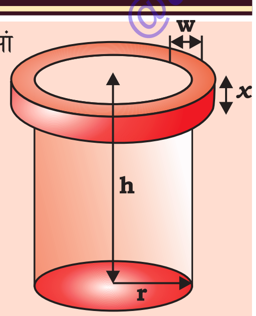
$\Rightarrow 12 \times \frac{4}{3}\pi r^3 = \pi \times 8^2 \times 2$

$\Rightarrow r^3 = \frac{64 \times 2 \times 3}{12 \times 4} = 8 \Rightarrow r = 2$ सेमी

खुदाई और निकाली गई मिट्टी की अवधारणा

'D' मीटर व्यास या 'r' मीटर त्रिज्या वाला एक कुआं 'h' मीटर गहरा खोदा गया है। यदि निकाली गई मिट्टी को इसके चारों ओर 'w' मीटर चौड़ाई में फैलाकर एक गोलाकार तटबंध बनाया गया है, तो तटबंध की ऊंचाई

$= \frac{r^2h}{w(w+D)}$



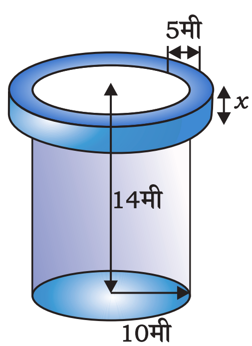
Ex. 20 मी व्यास वाला एक कुआँ 14 मी गहरा खोदा जाता है और निकाली गई मिट्टी को चबूतरा बनाने के लिए उसके चारों ओर 5 मी की चौड़ाई में फैला दिया जाता है। चबूतरे की ऊंचाई है:

HINTS तटबंध का आयतन = कुएँ का आयतन

(निकाली गई मिट्टी का आयतन)

$\Rightarrow \pi(15^2 - 10^2)\ h = \pi \times 10^2 \times 14$

$\Rightarrow h = \frac{10 \times 10 \times 14}{125} = \frac{56}{5} = 11.2$ मी



वैकल्पिक विधि

तटबंध की ऊँचाई $= \frac{r^2h}{w(w+D)}$

$= \frac{10 \times 10 \times 14}{5(5+20)} = \frac{1400}{125} = \frac{56}{5} = 11.2$ मी

Ex. एक मैदान 125 मी लंबा और 15 मी चौड़ा है। इसमें 10 मी × 7.5 मी × 6 मी का एक टैंक खोदा गया और इस तरह खोदी गई मिट्टी को शेष मैदान पर समान रूप से फैला दिया गया। इस प्रकार मैदान की ऊँचाई में वृद्धि किसके बराबर है?

HINTS शेष मैदान = मैदान का क्षेत्रफल – टैंक का क्षेत्रफल

$= 125 \times 15 - 10 \times 7.5 = 1800$ मी^{2}

खोदी गई मिट्टी का आयतन $= 10 \times 7.5 \times 6 = 450$मी^{3}

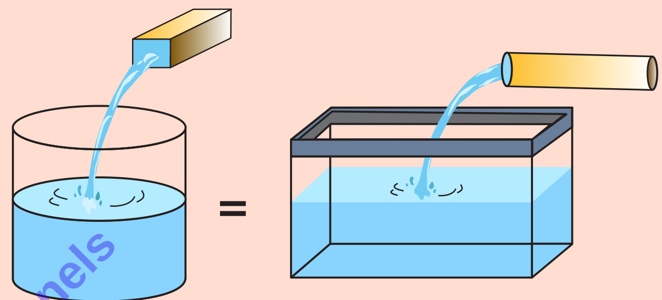
दी गई शर्त से, $1800 \times h = 450$

$\Rightarrow h = \frac{450}{1800} = \frac{1}{4}$ मी $= \frac{100}{4}$ सेमी = 25 सेमी

एक पात्र को दूसरे आकार के पात्र से भरना

t समय में पाइप (बेलनाकार / घनाभ) से बहने वाले पानी का आयतन = टैंक का आयतन (बेलनाकार / घनाभ)

⇒ आधार का क्षेत्रफल × प्रवाह की गति × समय = टैंक का आयतन (बेलनाकार / घनाभ)



(a) $\pi r^2 \times v \times t = \pi R^2 h$ या LBH या $\frac{1}{3}\pi R^2 H$

(b) $l \times b \times v \times t = LBH$ या $\pi R^2 h$

Ex. पानी एक बेलनाकार पाइप जिसकी त्रिज्या 7 सेमी है, से 5 मी प्रति सेकंड की गति से बहता है। 1.54 मी ऊँचाई और आधार का क्षेत्रफल (3 × 5) वर्ग मीटर वाले एक खाली पानी के टैंक को भरने में लगने वाला समय है।

HINTS πr^2 (vt) = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई

$\Rightarrow \frac{22}{7} \times \frac{7}{100} \times \frac{7}{100} \times 5t = (3 \times 5) \times 1.54$

$\Rightarrow t = 300$ सेकंड = 5 मिनट

Ex. 5 मिमी व्यास वाले एक बेलनाकार पाइप से 10 मी प्रति मिनट की दर से पानी बहता है। एक शंक्वाकार बर्तन को भरने में कितना समय लगेगा जिसका आधार व्यास 30 सेमी और गहराई 24 सेमी है?

HINTS $\pi r^2 (vt) = \frac{1}{3}\pi R^2 H$

$\Rightarrow 0.25 \times 0.25 \times 1000t = \frac{1}{3} \times 15 \times 15 \times 24$

$\Rightarrow t = \frac{144}{5} = 28\frac{4}{5}$ मिनट = 28 मिनट, $\frac{4}{5} \times 60$ सेंकड

= 28 मिनट 48 सेकंड

Ex. 20 सेमी आंतरिक व्यास वाले एक वृत्ताकार पाइप के माध्यम से 3 किमी/घंटा की दर से पानी 10 मी व्यास और 2 मी गहराई वाले एक वृत्ताकार टैंक में बह रहा है। कितने समय में टैंक भर जाएगा?

HINTS पाइप से t घंटे में पानी बहता है = वृत्ताकार टंकी का आयतन

$\Rightarrow \pi r^2 (vt) = \pi R^2 H \Rightarrow t = \frac{R^2H}{r^2v} = \frac{5 \times 5 \times 2 \times 100 \times 100}{10 \times 10 \times 3000} = \frac{5}{3}$

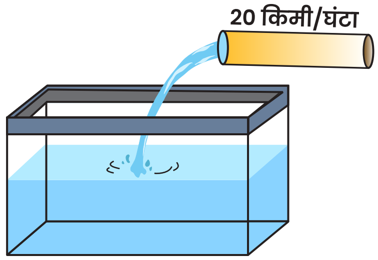
$= 1$ घंटा, $\frac{2}{3} \times 60$ मिनट = 1 घंटा, 40 मिनट

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram @yct_publication

Ex. 200 मी लंबे और 150 मी चौड़े एक टैंक में पानी 0.3 मी × 0.2 मी क्रॉस-सेक्शन वाले पाइप के माध्यम से 20 किमी/घंटा की गति से बहता है। तो टैंक में पानी का स्तर 8 मी तक पहुंचने में लगने वाला समय (घंटों में) है:

HINTS माना टैंक में पानी का स्तर 8 मी तक पहुंचने में t घंटे का समय लगता है



∴ पाइप द्वारा t घंटे में भरा गया पानी = पानी की टंकी का आयतन

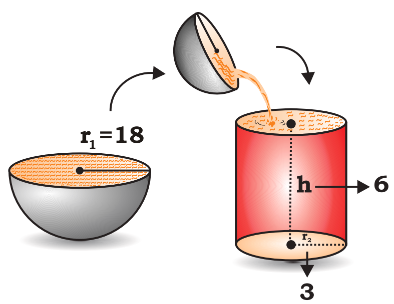
⇒ क्रॉस सेक्शन का क्षेत्रफल × (v × t) = l × b × h

⇒ 0.3 × 0.2 × 20000t = 200 × 150 × 8

$$\Rightarrow t = \frac{200 \times 150 \times 8}{0.3 \times 0.2 \times 20000} = 200 \text{ घंटे}$$

Ex. तरल रूप में कुछ दवा 36 सेमी व्यास वाले अर्धगोलाकार कंटेनर में तैयार की जाती है। जब कंटेनर दवा से भर जाता है, तो दवा को 6 सेमी व्यास और 6 सेमी ऊंचाई वाली छोटी बेलनाकार बोतलों में स्थानांतरित कर दिया जाता है। कंटेनर को खाली करने के लिए कितनी बोतलों की आवश्यकता होगी?

HINTS



अर्द्धगोले का व्यास = 36 सेमी

अर्द्धगोले की त्रिज्या (r_1) = 18 सेमी

बेलन का व्यास = 6 सेमी

बेलन की त्रिज्या (r_2) = 3 सेमी

माना n बेलनाकार बोतलों की आवश्यकता है।

∴ अर्द्धगोले का आयतन = n × बेलन का आयतन

$$\Rightarrow \frac{2}{3}\pi r_1^3 = n \times \pi r_2^2 \times h$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} \times 18 \times 18 \times 18 = n \times 3 \times 3 \times 6 \Rightarrow n = 72$$

इसे स्वयं करें

Ex. 6 सेमी आंतरिक त्रिज्या वाले एक अर्धगोलाकार कटोरे में एक द्रव है। इस द्रव को 2 सेमी व्यास और 4 सेमी ऊँचाई वाली बेलनाकार छोटी बोतलों में भरना है। कटोरे को खाली करने के लिए कितनी बोतलों की आवश्यकता होगी?

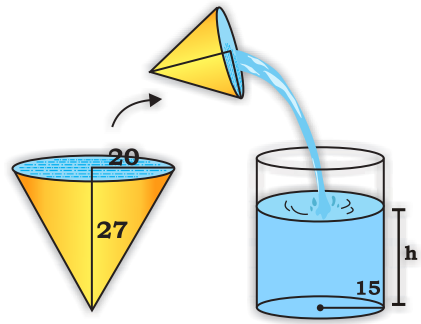
(a) 32 (b) 37 (c) 38 (d) 36

[सही उत्तर = (d)]

ऊंचाई में वृद्धि की अवधारणा

Ex. एक शंक्वाकार बर्तन, जिसकी आंतरिक त्रिज्या 20 सेमी और ऊंचाई 27 सेमी है, पानी से भरा है। यदि इस पानी को 15 सेमी आंतरिक त्रिज्या वाले बेलनाकार बर्तन में डाला जाए, तो पानी कितनी ऊंचाई तक ऊपर उठेगा?

HINTS

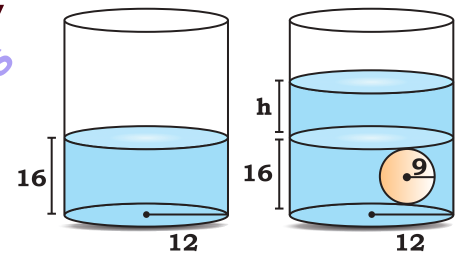


शंकु का आयतन = बेलन का आयतन $\Rightarrow \frac{1}{3} \times \pi r^2 h = \pi r_1^2 h_1$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \times \pi \times (20)^2 \times 27 = \pi \times (15)^2 \times h_1 \Rightarrow h_1 = 16 \text{ सेमी}$$

Ex. एक बेलन में 16 सेमी की ऊंचाई तक थोड़ा पानी है। यदि इसमें 9 सेमी त्रिज्या का एक गोला डाला जाता है, तो पानी की ऊंचाई में वृद्धि ज्ञात कीजिए, यदि बेलन की त्रिज्या 12 सेमी है।

HINTS



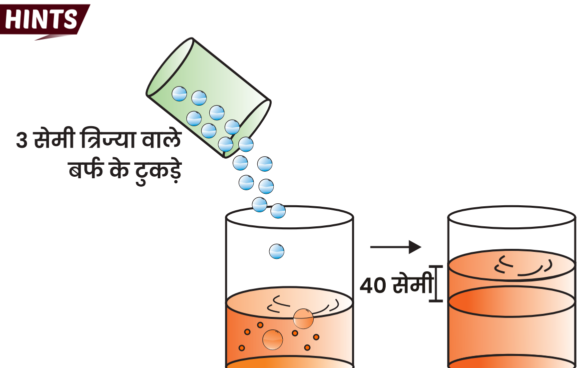
माना जल स्तर में वृद्धि h सेमी है।

तब, गोले का आयतन = वृद्धि हुए पानी का आयतन

$$\Rightarrow \frac{4}{3}\pi(9)^3 = \pi \times (12)^2 \times h \Rightarrow h = \frac{4}{3} \times \frac{9 \times 9 \times 9}{12 \times 12} = \frac{27}{4} = 6.75 \text{ सेमी}$$

Ex. कुछ गोलाकार बर्फ के टुकड़े, जिनका व्यास 6 सेमी है, को जूस से भरे एक बेलनाकार कंटेनर में डाला जाता है और पूरी तरह से डूबा दिया जाता है। यदि कंटेनर का व्यास 18 सेमी है और जूस का स्तर 40 सेमी बढ़ जाता है, तो कंटेनर में कितने बर्फ के टुकड़े डाले गए हैं?

HINTS



माना n बर्फ के टुकड़े डाले गए है।

बेलन का आयतन = n × गोलाकार बर्फ के टुकड़ों का आयतन

$$\Rightarrow \pi \times 9 \times 9 \times 40 = \frac{4}{3} \times \pi \times (3)^3 \times n \Rightarrow n = \frac{9 \times 9 \times 40 \times 3}{3 \times 3 \times 3 \times 4} = 90$$

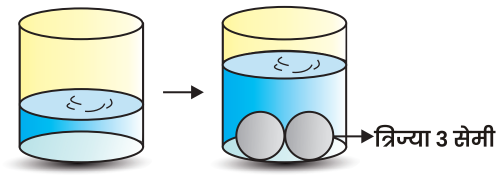
@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram @yct_publication

Ex. 6 सेमी व्यास वाले दो लोहे के गोले 6 सेमी त्रिज्या वाले पानी से भरे एक बेलनाकार बर्तन में डूबे हुए हैं। बर्तन में पानी का स्तर कितना बढ़ जाएगा?

HINTS



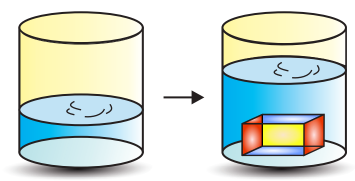
दो लोहे के गोले का आयतन = बेलन का आयतन

$\Rightarrow 2 \times \frac{4}{3} \times \pi \times 3^3 = \pi \times 6^2 \times h$

$\Rightarrow h = 2$ सेमी

Ex. 14 सेमी आधार त्रिज्या वाले एक बेलनाकार बर्तन को कुछ ऊंचाई तक पानी से भरा गया है। यदि 22 सेमी × 7 सेमी × 5 सेमी आयाम वाले एक आयताकार ठोस को इसमें डुबोया जाए तो पानी के स्तर में कितनी वृद्धि होगी?

HINTS



बेलन का आयतन = आयताकार ठोस का आयतन

$\Rightarrow \frac{22}{7} \times 14 \times 14 \times h = 22 \times 7 \times 5$

$\Rightarrow h = \frac{5}{4} = 1.25$ सेमी

Ex. 35 सेमी व्यास वाला एक बेलनाकार टैंक पानी से भरा है। यदि 11 लीटर पानी निकाला जाए तो टैंक में पानी का स्तर कितना गिर जाएगा? $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

HINTS बेलन का आयतन = $\pi r^2 h$

$\Rightarrow \pi r^2 h = 11 \times 1000$ सेमी^{3}

$\Rightarrow \frac{22}{7} \times \frac{35}{2} \times \frac{35}{2} \times h = 11 \times 1000$

$\Rightarrow h = \frac{80}{7} = 11\frac{3}{7}$ सेमी

Ex. एक आयताकार टैंक जिसकी लंबाई और चौड़ाई क्रमशः 2.5 मी और 1.5 मी है, पानी से आधा भरा हुआ है। यदि टैंक में 750 लीटर पानी और डाला जाता है, तो पानी का स्तर कितनी ऊंचाई तक ऊपर चला जाता है?

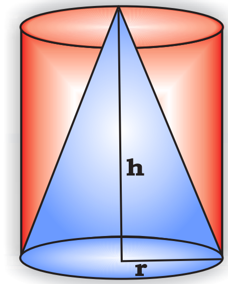
HINTS अतिरिक्त घनाभ का आयतन = पानी का आयतन

$\Rightarrow 2.5 \times 1.5 \times h = \frac{750}{1000}$

$\Rightarrow h = 0.2$ मी = 20 सेमी

त्रिविमीय आकृतियों का संयोजन

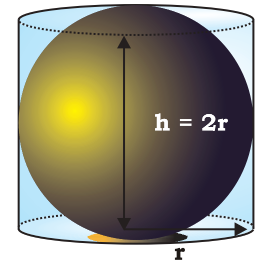
(i) बेलन के अन्दर अधिकतम आयतन का शंकु



बेलन का आयतन : शंकु का आयतन

$= \pi r^2 h : \frac{1}{3}\pi r^2 h = 3 : 1$

(ii) बेलन के अन्दर गोला

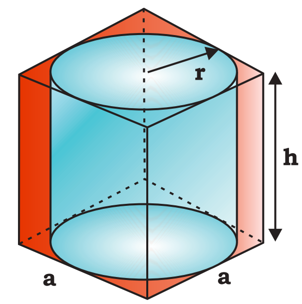


बेलन की ऊँचाई = गोले का व्यास = 2r

बेलन का आयतन : गोले का आयतन

$= \pi r^2(2r) : \frac{4}{3}\pi r^3 = 2 : \frac{4}{3} = 3 : 2$

(iii) घन के अन्दर अधिकतम आयतन का बेलन



बेलन की त्रिज्या

$= \frac{1}{2} \times$ घन का किनारा $= \frac{a}{2}$

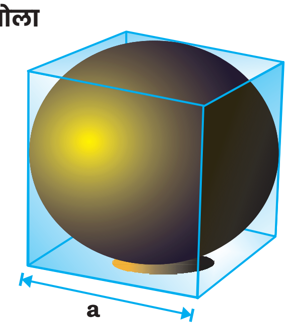
बेलन की ऊँचाई = घन का किनारा = a

घन का आयतन : बेलन का आयतन

$= a^3 : \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 a$

$= 1 : \frac{22}{7} \times \frac{1}{4} = 14 : 11$

(iv) घन के अन्दर अधिकतम आयतन का गोला



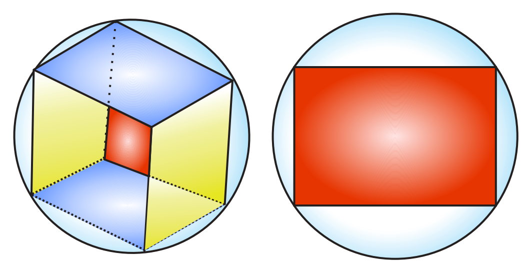
गोले का व्यास (2r) = घन की कोर = a

घन का आयतन : गोले का आयतन

$= a^3 : \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^3$

= 21: 11

(v) किसी गोले के अन्दर अधिकतम आयतन का घन



घन का विकर्ण = गोले का व्यास

$\Rightarrow \sqrt{3}a = 2r \Rightarrow a = \frac{2r}{\sqrt{3}}$

गोले का आयतन : घन का आयतन

$= \frac{4}{3}\pi r^3 : \left(\frac{2r}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} : \frac{8}{3\sqrt{3}} = 11\sqrt{3} : 7$

Join Telegram: @apna_rwa
@apna_channels

Join Telegram @yct_publication

(vi) किसी शंकु के अन्दर अधिकतम आयतन का गोला

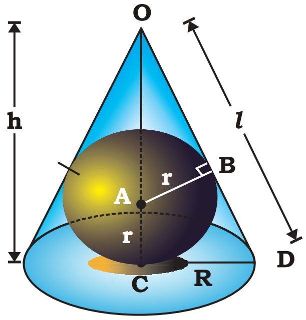
$\Delta OCD \sim \Delta OBA$

$\Rightarrow \frac{OD}{OA} = \frac{CD}{AB}$

$\Rightarrow \frac{l}{h-r} = \frac{R}{r}$

$\Rightarrow l \times r = hR - Rr$

$\Rightarrow r = \frac{hR}{l+R}$



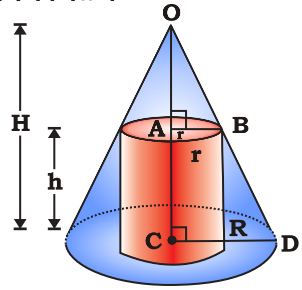
(vii) किसी शंकु के अन्दर अधिकतम आयतन का बेलन

$\Delta OCD \sim \Delta OAB$

($\angle A = \angle C = 90°$, $\angle O$ उभयनिष्ठ)

$\Rightarrow \frac{OC}{OA} = \frac{CD}{AB}$

$\Rightarrow \frac{H}{H-h} = \frac{R}{r}$



(viii) शंकु के अन्दर अधिकतम आयतन का घन

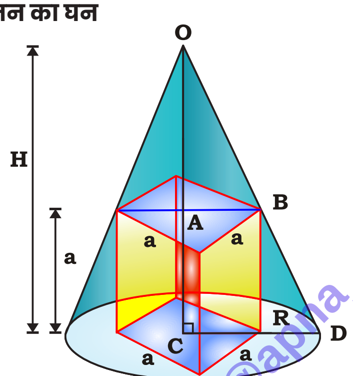
$\Delta OCD \sim \Delta OAB$

$\Rightarrow \frac{OC}{OA} = \frac{CD}{AB}$

$\Rightarrow \frac{H}{H-a} = \frac{R}{a/\sqrt{2}}$

$\left[\therefore AB = \frac{\sqrt{2}a}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}\right]$

$\Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}RH}{\sqrt{2}R+H}$



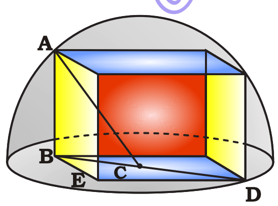
(ix) गोलार्द्ध के अंदर सबसे बड़ा घन

माना R अर्द्धगोले की त्रिज्या है और x घन की भुजा है। C गोलार्द्ध का केन्द्र है।

$BD = \sqrt{2}x$

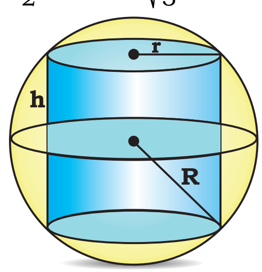
$\therefore BC = \frac{x}{\sqrt{2}}$

ΔABC में, $AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow R^2 = \frac{3x^2}{2} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2}{3}}R$



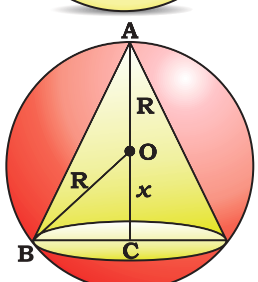
(x) एक गोले के अंदर बेलन

$\frac{\text{बेलन का आयतन}}{\text{गोले का आयतन}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$



(xi) एक गोले के अंदर शंकु

$\frac{\text{शंकु का आयतन}}{\text{गोले का आयतन}} = \frac{8}{27}$

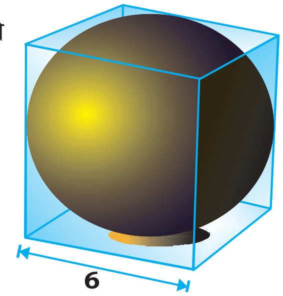


Ex. सबसे बड़ा संभावित गोला 6 सेमी भुजा वाले घन में बनाया गया है। गोले का आयतन क्या है?

HINTS सबसे बड़े सम्भावित गोले की त्रिज्या $= \frac{6}{2} = 3$ सेमी

गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 3 \times 3 \times 3 = \frac{792}{7}$ सेमी^{3}



वैकल्पिक विधि

घन का आयतन $= a^3 = 6^3 = 216$

घन का आयतन : गोले का आयतन = 21 : 11

21 ↓ 216, 11 ↓ $\frac{792}{7}$

Ex. एक गोला 14 सेमी भुजा वाले एक घन के आठ कोनों से होकर गुजरता है। गोले का आयतन (सेमी^{3} में) ज्ञात कीजिए। ($\pi = \frac{22}{7}$ का प्रयोग करें)

HINTS घन की भुजा = 14 सेमी

$\Rightarrow$ घन का विकर्ण $= 14\sqrt{3}$

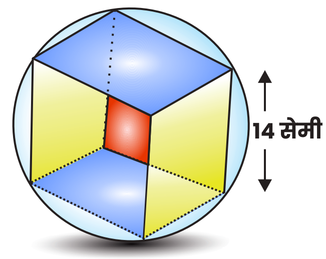
$\Rightarrow$ गोले की त्रिज्या $= \frac{14\sqrt{3}}{2} = 7\sqrt{3}$

$\therefore$ गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 7\sqrt{3} \times 7\sqrt{3} \times 7\sqrt{3}$

$= 88 \times 49\sqrt{3}$

$= 4312\sqrt{3}$ सेमी^{3}

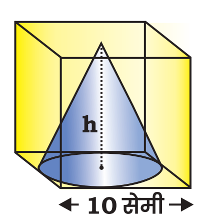


वैकल्पिक विधि

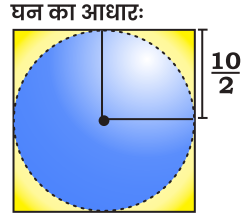
गोले का आयतन	:	घन का आयतन
$11\sqrt{3}$	:	7
↓ × 392		↓ × 392
$4312\sqrt{3}$		14^3(दिया गया है)

Ex. उस सबसे बड़े लम्ब वृत्तीय शंकु का आयतन क्या है जिसे 10 सेमी भुजा वाले घन से काटा गया है?

HINTS



घन का आधारः



शंकु की ऊँचाई = घन की ऊँचाई

शंकु की त्रिज्या $= \frac{1}{2} \times$ घन की चौड़ाई

दिया है, किनारा = 10 सेमी

$\therefore$ शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \times 5 \times 5 \times 10$

$= \frac{250}{3}\pi$ सेमी^{3}

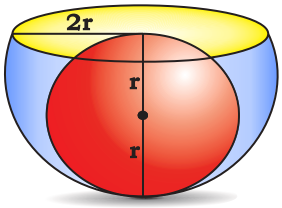
@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram @yct_publication

Ex. एक ठोस अर्धगोले में से अधिकतम आयतन वाला एक गोला काटा गया है। गोले के आयतन का शेष ठोस के आयतन से अनुपात क्या है?

HINTS



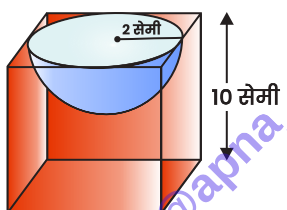
गोले का आयतन	:	शेष का आयतन
$\frac{4}{3}\pi \times r^3$	:	$\frac{2}{3}\pi(2r)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3$
$\frac{4}{3}\pi r^3$	:	$\frac{2}{3}\pi \times 8r^3 - \frac{4}{3}\pi r^3$
$\frac{4}{3}\pi r^3$	:	$\frac{12}{3}\pi r^3$
1	:	3

$\therefore$ आवश्यक अनुपात = 1 : 3

Ex. 10 सेमी भुजा वाले एक घनाकार ब्लॉक के प्रत्येक फलक से 4 सेमी व्यास का एक अर्धगोलाकार गड्ढा काटा जाता है। शेष ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल (सेमी² में) ज्ञात कीजिए। ($\pi = \frac{22}{7}$ का प्रयोग करें)

HINTS

अर्द्धगोले की त्रिज्या = $\frac{4}{2}$ = 2 सेमी



आवश्यक पृष्ठीय क्षेत्रफल = घन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल – 6 × घन के प्रत्येक फलक के शीर्ष पर बने वृत्त का क्षेत्रफल + 6 × घन के प्रत्येक फलक पर बने अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= 6 \times 10^2 - 6\pi \times 2^2 + 6 \times 2\pi \times 2^2$

$= 600 + 24\pi$

$= 600 + 24 \times \frac{22}{7} = 600 + \frac{528}{7}$

$= 600 + 75\frac{3}{7} = 675\frac{3}{7}$ सेमी²

Ex. एक खिलौना बनाने के लिए, एक बेलन के एक सिरे पर एक अर्धगोला और दूसरे सिरे पर एक शंकु लगा हुआ है। बेलन, शंकु और अर्धगोले की समान त्रिज्या 4.2 सेमी है। बेलन और शंकु की ऊँचाई 7 सेमी है। खिलौने का आयतन (सेमी³ में) ज्ञात कीजिए। ($\pi = \frac{22}{7}$ का प्रयोग करें)

HINTS

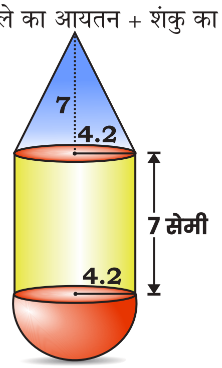
खिलौने का आयतन = बेलन का आयतन + अर्धगोले का आयतन + शंकु का आयतन

$= \pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3 + \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \pi r^2 \left(h + \frac{2}{3}r + \frac{h}{3}\right)$

$= \frac{22}{7} \times 4.2 \times 4.2 \times \left(7 + \frac{2}{3} \times 4.2 + \frac{7}{3}\right)$

= 672.672 सेमी³



ठोस को काटने की अवधारणा

(a) ठोस का आयतन नहीं बदलता है।

Ex. एक गोले को अर्धगोले में काटा जाता है। उनमें से एक का उपयोग कटोरे के रूप में किया जाता है। 12 सेमी ऊंचाई और 6 सेमी त्रिज्या वाले एक शंकाकार बर्तन को भरने में इसकी 8 कटोरियां लगती हैं। बेलन की त्रिज्या है:

HINTS 8 अर्द्धगोलों का आयतन = शंकु का आयतन

$\Rightarrow 8 \times \frac{2}{3} \times \pi \times r^3 = \frac{1}{3}\pi \times 6^2 \times 12$

$\Rightarrow r^3 = \frac{6^2 \times 12}{8 \times 2} = \frac{6^3}{8} = \frac{6^3}{2^3} \Rightarrow r = \frac{6}{2} = 3$ सेमी

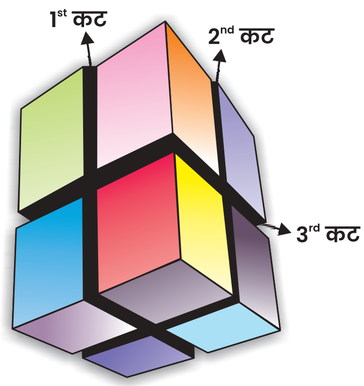
(b) ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल बढ़ जाता है।

Ex. 50 सेमी × 40 सेमी × 30 सेमी आकार के एक घनाभ को 3 कट द्वारा 8 समान भागों में काटा जाता है। सभी 8 भागों का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल (वर्ग सेमी में) क्या है?

HINTS

काटने से पहले कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = 2(50 × 40 + 40 × 30 + 30 × 50)

= 9400 सेमी²



लंबाई-चौड़ाई, चौड़ाई-ऊँचाई और ऊँचाई-लंबाई के तीन कट होते हैं। इसलिए, प्रत्येक काट से अतिरिक्त लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई प्राप्त होती है।

आठ बराबर भागों में काटने के बाद पृष्ठीय क्षेत्रफल दोगुना हो जायेगा।

$\therefore$ काटने के बाद कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = 2 × 9400 = 18800 सेमी²

वैकल्पिक विधि

लंबाई-चौड़ाई, चौड़ाई-ऊँचाई और ऊँचाई-लंबाई के तीन कट होते हैं। इसलिए, प्रत्येक कट लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई को दो समान भागों में विभाजित करता है।

प्रत्येक भाग के लिए नया आयाम = 25 सेमी × 20 सेमी × 15 सेमी

प्रत्येक भाग का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = 2(25 × 20 + 20 × 15 + 15 × 25) = 2350 सेमी²

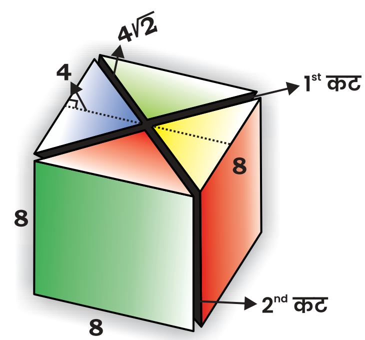
8 भागों का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = 2350 × 8 = 18800 सेमी²

Ex. एक ठोस घन की भुजा 8 सेमी है। इसे शीर्ष फलक के विकर्ण के समांतर काटकर 4 बराबर भाग प्राप्त किए गए हैं। प्रत्येक भाग का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल (सेमी² में) क्या है?

HINTS

कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2 \times \frac{1}{2} \times 8 \times 4 + 8 \times 8 + 8 \times 4\sqrt{2} \times 2$

$= 96 + 64\sqrt{2}$



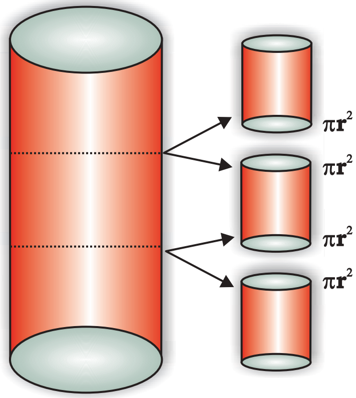
@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram @yct_publication

Ex. एक लम्ब वृत्तीय बेलन की ऊँचाई 18 सेमी और त्रिज्या 7 सेमी है। बेलन को तीन बराबर भागों में काटा जाता है (आधार के समानांतर 2 कटो से)। कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल में प्रतिशत वृद्धि क्या है?

HINTS



कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2\pi r(h + r) = 44 \times 25 = 1100$ सेमी²

पृष्ठीय क्षेत्रफल में वृद्धि = $4\pi r^2 = 4 \times 154 = 616$ सेमी²

% वृद्धि = $\frac{616}{1100} \times 100\% = 56\%$

Ex. 17.5 सेमी व्यास वाले एक ठोस गोले को दो बराबर भागों में काटा जाता है। कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल में कितनी वृद्धि (सेमी² में) होगी?

HINTS हम जानते है

ठोस गोले का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $4\pi r^2$

जब इसे दो गोलार्थों में आधा भागों में काटा जाता है।

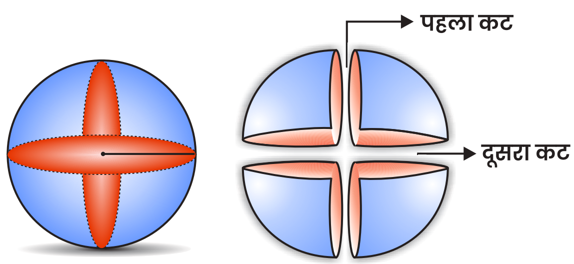
तब, कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $3\pi r^2 + 3\pi r^2 = 6\pi r^2$

अत:, क्षेत्रफल में वृद्धि = $6\pi r^2 - 4\pi r^2 = 2\pi r^2$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{17.5}{2} \times \frac{17.5}{2}$

= 481.25 सेमी²

☞



2 कट (4) भाग), 1 कट → 2 वृत्त का क्षेत्रफल (वृद्धि)

4 भाग का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $4\pi r^2 + 4\pi r^2 = 8\pi r^2$

प्रत्येक भाग का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल (चतुर्थांश गोला) = $\frac{8\pi r^2}{4} = 2\pi r^2$

Ex. एक गोलाकार गेंद को पहले पॉलिश किया जाता है और फिर उसे 4 बराबर टुकड़ों में काटा जाता है। पॉलिश किए गए क्षेत्रफल और बिना पॉलिश किए क्षेत्रफल का अनुपात क्या है?

HINTS पॉलिश किये हुए भाग का क्षेत्रफल = $4\pi r^2$

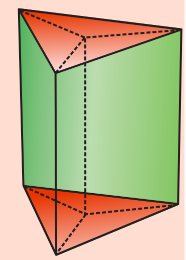
बिना पॉलिश किये हुए भाग का क्षेत्रफल

$= 4 \times \left(2 \times \frac{\pi r^2}{2}\right) = 4\pi r^2$

$\frac{\text{पॉलिश किये हुए भाग का क्षेत्रफल}}{\text{बिना पॉलिश किये हुए भाग का क्षेत्रफल}} = \frac{4\pi r^2}{4\pi r^2} = 1 : 1$

प्रिज्म

☞ प्रिज्म एक ठोस होता है जिसके दो फलक समानांतर और सर्वांगसम होते हैं और उनके फलक (बहुभुज) शीर्ष से जुड़ते हैं। प्रिज्म में आधार के रूप में एक बहुभुज होता है और ऊर्ध्वाधर भुजा आधार के लम्बवत होती है।



(i) प्रिज्म का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = आधार का परिमाप × ऊँचाई

(ii) प्रिज्म का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + 2 × आधार का क्षेत्रफल

(iii) प्रिज्म का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई

Ex. एक समकोण प्रिज्म का आधार एक त्रिभुज है जिसकी भुजाएँ 16 सेमी, 30 सेमी और 34 सेमी हैं। इसकी ऊँचाई 32 सेमी है। वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल (सेमी² में) और आयतन (सेमी³ में) क्रमश: हैं:

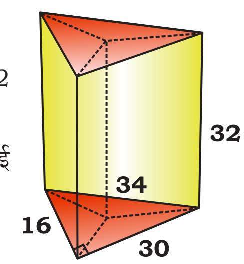
HINTS प्रिज्म का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

= परिमाप × ऊँचाई = (16 + 30 + 34) × 32

= 2560 सेमी²

प्रिज्म का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई

$= \frac{1}{2} \times 30 \times 16 \times 32 = 7680$ सेमी³



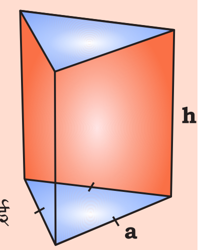
समबाहु त्रिभुजाकार प्रिज्म

(i) वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = 3ah

(ii) संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = $3ah + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

(iii) आयतन = $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2h$

जहाँ a = समबाहु त्रिभुज की भुजा, h = प्रिज्म की ऊँचाई



@apna_channels

Ex. 6 सेमी ऊँचाई वाले एक त्रिभुजाकार प्रिज्म का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $162\sqrt{3}$ सेमी² है। यदि प्रिज्म का आधार समबाहु है तो इसका आयतन ज्ञात कीजिए ?

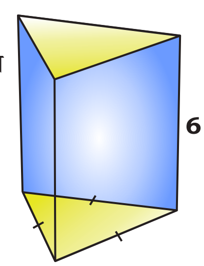
HINTS कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $162\sqrt{3}$

⇒ पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल (LSA) + 2 × आधार का क्षेत्रफल = $162\sqrt{3}$

$\Rightarrow 3a \times 6 + \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 = 162\sqrt{3} \Rightarrow a = 6\sqrt{3}$

आयतन = $\frac{\sqrt{3}}{4}(6\sqrt{3})^2 \times h$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 6 \times 6 \times 6 \times 3 = 162\sqrt{3}$ सेमी³



वर्गाकार प्रिज्म

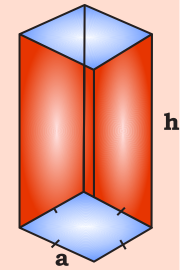
(i) वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = 4ah

(ii) संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = 4ah + 2a²

(iii) आयतन = a²h

जहाँ a = वर्ग की भुजा,

h = प्रिज्म की ऊँचाई



Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram @yct_publication

Ex. एक वर्गाकार आधार वाले लम्बवत प्रिज्म की ऊंचाई 15 सेमी है। यदि प्रिज्म का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल 608 सेमी² है, तो इसका आयतन है;

HINTS माना आधार की भुजा = x

कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $4ah + 2a^2$

$\Rightarrow 608 = 4x \times 15 + 2x^2 \Rightarrow 2x^2 + 60x - 608 = 0$

हल करने पर, $x = 8$

आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई = $8^2 \times 15 = 960$ सेमी³

Ex. एक ठोस प्रिज़्म का आधार एक वर्ग है और उसकी ऊँचाई 10 सेमी है। उसका आयतन 160 सेमी³ है। उस प्रिज़्म का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल (सेमी² में) ज्ञात कीजिए।

HINTS प्रिज्म का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई

$\Rightarrow 160 = a^2 \times 10 \Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$

वर्ग (a) की भुजा = 4 सेमी.

वर्ग का परिमाप = $4a = 4 \times 4 = 16$ सेमी

∴ प्रिज्म का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल

= वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + 2 × आधार का क्षेत्रफल

$= 16 \times 10 + 2 \times 4 \times 4 = 160 + 32 = 192$ सेमी²

षट्कोणीय प्रिज्म

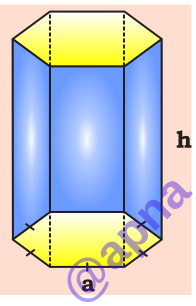
(i) वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = 6ah

(ii) संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = $6ah + 3\sqrt{3}a^2$

(iii) आयतन = $\frac{6 \times \sqrt{3}}{4} a^2h$

जहाँ a = षट्भुज की भुजा,

h = प्रिज्म की ऊँचाई



Ex. एक प्रिज्म का आधार सम षट्कोणीय है जिसकी भुजा 6 सेमी है। यदि प्रिज्म का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $216\sqrt{3}$ सेमी² है, तो प्रिज्म की ऊँचाई क्या है?

HINTS समबाहु Δ का क्षेत्रफल = $\frac{\sqrt{3}}{4} \times 6 \times 6 = 9\sqrt{3}$ सेमी²

षट्भुज का क्षेत्रफल = $6 \times 9\sqrt{3}$ सेमी²

दो षट्भुजों का क्षेत्रफल = $2 \times 6 \times 9\sqrt{3} = 108\sqrt{3}$ सेमी²

कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल (TSA) = $6ah + 3\sqrt{3}a^2$

$\Rightarrow 216 = 36 \times h + 108\sqrt{3}$

$\Rightarrow h = \frac{108\sqrt{3}}{36} = 3\sqrt{3}$ सेमी

Ex. एक समकोण प्रिज़्म का आधार भुजा 5 सेमी का एक सम षट्भुज है। यदि उसकी ऊँचाई $12\sqrt{3}$ सेमी है, तो उसका आयतन (सेमी³ में) कितना होगा?

HINTS $h = 12\sqrt{3}$ सेमी,

a = 5 सेमी

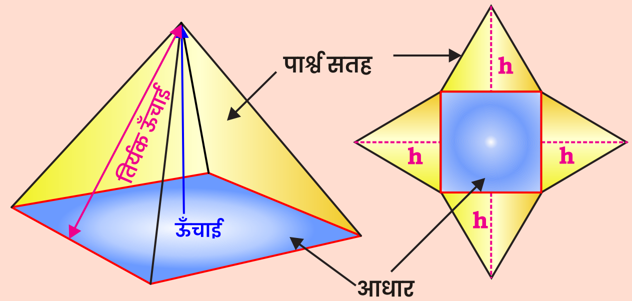
सम षट्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{3\sqrt{3}a^2}{2} = \frac{3\sqrt{3} \times 5^2}{2} = \frac{75\sqrt{3}}{2}$ सेमी²

∴ आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई

$= \frac{75\sqrt{3}}{2} \times 12\sqrt{3} = 1350$ सेमी³

पिरामिड

पिरामिड एक त्रि-आयामी आकृति है। पिरामिड में एक बहुभुज आधार और सपाट त्रिकोणीय फलक होती हैं, जो एक उभयनिष्ठ बिंदु पर जुड़ते हैं जिसे शीर्ष कहा जाता है। आधारों को शीर्ष से जोड़कर पिरामिड का निर्माण किया जाता है। आधार का प्रत्येक किनारा शीर्ष से जुड़ा हुआ है, और त्रिकोणीय फलक बनाता है, जिसे पार्श्व फलक कहा जाता है। यदि किसी पिरामिड का आधार n - भुजा का है, तो इसमें n + 1 फलक, n + 1 शीर्ष और 2n किनारे होते हैं।



(i) पिरामिड का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = सभी पार्श्व त्रिभुजाकार फलकों के क्षेत्रफलों का योग

$= \frac{1}{2} \times$ आधार का परिमाप × तिर्यक ऊँचाई

(ii) पिरामिड का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + आधार का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2} \times$ आधार का परिमाप × तिर्यक ऊँचाई + आधार का क्षेत्रफल

(iii) पिरामिड का आयतन $= \frac{1}{3} \times$ आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई

@apna_channels

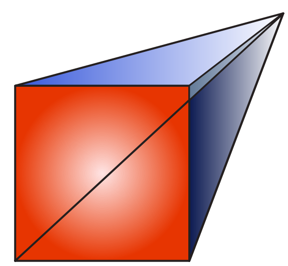
Ex. यदि E, F और V क्रमशः एक वर्ग पिरामिड के किनारों, फलकों और शीर्षों की संख्या है, तो (2E - F + 2V) का आयतन है:

HINTS पिरामिड में,

फलकों की संख्या = n + 1

शीर्षों की संख्या = n + 1

किनारों की संख्या = 2n



F(फलक) = 4 + 1 = 5

V(शीर्ष) = 4 + 1 = 5

E (किनारे) = 2 × 4 = 8

∴ $(2E - F + 2V) = (2 \times 8 - 5 + 2 \times 5)$

$= 16 - 5 + 10 = 21$

Ex. एक प्रिज़्म और एक पिरामिड का आधार तथा ऊँचाई समान है। प्रिज़्म और पिरामिड के आयतनों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

HINTS पिरामिड का आयतन $= \frac{1}{3} \times$ आधार का क्षेत्रफल × h

प्रिज्म का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × h

∴ आवश्यक अनुपात

$= \frac{Ar \times h}{\frac{1}{3} \times Ar \times h} = \frac{3}{1}$

= 3 : 1

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram @yct_publication

समबाहु त्रिभुजाकार पिरामिड

(i) वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times 3a \times l$

(ii) संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2} \times 3al + \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

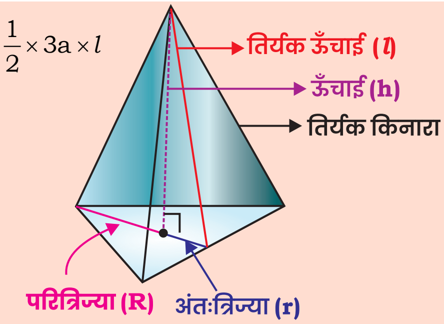
(iii) आयतन

$= \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \times h$

(iv) ऊंचाई (l)

$= \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2\sqrt{3}}\right)^2}$

(v) तिर्यक किनारा $= \sqrt{h^2 + R^2} = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{l^2 + \left(\frac{\text{भुजा}}{2}\right)^2}$



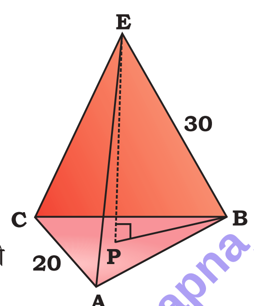
Ex. समकोण पिरामिड का आधार एक समबाहु त्रिभुज है, जिसकी प्रत्येक भुजा 20 सेमी है। प्रत्येक तिर्यक किनारा 30 सेमी है। पिरामिड की ऊर्ध्वाधर ऊंचाई (सेमी में) है:

HINTS माना, h ऊर्ध्वाधर ऊंचाई है।

समबाहु Δ की परित्रिज्या $= \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{20}{\sqrt{3}}$

$h = \sqrt{AE^2 - AP^2} = \sqrt{30^2 - \left(\frac{20}{\sqrt{3}}\right)^2}$

$= \sqrt{900 - \frac{400}{3}} = \sqrt{\frac{2300}{3}} = 10\sqrt{\frac{23}{3}}$ सेमी



वर्गाकार पिरामिड

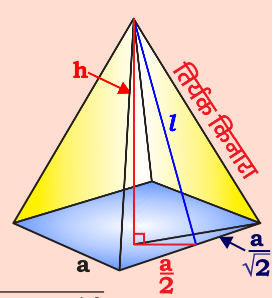
(i) वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times 4a \times l$

(ii) संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times 4al + a^2$

(iii) आयतन = $\frac{1}{3} \times a^2 \times h$

(iv) तिर्यक ऊँचाई = $\sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$

(v) तिर्यक किनारा = $\sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{l^2 + \left(\frac{\text{side}}{2}\right)^2}$



Ex. एक समकोण पिरामिड का आधार $8\sqrt{2}$ सेमी भुजा वाला एक वर्ग है और इसके प्रत्येक तिर्यक किनारे की लंबाई 10 सेमी है। पिरामिड का आयतन (सेमी³ में) क्या है?

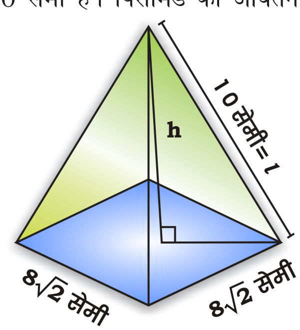
HINTS $h = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$ सेमी

∴ पिरामिड का आयतन

$= \frac{1}{3} \times$ आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई

$= \frac{1}{3} \times 8\sqrt{2} \times 8\sqrt{2} \times 6$

= 256 सेमी³



Ex. एक समकोण वर्गाकार पिरामिड जिसका पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल 624 सेमी² है। यदि वर्ग के विकर्ण की लंबाई $24\sqrt{2}$ सेमी है, तो पिरामिड का आयतन है:

HINTS $d = 24\sqrt{2}$

∴ वर्ग की भुजा (a) = 24

पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4 \times \frac{1}{2} \times 24 \times l$

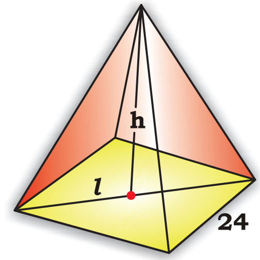
$\Rightarrow 624 = 48 \times l \Rightarrow l = \frac{624}{48} = 13$

अब, h = 5 सेमी

[पाइथागोरस त्रिक 5, 12, 13 से]

∴ पिरामिड का आयतन = $\frac{1}{3}$ × आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई

$= \frac{1}{3} \times a^2 \times h = \frac{1}{3} \times 24 \times 24 \times 5 = 24 \times 40 = 960$ सेमी³



Ex. एक समकोण पिरामिड का आधार 8 सेमी भुजा वाला वर्ग है। यदि उसका कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल 208 सेमी² है, तो पिरामिड की तिर्यक ऊँचाई (सेमी में) कितनी होगी?

HINTS दिया है, a = 8 सेमी

कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = 208 सेमी²

⇒ पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल + आधार का क्षेत्रफल = 208 वर्ग सेमी

$\Rightarrow \left[\frac{1}{2} \times \text{आधार का परिमाप} \times l\right]$ + आधार का क्षेत्रफल = 208

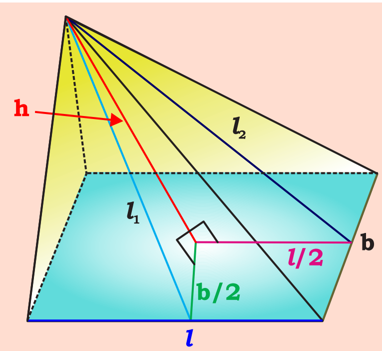
$\Rightarrow \left[\frac{1}{2} \times 4 \times 8 \times l\right] + (8 \times 8) = 208$

$\Rightarrow 16 \times l + 64 = 208$ सेमी²

$\Rightarrow l = 9$

@apna_channels

आयताकार पिरामिड



दो तिर्यक ऊँचाई होती है।

- पहली तिर्यक ऊँचाई $(l_1) = \sqrt{h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$
- दूसरी तिर्यक ऊँचाई $(l_2) = \sqrt{h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}$

(i) वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2 \times \frac{1}{2} l \times l_1 + 2 \times \frac{1}{2} \times b \times l_2$

(ii) संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = C.S.A + lb

(iii) आयतन = $\frac{1}{3} \times lb \times h$

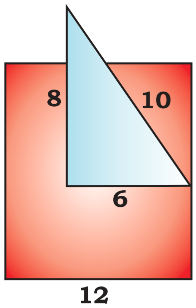
(iv) (तिर्यक किनारा)² = $h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2$

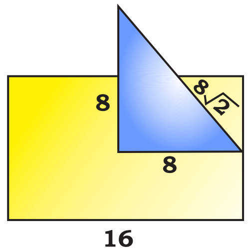
Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram @yct_publication

Ex. एक आयताकार आधार वाले पिरामिड का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी लंबाई 16 सेमी और चौड़ाई 12 सेमी है। यदि पिरामिड की ऊंचाई 8 सेमी है?

HINTS





वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\times\frac{1}{2}l\times l_1 + 2\times\frac{1}{2}\times b\times l_2$

$= \frac{1}{2}\times 16\times 10\times 2 + \frac{1}{2}\times 12\times 8\sqrt{2}\times 2 = 160 + 96\sqrt{2}$

कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल (T.S.A) $= 160 + 96\sqrt{2} + 16\times 12$

$= 352 + 96\sqrt{2}$

षट्कोणीय पिरामिड

(i) वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\times 6al$

(ii) संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

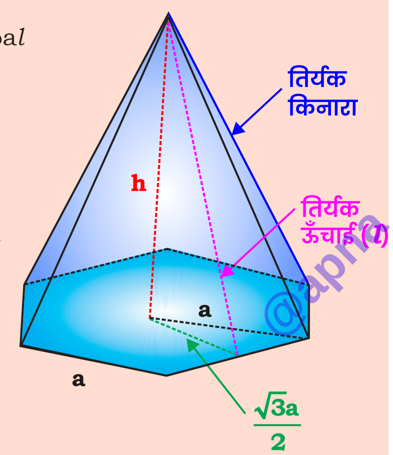
$= \frac{1}{2}6al + 6\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

(iii) आयतन $= \frac{1}{3}\times\frac{6\sqrt{3}}{4}a^2\times h$

(iv) तिर्यक ऊँचाई

$(l) = \sqrt{h^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2}$

(v) तिर्यक किनारा $= \sqrt{h^2 + a^2}$



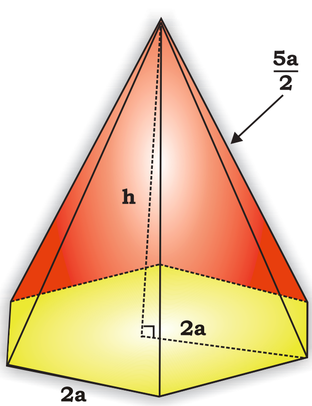
Ex. एक पिरामिड एक आधार पर बना है जो 2a सेमी भुजा वाला एक नियमित षट्भुज है। यदि इस पिरामिड का प्रत्येक तिर्यक किनारा $\frac{5a}{2}$ सेमी लम्बा है, तो इस पिरामिड का आयतन है:

HINTS नियमित षट्कोणीय पिरामिड की ऊंचाई (h)

$= \sqrt{(\text{तिर्यक किनारा})^2 - (\text{भुजा})^2}$

$= \sqrt{\left(\frac{5a}{2}\right)^2 - (2a)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}a^2}$

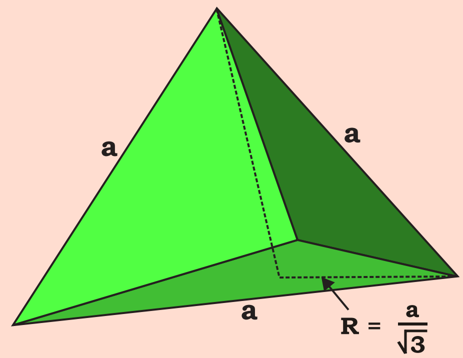
$= \frac{3}{2}a$



आयतन $= \frac{1}{3}\times$ आधार का क्षेत्रफल $\times h$

$= \frac{1}{3}\times 6\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times(2a)^2\times\frac{3}{2}a = 3\sqrt{3}a^3$ सेमी^{3}

समचतुष्फलक



त्रिकोणीय आधार पर पिरामिड एक चतुष्फलक है। जब कोई ठोस चार त्रिभुजाकार फलकों से घिरा होता है तो वह चतुष्फलक होता है। एक समकोण चतुष्टफलक तब कहलाता है जब एक चतुष्फलक का आधार एक समबाहु त्रिभुज होता है और अन्य त्रिभुजाकार फलक समद्विबाहु त्रिभुज होते हैं। जब हम किसी ऐसे चतुष्फलक को देखते है जिसके चारों फलक समबाहु हों तो वह सम चतुष्फलक होता है।

(a) चार समबाहु फलक हैं।

(b) सभी किनारे लंबाई में बराबर है।

(c) तिर्यक ऊँचाई आधार की भुजा के बराबर है।

(i) वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = तीन समबाहु त्रिभुजों का क्षेत्रफल $= 3\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

(ii) कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = चार समबाहु त्रिभुजों का क्षेत्रफल

$= 4\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \sqrt{3}a^2$

(iii) ऊँचाई (h) $= \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}a$

(iv) आयतन (V) $= \frac{1}{3}\times$ आधार का क्षेत्रफल $\times$ ऊँचाई

$= \frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\times\sqrt{\frac{2}{3}}a = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$

Ex. एक नियमित चतुष्फलक की भुजा की लंबाई 12 सेमी है। आयतन ज्ञात कीजिए।

HINTS नियमित चतुष्फलक का आयतन $= \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$

$= \frac{\sqrt{2}}{12}\times 12^3 = 144\sqrt{2}$ सेमी^{3}

Ex. एक समचतुष्फलक का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी भुजा $6\sqrt{3}$ सेमी है।

HINTS समचतुष्फलक का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 3\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

$= 3\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 108 = 81\sqrt{3}$ सेमी^{2}

Ex. एक समचतुष्फलक का आयतन $144\sqrt{2}$ सेमी^{3} है। इसके किनारे की लंबाई ज्ञात कीजिए।

HINTS नियमित चतुष्फलक का आयतन $= \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$

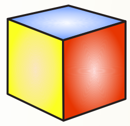
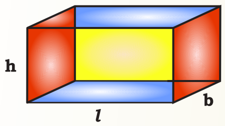
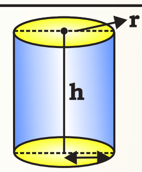
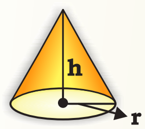
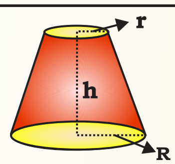
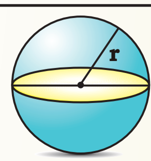
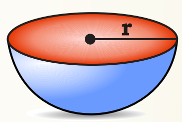
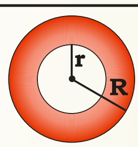
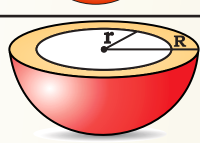
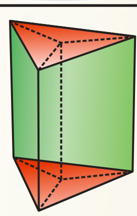
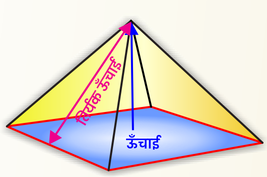
$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{12}\times a^3 = 144\sqrt{2}$

$\Rightarrow a = 12$ सेमी

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram @yct_publication

ठोस आकृति		आयतन	पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल	कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल
घन		भुजा^{3}	$4 \times$ भुजा^{2}	$6 \times$ भुजा^{2}
घनाभ		$l \times b \times h$	$2(lh + bh)$	$2(lb + lh + bh)$
बेलन		$\pi r^2 h$	$2\pi rh$	$2\pi r(r + h)$
शंकु		$\left(\frac{1}{3}\right)\pi r^2 h$	$\pi r l$ (जहाँ $l = \sqrt{r^2 + h^2}$)	$\pi r(r + l)$
शंकु का छिन्नक		$\frac{1}{3}\pi[R^2 + r^2 + Rr]h$	$\pi(R + r)l$	$\pi(R + r)l + \pi(R^2 + r^2)$
गोला		$\left(\frac{4}{3}\right)\pi r^3$	$4\pi r^2$	$4\pi r^2$
अर्द्धगोला		$\left(\frac{2}{3}\right)\pi r^3$	$2\pi r^2$	$3\pi r^2$
गोलीय शेल		$\frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)$	$4\pi(R^2 - r^2)$	$4\pi(R^2 - r^2)$
अर्द्धगोलीय शेल		$\frac{2}{3}\pi(R^3 - r^3)$	$2\pi(R^2 + r^2)$	$3\pi R^2 + \pi r^2$
प्रिज्म		आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई	आधार का परिमाप × ऊँचाई	पार्श्व पृष्ठीय क्षे. + 2 × आधार क्षेत्रफल
पिरामिड		$\frac{1}{3}$ × आधार क्षेत्रफल × ऊँचाई	$\frac{1}{2}$ × आधार का परिमाप × तिर्यक ऊँचाई	पार्श्व पृष्ठीय क्षे. + आधार का क्षेत्रफल

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

अध्याय 04

संख्या पद्धति

संख्या पद्धति

- संख्याओं का वर्गीकरण
- इकाई अंक
- गुणनखंड
- विभाज्यता
- शेषफल प्रमेय
- शून्यों की संख्या
- संख्या की गिनती
- बाइनरी संख्या

संख्याओं का वर्गीकरण

वास्तविक संख्या → **सम्मिश्र संख्या** ← **काल्पनिक संख्या**

वास्तविक संख्या
वे संख्याएँ जो संख्या रेखा पर दर्शायी जा सकती है
Ex. $+3, -7, 5, \frac{17}{14}, \frac{5}{8}, \sqrt{7}, \sqrt{5}$

काल्पनिक संख्या
वे संख्याएँ जो संख्या रेखा पर नहीं दर्शायी जा सकती है
Ex. $\sqrt{-7}, \sqrt{-3}, \sqrt{-1} = i$ (आयोटा)

वास्तविक संख्या → परिमेय, अपरिमेय

परिमेय
संख्या को $\frac{P}{Q}$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है ($Q \neq 0$) P, Q → पूर्णांक
Ex. $\frac{5}{3}, \frac{-8}{1}, 555, \frac{22}{7}, 4, -3$

अपरिमेय
संख्या को $\frac{P}{Q}$ के रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता
Ex. $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, ... , 0.1432507......., $\pi = 3.141592$ ......

परिमेय → पूर्णांक, भिन्न, दशमलव संख्याएँ

पूर्णांक → ऋणात्मक पूर्णांक, पूर्ण संख्या

ऋणात्मक पूर्णांक
Ex. −1, −2, −3, −4, ...

पूर्ण संख्या
Ex. 0, 1, 2, 3, 4

पूर्ण संख्या → शून्य, प्राकृतिक संख्या

शून्य

प्राकृतिक संख्या
Ex. 1, 2, 3, 4 ....

भिन्न
Ex. $\frac{7}{9}, \frac{2}{5}, \frac{5}{3}$

दशमलव संख्याएँ

→ **सांत दशमलव**
Ex. $0.5 = \frac{1}{2}, 0.73 = \frac{73}{100}$

→ **असांत आवर्ती दशमलव**
Ex. $0.3333..... = \frac{1}{3}, 0.565656..... = \frac{56}{99}$

→ **असांत अनावर्ती दशमलव**
Ex. $\sqrt{2} = 1.414$ .....
↓ अपरिमेय संख्या

प्राकृतिक संख्या → विषम संख्या, सम संख्या, भाज्य संख्या, अभाज्य संख्या

विषम संख्या
संख्या जो 2 से विभाज्य नहीं है, (2k ± 1) के रूप में
Ex. 1, 3, 5, 7

सम संख्या
संख्या जो 2 से विभाज्य है, (2k के रूप में)
Ex. 0, 2, 4, 6

भाज्य संख्या
दो से अधिक गुणनखंड
Ex. 4, 6, 8, 9
4 – सबसे छोटी भाज्य संख्या
9 – सबसे छोटी विषम भाज्य संख्या

अभाज्य संख्या
केवल दो गुणनखंड 1 और स्वयं
Ex. 2, 3, 5, 7, 11 ...... इत्यादि।
- प्रत्येक अभाज्य संख्या को (6k ± 1) रूप में लिखा जा सकता है। लेकिन प्रत्येक (6k ± 1) रूप आवश्यक रूप से अभाज्य संख्या नहीं हो सकती।

Ex. 13 → 6 × 2 + 1 (अभाज्य)
25 → 6 × 4 + 1 (अभाज्य संख्या नहीं है)

अभाज्य संख्या → सह-अभाज्य संख्याएँ, युग्म-अभाज्य संख्या

सह-अभाज्य संख्याएँ
यदि दो संख्याओं का म.स.प. 1 है।
Ex. (2, 3), (11, 13), (16, 9), (25, 19) इत्यादि।

युग्म-अभाज्य संख्या
जब दो क्रमागत अभाज्य संख्याएँ 2 के अंतराल पर हों, तो उन्हें युग्म अभाज्य संख्याएँ कहते हैं।
Ex. (3, 5), (5, 7), (11, 13)

पूर्ण संख्या
यदि किसी संख्या के सभी गुणनखंडों का योग (उस संख्या को छोड़कर) दी गई संख्या के बराबर हो, तो उस संख्या को पूर्ण संख्या कहा जाता है।
Ex. 6, 28, 496, 8128 इत्यादि।
28 के गुणनखंड → 1, 2, 4, 7, 14
$\therefore 1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$
इस प्रकार, 28 एक पूर्ण संख्या है

नोट: 6 सबसे छोटी पूर्ण संख्या है।

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram @ycl_publication

- 2 – एकमात्र सम अभाज्य संख्या और सबसे छोटी अभाज्य संख्या है
- 3, 5, 7 – क्रमागत विषम अभाज्य संख्याओं का एकमात्र युग्म
- 101 – सबसे छोटी 3 अंकों की अभाज्य संख्या है।
- 997 – सबसे बड़ी 3 अंकों की अभाज्य संख्या है।
- 1 न तो अभाज्य संख्या है और न ही भाज्य

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83,89, 97

0 ⟶ 50 (15 अभाज्य संख्या) ⟶ 100 (10 अभाज्य संख्या)

(1 – 100) → 25 अभाज्य संख्या

1 ⟶ 200 = 46

1 ⟶ 500 = 95

1 ⟶ 1000 = 168

☞ कैसे जांचें कि दी गई संख्या अभाज्य है या नहीं?

यह जाँचने के लिए कि कोई संख्या अभाज्य संख्या है या नहीं, सबसे पहले संख्या का वर्गमूल निकालें। वर्गमूल को उसके ठीक नीचे वाले पूर्णांक तक पूर्णांकित करें। फिर संख्या की उसके नीचे की सभी अभाज्य संख्याओं से विभाज्यता की जाँच करें। यदि संख्या किसी भी अभाज्य संख्या से विभाज्य नहीं है, तो वह संख्या अभाज्य संख्या है।

Ex. 137 अभाज्य संख्या है या नहीं?

HINTS $\sqrt{137} \approx 11 \Rightarrow$ 11 से छोटी या बराबर अभाज्य संख्याएँ 2, 3, 5, 7 और 11 हैं। 137 इनमें से किसी से भी विभाज्य नहीं है। इसलिए यह एक अभाज्य संख्या है।

Ex. 80 से 100 तक अभाज्य संख्याओं का औसत क्या है?

HINTS $\sqrt{100} = 10 \Rightarrow$ 10 से छोटी अभाज्य संख्याएँ 2, 3, 5, 7 हैं।

अतः सम संख्याएँ और 5 पर समाप्त होने वाली संख्याएँ अभाज्य संख्याएँ नहीं होंगी, इसलिए केवल 3 और 7 की विभाज्यता की जाँच करें।

80 से 100 के बीच अभाज्य संख्याएँ 83, 89 और 97 हैं।

आवश्यक औसत $= \frac{83+89+97}{3} = \frac{269}{3} = 89.67$

Ex. x, y और z भिन्न अभाज्य संख्याएँ हैं जहाँ $x < y < z$ है। यदि $x + y + z = 70$ है, तो z का मान क्या है?

HINTS योग 70 है, इसका मतलब है कि कम से कम एक संख्या सम है,

क्योंकि विषम + विषम + विषम = विषम

जैसा कि हम जानते हैं, केवल एक ही सम अभाज्य संख्या होती है, और वह 2 है।

2 सबसे छोटी अभाज्य संख्या भी है। अतः, $x = 2$

अब, $70 - 2 = 68 = y + z$

अब, विकल्पों का उपयोग करें

विकल्प (a): $z = 29 \Rightarrow y = 68 - 29 = 39$ (y भाज्य है)

विकल्प (b): $z = 43 \Rightarrow y = 68 - 43 = 25$ (y भाज्य है)

विकल्प (c): $z = 31 \Rightarrow y = 68 - 31 = 37$ ($z < y$)

विकल्प (d): $z = 37$

$\Rightarrow y = 68 - 37 = 31$ ($y < z$, दी गई शर्त को संतुष्ट करता है)

अतः, $z = 37$

Ex. x, y और z अभाज्य संख्याएँ हैं जिससे $x + y + z = 38$ है। x का अधिकतम मान क्या है?

HINTS यदि सभी संख्याएँ सम हैं, तो, $\Rightarrow x + y + z = 6$

तो, उनमें से दो विषम हैं और उनमें से एक 2 है

मान लीजिए, $z = 2$ है तो $\Rightarrow x + y = 36$

36 के सबसे निकट की अभाज्य संख्या 31 है। यदि $x = 31$ है तो हमें $y = 5$ प्राप्त होता है, जो एक विषम अभाज्य संख्या है।

∴ 31, x का अधिकतम मान है।

इकाई अंक

किसी दिए गए व्यंजक का इकाई अंक ज्ञात करने के लिए हमें संपूर्ण व्यंजक को हल करना आवश्यक नहीं है, बल्कि सभी संख्याओं के इकाई अंक पर कार्य करके परिणामी व्यंजक का इकाई अंक ज्ञात किया जाता है।

मान लीजिए $N = a \times b$, $N = a + b$, $N = a - b$, N के इकाई अंक की गणना करने के लिए, हम केवल संख्या a और b के इकाई अंक पर विचार करते हैं।

चक्रीयता

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

चक्रीयता 1	चक्रीयता 2		चक्रीयता 4			
0, 1, 5, 6	4, 9		2	3	7	8
	विषम	सम				
$(0)^n = 0$			$2^1 = 2$	$3^1 = 3$	$7^1 = 7$	$8^1 = 8$
$(1)^n = 1$			$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$7^2 = 49$	$8^2 = 64$
$(5)^n = 5$	(4) = 4	(4) = 6	$2^3 = 8$	$3^3 = 27$	$7^3 = 343$	$8^3 = 512$
$(6)^n = 6$	(9) = 9	(9) = 1	$2^4 = 16$	$3^4 = 81$	$7^4 = 2401$	$8^4 = 4096$

Ex. 232 × 235 का इकाई अंक ज्ञात कीजिए।

HINTS 232 × 235 = इकाई अंक (0)

Ex. 628 + 493 + 589 का इकाई अंक ज्ञात कीजिए।

HINTS 628 + 493 + 589 = 8 + 3 + 9 = इकाई अंक (0)

Ex. 2383 – 1689 का इकाई अंक ज्ञात कीजिए।

HINTS 2383 – 1689 = – 6 + 10 = 4

$N = x^y$ पर विचार करें

N के इकाई अंक की गणना करने के लिए, हम केवल संख्या x के इकाई अंक पर विचार करते हैं।

किसी व्यंजक के इकाई अंक की गणना व्यंजक की घात को 4 से भाग देने पर शेषफल प्राप्त करके की जा सकती है।

Ex. $(382)^{575}$ का इकाई अंक क्या होगा?

HINTS चरण-1: घात के अंतिम 2 अंकों को 4 से भाग दें और शेष ज्ञात करें।

शेष = 75/4 = 3

चरण-2: शेष को इकाई अंक की घात के रूप में रखें और उत्तर ज्ञात करें। $[2^3 = 8]$

चरण 1 में, यदि शेषफल 0 है तो घात 4 के बराबर रखें।

Ex. निम्नलिखित प्रत्येक स्थिति में इकाई का अंक ज्ञात कीजिए।

(i) $(187)^{282} \times (529)^{321} \times (343)^{236}$

(ii) $(789)^{315} + (232)^{644} + (528)^{253}$

(iii) $(982)^{481} - (219)^{241}$

HINTS (i) घात के अंतिम 2 अंकों को 4 से भाग दें तथा शेष को इकाई स्थान अंक की घात के रूप में लिखें।

$7^2 \times 9^1 \times 3^4 \Rightarrow 9 \times 9 \times 1 = 1$

(ii) $9^3 + 2^4 + 8^1 \Rightarrow 9 + 6 + 8 = 3$

(iii) $2^1 - 9^1 \Rightarrow 12 - 9 = 3$

[यदि पहली संख्या कम है तो उसमें 10 जोड़ें]

Ex. व्यंजक का इकाई अंक ज्ञात कीजिए।

1! + 2! + 3! + 4! + ... + 100!

HINTS 1 + 1 × 2 + 1 × 2 × 3 + 1 × 2 × 3 × 4 + 1 × 2 × 3 × 4 × 5 + ... + 100! = 1 + 2 + 6 + 4 + 0 + 0 + 0 ..... + 0 = 13

अतः व्यंजक का इकाई अंक 3 है।

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

गुणनखंड:- कोई भी संख्या N को $a^p \times b^q \times c^r \times d^s \times$ ..... के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जहाँ, a, b, c, और d अभाज्य संख्याएँ हैं।

Ex. $15 = 3 \times 5$, $45 = 3^2 \times 5$, $100 = 2^2 \times 5^2$ और इसी तरह आगे भी

गुणनखंड

गुणनखंडों की कुल संख्या

यदि $N = a^p \times b^q \times c^r \times d^s \times$ ...., तो

गुणनखंडों की कुल संख्या

$= (p + 1) \times (q + 1) \times (r + 1) \times (s + 1)$ ....

Ex. 360 के गुणनखंडों की कुल संख्या ज्ञात कीजिए।

HINTS 360 के अभाज्य गुणनखंडन

$= 2^3 \times 3^2 \times 5^1$

गुणनखंडों की कुल संख्या

$= (3 + 1) \times (2 + 1) \times (1 + 1) = 24$

Ex. 480 के गुणनखंडों की कुल संख्या ज्ञात कीजिए।

HINTS 480 के अभाज्य गुणनखंडन

$= 2^5 \times 3^1 \times 5^1$

गुणनखंडों की कुल संख्या

$= (5 + 1) \times (1 + 1) \times (1 + 1) = 24$

सम गुणनखंडों की कुल संख्या

यदि $N = a^p \times b^q \times c^r \times d^s \times$ ...., तो

सम गुणनखंडों की कुल संख्या

$= p \times (q + 1) \times (r + 1) \times (s + 1)$.......

Ex. 360 के सभी सम गुणनखंडों की संख्या ज्ञात कीजिए।

HINTS 360 के अभाज्य गुणनखंडन

$= 2^3 \times 3^2 \times 5^1$

सम गुणनखंडों की कुल संख्या

$= 3 \times (2 + 1) \times (1 + 1) = 3 \times 3 \times 2 = 18$

वैकल्पिक विधि

सम गुणनखंड = (कुल – विषम) गुणनखंड

सम गुणनखंडों की कुल संख्या

$= 4 \times 3 \times 2 - 3 \times 2 = 18$

विषम गुणनखंडों की कुल संख्या

यदि $N = a^p \times b^q \times c^r \times d^s \times$ ...., तो

विषम गुणनखंडों की कुल संख्या

$= (q + 1) \times (r + 1) \times (s + 1)$ ....

नोट जब हम विषम गुणनखंडों की संख्या ज्ञात करते हैं, तो हम a के घातांक को अनदेखा कर देते हैं, जहाँ (a = 2)

Ex. 360 के विषम गुणनखंडों की कुल संख्या ज्ञात कीजिए।

HINTS 360 के अभाज्य गुणनखंडन

$= 2^3 \times 3^2 \times 5^1$

विषम गुणनखंडों की कुल संख्या

$= (2 + 1) \times (1 + 1) = 3 \times 2 = 6$

सभी गुणनखंडों का योग

यदि $N = a^p \times b^q \times c^r \times d^s \times$...., तो

सभी गुणनखंडों का योग

$= (a^0 + a^1 + ... + a^p)(b^0 + b^1 + ... + b^q)(c^0 + c^1 + ... + c^r)$ .....

'या'

सभी गुणनखंडों का योग

$$= \frac{a^{p+1} - 1}{a - 1} \times \frac{b^{q+1} - 1}{b - 1} \times \frac{c^{r+1} - 1}{c - 1}$$

Ex. 360 के सभी गुणनखंडों का योग ज्ञात कीजिए।

HINTS 360 के अभाज्य गुणनखंडन

$= 2^3 \times 3^2 \times 5^1$

सभी गुणनखंडों का योग

$= (2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3)(3^0 + 3^1 + 3^2)(5^0 + 5^1)$

$= (1 + 2 + 4 + 8)(1 + 3 + 9)(1 + 5)$

$= 15 \times 13 \times 6 = 1170$

वैकल्पिक विधि

सभी गुणनखंडों का योग

$$= \frac{a^{p+1} - 1}{a - 1} \times \frac{b^{q+1} - 1}{b - 1} \times \frac{c^{r+1} - 1}{c - 1}$$

$$= \frac{2^{3+1} - 1}{2 - 1} \times \frac{3^{2+1} - 1}{3 - 1} \times \frac{5^{1+1} - 1}{5 - 1}$$

$= 15 \times 13 \times 6 = 1170$

सम गुणनखंडों का योग

यदि $N = a^p \times b^q \times c^r \times d^s \times$...., तो

सभी सम गुणनखंडों का योग

$= (a^1 + a^2 + ... + a^p)(b^0 + b^1 + ..b^q)(c^0 + c^1 + ... + c^r)$

$$= \left(\frac{a^{p+1} - 1}{a - 1} - 1\right) \times \frac{b^{q+1} - 1}{b - 1} \times \frac{c^{r+1} - 1}{c - 1}$$

'या'

सभी सम गुणनखंडों का योग

$$= \frac{a^{p+1} - a}{a - 1} \times \frac{b^{q+1} - 1}{b - 1} \times \frac{c^{r+1} - 1}{c - 1}$$

Ex. 360 के सभी सम गुणनखंडों का योग ज्ञात कीजिए।

HINTS 360 के अभाज्य गुणनखंडन

$= 2^3 \times 3^2 \times 5^1$

सभी सम गुणनखंडों का योग

$= (2^1 + 2^2 + 2^3) \times (3^0 + 3^1 + 3^2) \times (5^0 + 5^1)$

$= 14 \times 13 \times 6 = 1092$

वैकल्पिक विधि

सभी सम गुणनखंडों का योग

$$= \left(\frac{2^{3+1} - 2}{2 - 1}\right)\left(\frac{3^{2+1} - 1}{3 - 1}\right)\left(\frac{5^{1+1} - 1}{5 - 1}\right)$$

$= 14 \times 13 \times 6 = 1092$

स्वयं करें

Ex. 720 के सभी सम गुणनखंडों का योग ज्ञात कीजिए। *[Ans. 2340]*

विषम गुणनखंडों का योग

यदि $N = a^p \times b^q \times c^r \times d^s \times$ ...., तो

सभी विषम गुणनखंडों का योग

$= a^0 (b^0 + b^1 + ... + b^q)(c^0 + c^1 + ... + c^r)$, जहां a = 2

'या'

सभी विषम गुणनखंडों का योग

$$= \frac{b^{q+1}}{b - 1} \times \frac{c^{r+1} - 1}{c - 1}$$

Ex. 360 के सभी विषम गुणनखंडों का योग ज्ञात कीजिए।

HINTS 360 के अभाज्य गुणनखंडन

$= 2^3 \times 3^2 \times 5^1$

सभी विषम गुणनखंडों का योग

$= 2^0 (3^0 + 3^1 + 3^2)(5^0 + 5^1)$

$= 1 \times 13 \times 6 = 78$

वैकल्पिक विधि

सभी विषम गुणनखंडों का योग

$$= \frac{3^{2+1} - 1}{3 - 1} \times \frac{5^{1+1} - 1}{5 - 1} = \frac{26}{2} \times \frac{24}{4} = 78$$

स्वयं करें

Ex. 720 के सभी विषम गुणनखंडों का योग ज्ञात कीजिए। *[Ans. 78]*

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram @yct_publication

एक प्राकृतिक संख्या का अभाज्य और संयुक्त गुणनखंड

हम जानते हैं,

किसी भी प्राकृतिक संख्या के गुणनखंडों की कुल संख्या

= 1 + अभाज्य गुणनखंड + संयुक्त गुणनखंड।

नोटः 1 सभी प्राकृतिक संख्याओं का एक गुणनखंड है।

जब हम अभाज्य गुणनखंडन करते हैं, तो इसमें उपस्थित अभाज्य गुणनखंडों की संख्या की गणना करके अभाज्य गुणनखंडों की संख्या दी जा सकती है।

इसलिए, यौगिक/संयुक्त गुणनखंडों की कुल संख्या

= गुणनखंडों की कुल संख्या – अभाज्य गुणनखंड –1

महत्वपूर्ण नोटः माना $N = 56 = 2^3 \times 7^1$

भिन्न अभाज्य गुणनखंडों की संख्या = 2 (अर्थात् 2 और 7)

अभाज्य गुणनखंडों की कुल संख्या (पुनरावृत्ति अनुमित)= 3 + 1 = 4 (घातों का योग)

Ex. $N = 56 = 2^3 \times 7^1$, संयुक्त गुणनखंडों की कुल संख्या ज्ञात कीजिए।

HINTS यहाँ, अभाज्य गुणनखंडों की कुल संख्या = 2 (अर्थात् 2 और 7)

संयुक्त गुणनखंडों की कुल संख्या

= [(3 + 1)(1 + 1)] – 2 – 1 = 8 – 3 = 5

Ex. यदि N = 720 है तो N के अभाज्य गुणनखंडों की कुल संख्या ज्ञात कीजिए।

HINTS दिया है, $N = 720 = 2^4 \times 3^2 \times 5^1$

स्पष्टतः, तीन अभाज्य गुणनखंडों हैं अर्थात् 2, 3 और 5।

Ex. N = 720, N के समग्र गुणनखंडों की कुल संख्या ज्ञात कीजिए।

HINTS दिया है, $N = 720 = 2^4 \times 3^2 \times 5^1$

संयुक्त गुणनखंडों की कुल संख्या = गुणनखंडों की कुल संख्या – अभाज्य गुणनखंडों की संख्या – 1 = 30 – 3 – 1 = 26

ऐसे गुणनखंड ज्ञात करना जो एक दूसरे के सह-अभाज्य हों

यदि $N = a^p \times b^q$ [a, b, N के अभाज्य गुणनखंड हैं] तो सह-अभाज्य गुणनखंडों की संख्या = [(p + 1)(q + 1) + pq] होगी

• यदि $N = a^p \times b^q \times c^r$

तो सह-अभाज्य गुणनखंडों की संख्या होगी

= [(p + 1)(q + 1)(r + 1) + pq + qr + rp + 3pqr]

या एक बार में दो लें और फिर गणना करें।

Ex. N = 56 के दो गुणनखंडों के कितने समुच्चय एक दूसरे के सह-अभाज्य होंगे?

HINTS $N = 56 = 2^3 \times 7^1$

∴ सह-अभाज्य गुणनखंडों की संख्या

= [(3 + 1)(1 + 1) + 3 × 1] = 11

Ex. दिया गया है कि $N = 720 = 2^4 \times 3^2 \times 5^1$, उन गुणनखंडों के समुच्चयों की संख्या ज्ञात कीजिए जो एक दूसरे के सह-अभाज्य हैं।

HINTS

दिया है,

$N = 720 = 2^4 \times 3^2 \times 5^1$

एक दूसरे के सह-अभाज्य गुणनखंडों के समुच्चयों की संख्या

= (p + 1) (q + 1) (r + 1) + pq + qr + rp + 3pqr

= (4 + 1) (2 + 1) (1 + 1) + 8 + 2 + 4 + 3 × 8

= 5 × 3 × 2 + 38 = 30 + 38 = 68

पूर्ण वर्ग के गुणनखंडों की संख्या

Ex. दिया गया है, $N = 720 = 2^4 \times 3^2 \times 5^1$, उन गुणनखंड की कुल संख्या ज्ञात कीजिए जो पूर्ण वर्ग हैं।

HINTS

$N = 720 = 2^4 \times 3^2 \times 5^1$

2 की घात	3 की घात	5 की घात
2^0	3^0	5^0
2^2	3^2	
2^4		

∴ N = 720 के कुल गुणनखंडों की संख्या जो पूर्ण वर्ग हैं = 3 × 2 × 1 = 6

वैकल्पिक विधि

$a^{2n} = \frac{\text{घात}}{2}$ = पूर्णांक + 1

$= \left(\frac{4}{2}+1\right) \times \left(\frac{2}{2}+1\right) \times \left(\frac{1}{2}+1\right)$

= (2 + 1) × (1 + 1) × 1 = 3 × 2 × 1= 6

पूर्ण घन के गुणनखंडों की संख्या

Ex. दिया गया है कि $N = 720 = 2^4 \times 3^2 \times 5^1$, उन गुणनखंड की कुल संख्या ज्ञात कीजिए जो पूर्ण घन हैं।

HINTS

$N = 720 = 2^4 \times 3^2 \times 5^1$

2 की घात	3 की घात	5 की घात
2^0	3^0	5^0
2^3		

∴ N = 720 के कुल गुणनखंडों की संख्या जो पूर्ण घन हैं = 2 × 1 × 1 = 2

वैकल्पिक विधि

$a^{3n} = \frac{\text{घात}}{3}$ = पूर्णांक + 1

$= \left(\frac{4}{3}+1\right) \times \left(\frac{2}{3}+1\right) \times \left(\frac{1}{3}+1\right)$

= 1 + 1 × 1 × 1 = 2 × 1 × 1 = 2

पूर्ण वर्ग और घन के गुणनखंडों की संख्या

Ex. दिया गया है कि $N = 720 = 2^4 \times 3^2 \times 5^1$, उन गुणनखंड की कुल संख्या ज्ञात कीजिए जो पूर्ण वर्ग और पूर्ण घन दोनों हैं

HINTS

$N = 720 = 2^4 \times 3^2 \times 5^1$

2 की घात	3 की घात	5 की घात
2^0	3^0	5^0

∴ N = 720 के कुल गुणनखंडों की संख्या जिसके गुणनखंड पूर्ण वर्ग और पूर्ण घन एक साथ हैं

= 1 × 1 × 1 = 1

वैकल्पिक विधि

$a^{6n} = \frac{\text{घात}}{6}$ = पूर्णांक + 1

$= \left(\frac{4}{6}+1\right) \times \left(\frac{2}{6}+1\right) \times \left(\frac{1}{6}+1\right)$

= 1 × 1 × 1 = 1

Ex. 720 के कितने गुणनखंड 10 से विभाज्य हैं?

HINTS $N = 720 = 2^4 \times 3^2 \times 5^1$

10 से विभाज्य होने वाले गुणनखंड के लिए, 2 की न्यूनतम घात = 1 का उपयोग किया जाना चाहिए, तथा 5 की न्यूनतम घात 1 का उपयोग किया जाना चाहिए।

अतः 720 के सभी गुणनखंड जो 10 से विभाज्य हैं, इस प्रारूप के होंगे = $2^1 \times 5^1 (2^3 \times 3^2)$

∴ गुणनखंड की संख्या = 4 × 3 × 1 = 12

Ex. 14,400 के कितने गुणनखंड 18 से विभाज्य हैं लेकिन 36 से नहीं?

HINTS 14400 के गुणनखंड = $2^6 \times 3^2 \times 5^2$

18 के गुणनखंड = 2×3^2, 36 के गुणनखंड = $2^2 \times 3^2$

18 से विभाज्य गुणनखंड = $\frac{2^6 \times 3^2 \times 5^2}{2 \times 3^2} = 2^5 \times 5^2$

18 से विभाज्य गुणनखंड की कुल संख्या = (5 + 1)(2 + 1) = 18

36 से विभाज्य गुणनखंड = $\frac{2^6 \times 3^2 \times 5^2}{2^2 \times 3^2} = 2^4 \times 5^2$

36 से विभाज्य गुणनखंड की कुल संख्या

= (4 + 1)(2 + 1) = 15

∴ आवश्यक गुणनखंड = 18 – 15 = 3

Join Telegram: @apna_rwa @apna_channels

Join Telegram @yct_publication

Ex. जब 732 को एक धनात्मक पूर्णांक x से विभाजित किया जाता है, तो शेषफल 12 बचता है। x के कितने मान हैं?

HINTS शेषफल 12 है, इसका अर्थ है कि भाजक 12 से बड़ा होना चाहिए।

732 = 720 + 12

$\because$ 720 को x से विभाजित होना चाहिए।

$720 = 2^4 \times 3^2 \times 5^1$

720 के कुल गुणनखंड

$= (4 + 1) \times (2 + 1) \times (1 + 1) = 30$

12 तक के गुणनखंड

= 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12 = 10

$\therefore$ अभीष्ट गुणनखंड = 30 – 10 = 20

- **गुणनखंड के व्युत्क्रम का योग** $= \dfrac{\text{गुणनखंडो का योग}}{\text{दी गई संख्या}}$

Ex. 16 के गुणनखंड के व्युत्क्रम का योग ज्ञात कीजिए।

HINTS 16 के गुणनखंड = 1, 2, 4, 8, 16

गुणनखंडो के व्युत्क्रम का योग $= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{31}{16}$

वैकल्पिक विधि

16 का अभाज्य गुणनखंड $= 2^4$

16 के गुणनखंडों का योग $= 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4$

= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31

गुणनखंडो के व्युत्क्रम का योग $= \frac{31}{16}$

- **गुणनखंडो का गुणनफल** $= (N)^{\frac{n}{2}}$

जहाँ N = दी गई संख्या

n = गुणनखंडो की कुल संख्या

Ex. 360 के सभी गुणनखंडों का गुणनफल क्या है?

HINTS

360 के गुणनखंड $= 2^3 \times 3^2 \times 5^1$

गुणनखंडों की संख्या = 4 × 3 × 2 = 24

गुणनखंडों का गुणनफल $= (N)^{\frac{n}{2}} = (360)^{\frac{24}{2}} = 360^{12}$

विभाज्यता

संख्या	विभाज्यता की स्थिति	उदाहरण
2^n — 2	एक संख्या 2 से विभाज्य होती है जब अंतिम अंक सम हो (0, 2, 4, 6, 8)	***Ex.*** 224, 112, 264
4	एक संख्या 4 से विभाज्य होती है जब अंतिम 2 अंक 4 से विभाज्य हों	***Ex.*** 144, 156
8	एक संख्या 8 से विभाज्य होती है जब उसके अंतिम 3 अंक 8 से विभाज्य हों	***Ex.*** 48512, 35480
16	एक संख्या 16 से विभाज्य होती है जब अंतिम 4 अंक 16 से विभाज्य हों और इसी प्रकार आगे भी।	***Ex.*** 324096, 153248
3, 9	एक संख्या 3 या 9 से विभाज्य होती है जब उसके अंकों का योगसंख्या 9 या 3 से विभाज्य होती है	523872 = अंकों का योग = 5 + 2 + 3 + 8 + 7 + 2 = 27
6	एक संख्या 'N' 6 से तभी विभाज्य होती है जब 'N' 2 और 3 दोनों से विभाज्य हो	***Ex.*** 56934, 2 और 3 दोनों से विभाज्य है। इसलिए, यह 6 से विभाज्य है।
7	एक संख्या 7 से विभाज्य होती है यदि विषम स्थानों पर त्रिक के योग और सम स्थानों पर त्रिक के योग के बीच का अंतर 7 से विभाज्य हो।	***Ex.*** 12348 = 012 348 = 348 – 012 = 336/7 = 48
5^n — 5	कोई संख्या 5^1 से विभाज्य होती है जब उसका अंतिम अंक 0 या 5 हो।	***Ex.*** 10, 45, 105, 300 ....
25	एक संख्या 5^2 से विभाज्य होती है जब उसके अंतिम दो अंक 00 हों या 25 से विभाज्य हो।	***Ex.*** 75, 150, 300, 425 ....
125	इसी प्रकार, एक संख्या 5^3 से विभाज्य होती है जब उसके अंतिम तीन अंक 000 हों या 125 से विभाज्य हों इत्यादि।	***Ex.*** 125, 250, 375, 1000 ....
11	सम स्थान पर अंक का योग, विषम स्थान पर अंक का योग — अंतर → यदि अंतर 0 या 11 का गुणज है तो संख्या 11 से विभाज्य होगी	***Ex.*** 166452 = 1 + 6 + 5 = 12 = 6 + 4 + 2 = 12 अंतर = 12 – 12 = 0, 11 से विभाज्य है
13	अंतिम अंक का 4 गुना शेष में जोड़ने पर, यदि परिणामी संख्या 13 से विभाज्य है तो 'N' भी 13 से विभाज्य होगा।	***Ex.*** 169 → 16 + 9 × 4 = 52 अतः 169, 13 से विभाज्य है।
17	अंतिम अंक का 5 गुना शेष में घटाने पर, यदि परिणामी संख्या 17 से विभाज्य है तो 'N' भी 17 से विभाज्य होगा।	***Ex.*** 391 → 39 – 1 × 5 = 34 अतः 391, 17 से विभाज्य है।
7, 11, 13	जब किसी 3 अंकीय संख्या को 1001 से गुणा किया जाता है तो वह स्वयं को दोहराती है तथा सदैव 7, 11 और 13 से पूर्णतः विभाज्य होती है।	***Ex.*** 123123, 147147, 164164, 574574
3, 7, 13, 37	जब किसी संख्या को 10101 से गुणा किया जाता है तो वह सदैव 3, 7, 13 और 37 से पूर्णतः विभाज्य होती है। 3 × 7 × 13 × 37 = 10101 xy × 10101 = $xyxyxy$ i.e. 73 × 10101 = 737373	***Ex.*** 353535, 414141
101	• xyxy के रूप की कोई भी संख्या 101 से विभाज्य है। i.e. xy × 101 = 2525 • और xyz × 101 = (xyz + x)yz	***Ex.*** 25 × 101 = 2525 ***Ex.*** 234 × 101 = (234 + 2) 34 = 23634

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram @yct_publication

Ex. यदि छह अंकों की संख्या 479xyz, 7,11 और 13 से पूर्णतः विभाज्य है तो {(y + z) × x} बराबर है:

HINTS 7, 11, 13 का लघुत्तम समापवर्त्य = 1001

जब किसी संख्या के 3 अंक दो बार दोहराए जाएं तो वह संख्या 7, 11 और 13 से विभाज्य होगी।

479479, 7, 11 और 13 से विभाज्य है

$\Rightarrow x = 4, y = 7, z = 9$

$\therefore (y + z) \times x = (7 + 9) \times 4 = 64$

Ex. यदि सात अंकों की संख्या 35345*xy*, 40 से विभाज्य है, तो $(4x + 5y)$ का न्यूनतम मान क्या है?

HINTS हम जानते हैं, 40 = 5 × 8.

दी गई संख्या = 35345*xy*

प्रश्नानुसार, 35345*xy*, 40 से विभाज्य है, तो अंतिम अंक 0 होना चाहिए। अतः y = 0.

जैसा कि हम जानते हैं, यदि कोई संख्या 8 से विभाज्य है, तो अंतिम 3 अंक 8 से विभाज्य होने चाहिए। दूसरे शब्दों में, 5*x*0 8 से विभाज्य होना चाहिए।

इस प्रकार, x का न्यूनतम मान = 2

$\therefore 4x + 5y = 4 \times 2 + 0 = 8$

Ex. यदि 8 अंकों की संख्या 7y9745*x*2, 72 से विभाज्य है, तो x के सबसे बड़े मान के लिए $(2x - y)$ का मान क्या है?

HINTS संख्या 7y9745x2, 72 से विभाज्य है

8 से विभाज्यता - अंतिम 3 अंक जांचें

9 से विभाज्यता - अंकों का योग जांचें

5*x*2, 8 से विभाज्य है → यदि x = 1,5, 9

x का अधिकतम मान 9 है

संख्या 7y9745*x*2, 9 से विभाज्य है यदि y = 2

इस प्रकार $x = 9, y = 2$

$\therefore (2x - y) = 2 \times 9 - 2 = 16$

Ex. यदि 5 अंकों की संख्या 535ab, 3, 7 और 11 से विभाज्य है, तो $(a^2 - b^2 + ab)$ का मान क्या है?

HINTS 3, 7, 11 का लघुत्तम समापवर्त्य = 231

53599 (a और b के अधिकतम संभव मान लें) को 231 से विभाजित करें। हमें शेषफल 7 प्राप्त होता है

अब, 53599 में से 7 घटाएँ और सही संख्या = 53592 प्राप्त करें

$\Rightarrow a = 9, b = 2$

$\therefore a^2 - b^2 + ab = 81 - 4 + 18 = 95$

Ex. $2^{25} + 2^{26} + 2^{27}$ किससे विभाज्य है?

HINTS $2^{25}(2^0 + 2^1 + 2^2) = 2^{25}(1 + 2 + 4) = 2^{25} \times 7$

$\therefore 2^{25} + 2^{26} + 2^{27}$ 7 से विभाज्य है

Ex. 300 और 700 के बीच कितनी संख्याएँ 5, 6 और 8 से विभाज्य हैं?

HINTS 5, 6 और 8 का लघुत्तम समापवर्त्य = 120

300 और 700 के बीच की वे संख्याएँ जो 120 से विभाज्य हैं = 360, 480, 600

अभीष्ट संख्या = 3.

Ex. 1 से 100 तक ऐसी कितनी संख्याएँ हैं जो न तो 3 से और न ही 5 से विभाज्य हैं?

HINTS $100 \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$ (चूँकि 100, 3 × 5 = 15 से विभाज्य नहीं है, इसलिए 100 के बजाय 90 लें) = $90 \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = 48$

91 और 100 के बीच संख्याएँ 95 और 100,5 से विभाज्य हैं जबकि 93, 96 और 99,3 से विभाज्य हैं। इसलिए 5 संख्याएँ ऐसी हैं जो न तो 3 से और न ही 5 से विभाज्य हैं।

कुल संख्या = 48 + 5 = 53

वैकल्पिक विधि

न तो 3 से विभाज्य और न ही 5 से = कुल - (3 या 5 से विभाज्य) = कुल - [N(3) + N(5) - N(15)]

1 से 100 तक कुल संख्या = 100

3 से विभाज्य = $\frac{100}{3} \sim 33$

5 से विभाज्य = $\frac{100}{5} = 20$

15 से विभाज्य = $\frac{100}{15} \sim 6$

अभीष्ट संख्या = 100 – (33 + 20 – 6) = 53

Ex. 700 से 950 तक ऐसी कितनी संख्याएँ हैं जो न तो 3 से और न ही 7 से विभाज्य हैं?

HINTS 1 से 950 तक की संख्याएँ जो न तो 3 से विभाज्य हैं और न ही 7 से = $950 \times \frac{2}{3} \times \frac{6}{7}$ (चूँकि 950, 3 × 7 = 21 से विभाज्य नहीं है, इसलिए 950 के बजाय 945 लें) = $945 \times \frac{2}{3} \times \frac{6}{7} = 540$

946 और 950 के बीच की संख्या 948, 3 से विभाज्य है जबकि कोई भी संख्या 7 से विभाज्य नहीं है। अतः 4 संख्याएँ ऐसी हैं जो न तो 3 से और न ही 7 से विभाज्य हैं।

कुल संख्याएँ = 540 + 4 = 544

1 से 699 तक की संख्याएँ जो न तो 3 से विभाज्य हैं और न ही 7 से = $699 \times \frac{2}{3} \times \frac{6}{7}$ (चूँकि 699, 3 × 7 = 21 से विभाज्य नहीं है, इसलिए 699 के बजाय 693 लें)

$693 \times \frac{2}{3} \times \frac{6}{7} = 396$

694 और 699 के बीच संख्याएँ 696 और 699 3 से विभाज्य हैं जबकि कोई भी संख्या 7 से विभाज्य नहीं है। इसलिए 4 संख्याएँ ऐसी हैं जो न तो 3 से और न ही 7 से विभाज्य हैं।

कुल संख्याएँ = 396 + 4 = 400

700 और 950 के बीच की संख्याएँ जो न तो 3 से और न ही 7 से विभाज्य हैं

= 1 और 950 के बीच की संख्याएँ जो न तो 3 से और न ही 7 से विभाज्य हैं - 1 और 699 के बीच की संख्याएँ जो न तो 3 से और न ही 7 से विभाज्य हैं

= 544 – 400 = 144

वैकल्पिक विधि

न तो 3 से विभाज्य और न ही 7 से = कुल - (3 या 7 से विभाज्य) = कुल - [N(3) + N(7) - N(21)]

700 से 950 तक की कुल संख्या = 251

3 से विभाज्य = 251/3 ~ 83

7 से विभाज्य = 251/7 ~ 35

21 से विभाज्य = 251/21 ~ 11

अभीष्ट संख्या = 251 – (83 + 35 – 11) = 251 – 107

= 144

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram @yct_publication

शेषफल

शेषफल वह राशि है जो भाग देने के बाद बचती है, जब एक भाजक लाभांश को ठीक से विभाजित नहीं करता है।

मान लीजिए संख्या N को भाजक D से विभाजित करने पर शेषफल R तथा भागफल Q बचता है।

Q → भागफल

विभाजक → D)N → भाज्य

R → शेष

संख्या "N" को नीचे दिए गए रूप में भी व्यक्त किया जा सकता है:

$$N = DQ + R$$

Ex. किसी संख्या को 38 से भाग देने पर भागफल 24 तथा शेषफल 13 हो, तो संख्या है:

HINTS

हम जानते हैं कि,

भागफल = भाजक × भागफल + शेषफल

यहाँ, भाजक = 38, भागफल = 24 और शेषफल = 13

∴ अभीष्ट संख्या (भाज्य) = 38 × 24 + 13 = 925

शेषफल

शेषफल योगात्मक होते हैं

मान लीजिए, N_1, N_2, N_3, ...उभयनिष्ठ भाजक D से विभाजित करने पर क्रमशः, भागफल Q_1, Q_2, Q_3, ... देता है। शेषफल R_1, R_2, R_3, ... देता है।

इसलिए,

$N_1 = D \times Q_1 + R_1$, $N_2 = D \times Q_2 + R_2$

$N_3 = D \times Q_3 + R_3$, ... और इसी तरह।

मान लीजिए S, N_1, N_2, N_3, ... का योग है, तो $S = (D \times Q_1 + R_1) + (D \times Q_2 + R_2) + (D \times Q_3 + R_3) + ...$

$= D \times (Q_1 + Q_2 + Q_3 + ...) + (R_1 + R_2 + R_3 + ...)$

$= D \times K + R_1 + R_2 + R_3 ......$

जहाँ K कोई संख्या है।

इसलिए, जब S को D से विभाजित किया जाता है तो शेषफल वही होता है जो $R_1 + R_2 + R_3 + ...$ को D से विभाजित करने पर शेषफल होता है।

उदाहरण के लिए:

$$\left.\frac{6}{5}\right|_R = \left.\frac{36}{5}\right|_R = \left.\frac{30+6}{5}\right|_R = \left.\frac{21+9+6}{5}\right|_R = ...$$

(शेषफल: 1, 1, 0 + 1, 1 + 4 + 1)

Ex. 335, 608 और 853 के योग को 13 से भाग देने पर शेषफल क्या होगा?

HINTS

$$\frac{335 + 608 + 853}{13} = \frac{10 + 10 + 8}{13}$$

(शेषफल: 10, 10, 8)

$= \frac{28}{13}$ R = 2 शेषफल

स्वयं करें

Ex. 47, 69 और 85 के योग को 9 से विभाजित करने पर शेषफल क्या होगा? **[Ans. 3]**

शेषफल गुणनात्मक होते हैं

मान लीजिए, N_1, N_2, N_3, ...उभयनिष्ठ भाजक D से विभाजित करने पर क्रमशः, भागफल Q_1, Q_2, Q_3, ... देता है। शेषफल R_1, R_2, R_3, ... देता है।

अतः,

$N_1 = D \times Q_1 + R_1$, $N_2 = D \times Q_2 + R_2$

$N_3 = D \times Q_3 + R_3$, ... इत्यादि।

माना P, N_1, N_2, N_3, ... का योग है।

तो, $P = N_1 N_2 N_3 ....$

$= (D \times Q_1 + R_1) + (D \times Q_2 + R_2) + (D \times Q_3 + R_3) + ...$

$= D \times K + R_1 R_2 R_3 .....$

जहाँ K कोई संख्या है।

स्पष्टतः, R_1, R_2, R_3,... का गुणनफल D से मुक्त है, इसलिए P को D से विभाजित करने पर प्राप्त शेषफल, गुणनफल R_1, R_2, R_3,... को D से विभाजित करने पर प्राप्त शेषफल होता है।

उदाहरण के लिए:

$$\left.\frac{361 \times 363}{12}\right|_R = \left.\frac{1 \times 3}{12}\right|_R = 3$$

(शेषफल: 1, 3)

Ex. जब धनात्मक संख्या x, y और z को 31 से विभाजित किया जाता है, तो शेषफल क्रमशः 17, 24 और 27 होता है। जब $(4x - 2y + 3z)$ को 31 से विभाजित किया जाता है, तो शेषफल होगा:

HINTS

$x = 31 \times 1 + 17 = 48$

$y = 31 \times 1 + 24 = 55$

$z = 31 \times 1 + 27 = 58$

अब $(4x - 2y + 3z)$

$= 4 \times 48 - 2 \times 55 + 3 \times 58 = 256$

∴ शेषफल = 256 ÷ 31 = 8

स्वयं करें

Ex. 179 × 172 × 173 को 17 से विभाजित करने पर शेषफल ज्ञात कीजिए। **[Ans. 3]**

ऋणात्मक शेषफल की अवधारणा

परिभाषा के अनुसार, शेषफल ऋणात्मक नहीं होते।

इसलिए, जब हम -26 को 6 से भाग देते हैं, तब भी हम शेषफल 4 ही कहते हैं (न कि -2)। लेकिन, कभी-कभी गणना को आसान बनाने के लिए हम शेषफल का ऋणात्मक मान भी देखते हैं।

उपरोक्त अवधारणा को और स्पष्ट रूप से समझाने के लिए आइए एक उदाहरण लेते हैं। आइए 109 को दो संख्याओं का अंतर लिखें और फिर उसे 11 से भाग दें।

उदाहरण के लिए। (+8, –9)

$$\frac{109}{11} = \frac{118 - 9}{11} = \frac{118}{11} - \frac{9}{11}$$

इसलिए, शेषफल = 8 – 9

= –1 + 11 = 10

Ex. $\frac{89}{9}$ का शेषफल क्या है?

HINTS

$$\frac{89}{9} = \frac{93-4}{9} = \frac{93}{9} - \frac{4}{9} = \frac{3-4}{9} = \frac{-1}{9}$$

∴ शेषफल = – 1 + 9 = 8

Ex. $\frac{111}{12}$ का शेषफल क्या है?

HINTS

$$\frac{111}{12} = \frac{120-9}{12} = \frac{120}{12} - \frac{9}{12}$$

$$= \frac{0-9}{12} = \frac{-9}{12} = -9 + 12 = 3$$

∴ कुल शेषफल = 3

स्वयं करें

Ex. $\frac{116}{8}$ का शेषफल क्या है? **[Ans. 4]**

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

शेषफल की कुछ महत्वपूर्ण अवधारणाएँ

• शेषफल $\left\{\frac{(a^n + b^n)}{(a+b)}\right\} \to 0$; जहाँ n विषम संख्या है।

Ex. $\left(\frac{8^{371}+5^{371}}{13}\right)$ का शेषफल ज्ञात करें।

HINTS

यहाँ, 8 + 5 = 13.

इस प्रकार, व्यंजक का शेषफल 0 है।

• शेषफल $\left\{\frac{(a^n + b^n + c^n)}{(a+b+c)}\right\} \to 0$; जहाँ n विषम संख्या है।

Ex. $\left(\frac{3^{61}+2^{61}+4^{61}}{9}\right)$ का शेषफल ज्ञात करें।

HINTS

यहाँ, 3 + 2 + 4 = 9.

इस प्रकार, व्यंजक का शेषफल 0 है।

शेषफल $\left\{\frac{a^n + b^n + c^n + ...}{(a+b+c)}\right\} \to 0$; जहाँ, a + b + c + ... और इसी प्रकार सामान्तर श्रेणी में और n विषम संख्या है।

Ex. निम्नलिखित व्यंजक का शेषफल ज्ञात कीजिए $\left(\frac{16^{73}+17^{73}+18^{73}+19^{73}}{70}\right)$

HINTS

यहाँ, 16 + 17 + 18 + 19 समांतर श्रेणी में हैं और 73 विषम संख्या है। अत: व्यंजक का शेषफल 0 है।

• शेषफल $\left\{\frac{a^n - b^n}{(a-b)}\right\} \to 0$; n के सभी मानों के लिए

Ex. $\left(\frac{8^{36}-2^{36}}{6}\right)$ का शेषफल ज्ञात करें।

HINTS ऊपर परिभाषित अवधारणा का उपयोग करते हुए, व्यंजक का शेषफल 0 है।

• शेषफल $\left\{\frac{a^n - b^n}{(a+b)}\right\} \to 0$; जहाँ n सम संख्या है।

Ex. $\left(\frac{7^{24}-4^{24}}{11}\right)$ का शेषफल ज्ञात करें।

HINTS ऊपर परिभाषित अवधारणा का उपयोग करते हुए, व्यंजक का शेषफल 0 है।

• $(a^n + b^n)$ जहाँ n = सम

∴ $(a^n + b^n)$, (a + b) और (a – b) दोनों से विभाज्य नहीं

• शेषफल $\left\{\frac{(a+1)^n}{a}\right\} \to 1$; n के सभी मानों के लिए

Ex. $\frac{16^{13}}{15}$ का शेषफल ज्ञात करें।

HINTS $= \frac{(15+1)^{13}}{15} = \frac{15^{13}}{15} + \frac{1^{13}}{15}$

शेषफल $= \frac{1^{13}}{15} = 1$

• शेषफल $\left\{\frac{(a-1)^n}{a}\right\} \to 1$; जहाँ n सम संख्या है।

Ex. $\frac{72^{282}}{73}$ व्यंजक का शेषफल ज्ञात कीजिए

HINTS

$\frac{72^{282}}{73} = \frac{(73-1)^{282}}{73} = 1$

• शेषफल $\left\{\frac{(a-1)^n}{a}\right\} \to$ (a–1) या – 1 जब n विषम संख्या है।

Ex. व्यंजक $\frac{72^{281}}{73}$ का शेषफल ज्ञात कीजिए।

HINTS

$\frac{72^{281}}{73} = \frac{(73-1)^{281}}{73}$ = – 1 या 73 – 1 = 72

फ़र्मेट (Fermat's) का शेषफल प्रमेय:

यदि $\frac{a^{P-1}}{P}$ तब शेषफल = 1

P = अभाज्य संख्या

a, P → सह-अभाज्य संख्या

Ex. $\frac{82^{54}}{19}$ का शेषफल ज्ञात करें।

HINTS

$\frac{82^{54}}{19} = \frac{(82^{18})^3}{19} = 1^3 = 1$

Ex. $\frac{93^{51}}{11}$ का शेषफल ज्ञात करें।

HINTS

$\frac{93^{51}}{11} = \frac{(93^{10})^5 \times 93}{11} = 1 \times 5 = 5$

स्वयं करें

Ex. $\frac{9^{111}}{13}$ का शेषफल ज्ञात करें। [Ans. 1]

यूलर (Euler's) का शेषफल प्रमेय:

$\frac{a^{\phi(N)}}{N} = 1$ (शेषफल)

N = कोई भी प्राकृत संख्या

ϕ (N) = N का टोसेन्ट व्यंजक

a, N → सह-अभाज्य

ϕ (N) कैसे ज्ञात करें:

$\phi(72) \Rightarrow 72 = 2^3 \times 3^2$

$= 72 \times \left(1-\frac{1}{2}\right) \times \left(1-\frac{1}{3}\right)$

$= 72 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = 24$

नोट सभी अभाज्य संख्याओं के लिए, यूलर संख्या दी गई अभाज्य संख्या से एक कम संख्या होगी।

$E_2 = 2 \times \left(1-\frac{1}{2}\right) = 1,\ E_3 = 3 \times \left(1-\frac{1}{3}\right) = 2$

स्वयं करें

Ex. 100 का टोसेन्ट ज्ञात कीजिए। [Ans. 40]

विल्सन (Wilson's) का शेषफल प्रमेय:

यदि P एक अभाज्य संख्या है तो (P – 1)! + 1, P से विभाज्य है। दूसरे शब्दों में, जब (P – 1)! को P से विभाजित किया जाता है तो शेषफल –1 प्राप्त होता है।

Ex. 40! को 41 से विभाजित करने पर शेषफल ज्ञात कीजिए

HINTS

विल्सन के प्रमेय का उपयोग करते हुए,

शेषफल $= \left[\frac{(41-1)!}{41}\right] = -1$

= 41 + (– 1) = 40

स्वयं करें

Ex. $\frac{96^{132}}{97}$ का शेषफल ज्ञात कीजिए। [Ans. 1]

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram @yct_publication

क्रमिक विभाजन की अवधारणा

आइए क्रमिक विभाजन की अवधारणा को समझाने के लिए एक उदाहरण लेते हैं।

मान लीजिए कि एक संख्या 'N' को क्रमिक रूप से 3, 4 और 7 से विभाजित किया जाता है, तो शेषफल क्रमशः 2, 1 और 4 प्राप्त होते हैं।

यदि हमें N का मान ज्ञात करना है, तो हमें नीचे दिए गए चरणों का पालन करना होगा।

विभाजक	53	शेषफल
3	17	2
4	4	1
7	0	4

1 → 7 × 0 + 4 = 4
2 → 4 × 4 + 1 = 17
3 → 17 × 3 + 2 = 53

इस प्रकार, N का मान = 53

अब, आइए देखें कि क्रमिक विभाजन कैसे काम करता है।

भागफल	$\frac{53}{3} = 17$	$\frac{17}{4} = 4$	$\frac{4}{7} = 0$
शेषफल	2	1	4

उपरोक्त उदाहरण क्रमिक विभाजन की अवधारणा को स्पष्ट रूप से समझाता है।

Ex. जब किसी संख्या (N) को क्रमिक रूप से 3, 4 और 7 से विभाजित किया जाता है, तो शेषफल क्रमशः 2, 3 और 5 प्राप्त होते हैं। संख्या (N) क्या होगी?

HINTS

विभाजक	71	शेषफल
3	23	2
4	5	3
7	0	5

1 → 7 × 0 + 5 = 5
2 → 4 × 5 + 3 = 23
3 → 23 × 3 + 2 = 71

अतः N का मान = 71

भागफल	$\frac{71}{3} = 23$	$\frac{23}{4} = 5$	$\frac{5}{7} = 0$
शेषफल	2	3	5

दी गई संख्या में जोड़ी या घटाई जाने वाली सबसे छोटी संख्या ताकि वह भाजक से विभाज्य हो जाए।

Ex. 42072 में वह सबसे छोटी संख्या क्या जोड़नी होगी जिससे वह संख्या 93 से विभाज्य हो जाए?

HINTS 42072 ÷ 93

हमें भागफल = 452 और शेषफल = 36 प्राप्त होता है।

अतः जोड़ने वाली सबसे छोटी संख्या = 93 – 36 = 57

Ex. 25809 में से वह सबसे छोटी संख्या क्या घटाई जाए जिससे 139 से पूर्णतः विभाज्य संख्या प्राप्त हो जाए?

HINTS 25809 ÷ 139

हमें भागफल = 185 और शेषफल = 94 प्राप्त होता है।

अतः, यदि हम दी गई संख्या 25809 में से 94 घटा दें अर्थात्

= 25809 – 94 = 25715, 139 से पूर्णतः विभाज्य है।

स्वयं करें

Ex. किसी संख्या को क्रमशः 2, 3 और 5 से भाग देने पर शेषफल क्रमशः 1, 2 और 3 बचते हैं। यदि उसी संख्या को 13 से भाग दिया जाए (यदि अंतिम भागफल 1 हो) तो शेषफल क्या होगा? **[Ans. 1]**

शून्यों की संख्या

किसी व्यंजक में शून्यों की संख्या

मान लीजिए हमें गुणनफल 24 × 13 × 52 × 27 में शून्यों की संख्या ज्ञात करनी है, जिसे $2^5 \times 3^4 \times 13^2$ भी लिखा जा सकता है। स्पष्टतः, इस गुणनफल में कोई शून्य नहीं होगा, क्योंकि इसमें 5 नहीं है।

- हालाँकि, यदि हमारे पास इस प्रकार की अभिव्यक्ति है:

8 × 15 × 24 × 13

अभिव्यक्ति को इस प्रकार पुनः लिखा जा सकता है

$2^6 \times 3^2 \times 5 \times 13$

हम जानते हैं कि शून्य 2 और 5 के संयोजन से बन सकते हैं अर्थात (2 × 5)।

उपरोक्त अभिव्यक्ति में 6 दो और एक पांच है।

अतः हम केवल (2 × 5) का एक युग्म बना सकते हैं।

अतः गुणनफल में 1 शून्य होगा।

किसी फैक्टोरियल (Factorial) में शून्यों की संख्या ज्ञात करना

माना हमें 7! में शून्यों की संख्या ज्ञात करनी है।

7! = 7 × 6 × 5 × 4 × 3 × 2 × 1

= 7 × (3 × 2) × 5 × 2 × 2× 3 × 2 × 1

$= 7 \times 5 \times 3^2 \times 2^4 \times 1$

उपरोक्त व्यंजक में 5 × 2 का एक युग्म है। स्पष्टतः, केवल एक 5 है तथा 2 की अधिकता है।

यह स्पष्ट है कि किसी भी फैक्टोरियल मान में, 5 की संख्या हमेशा 2 की संख्या से कम होगी। इसलिए, किसी फैक्टोरियल में 5 की गिनती शून्यों की कुल संख्या बताएगी।

@apna_channels

किसी फैक्टोरियल (Factorial) में निहित संख्या की घात

n! में निहित अभाज्य संख्या p की उच्चतम घात को निम्निलिखित द्वारा दिया गया है

$$\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \ldots$$

जहाँ $[x]$ x से छोटा या उसके बराबर सबसे बड़ा पूर्णांक दर्शाता है।

Ex. 47! में शून्यों की संख्या ज्ञात कीजिये?

HINTS 47! में शून्यों की संख्या ज्ञात करने के लिए, हमें 47! में 5 की अधिकतम घात ज्ञात करनी होगी।

इस प्रकार, 47! में 5 की उच्चतम घात

$$= \left[\frac{47}{5}\right] + \left[\frac{47}{25}\right] + \left[\frac{47}{125}\right] + \ldots.$$

= 9 + 1 + 0 + 0 ... = 10

अतः, 47! में शून्यों की संख्या 10 होगी।

Ex. 300! में शून्यों की संख्या ज्ञात कीजिये?

HINTS 300! में शून्यों की संख्या ज्ञात करने के लिए, हमें 300! में 5 की अधिकतम घात ज्ञात करनी होगी।

इस प्रकार, 300! में 5 की उच्चतम घात

$$= \left[\frac{300}{5}\right] + \left[\frac{300}{25}\right] + \left[\frac{300}{125}\right] + \left[\frac{300}{625}\right] + \ldots.$$

= 60 + 12 + 2 + ... = 74

अतः, 300! में शून्यों की संख्या 74 होगी।

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram @yct_publication

संख्याओं की गिनती

☞ एक अंक गिनना

Ex. 350 से 600 तक 5 कितनी बार आएगा?

HINTS

5	600		5	350
5	120		5	70
5	24		5	14
	4			2

5 की आवृत्ति = 120 + 24 + 4 = 148

5 की आवृत्ति = 70 + 14 + 2 = 86

350 से 600 तक 5 की आवृत्ति = 148 – 86 = 62

Ex. 400 से 700 तक ऐसी कितनी संख्याएँ हैं जिनमें अंक 6 ठीक दो बार आता है?

HINTS

श्रेणी	नंबर	गिनती करना
400 – 499	466	1
500 – 599	566	1
660 – 669	660-669 (666 छोड़कर)	9
606 – 696	Every 10^{th}, 606, 616, ... 696 (666 छोड़कर)	9
	कुल = 1+ 1 + 9 + 9	= 20

☞ पृष्ठ गणना और कुंजी स्ट्रोक

1 से 9 → 9 की-स्ट्रोक

1 से 99 → 189 की-स्ट्रोक

1 से 999 → 2889 की-स्ट्रोक

1 से 9999 → 38889 की-स्ट्रोक

> अंकों की कुल संख्या = $n(N + 1) - 1_n$
> जहाँ n = दी गई संख्या में अंकों की संख्या
> N = बड़ी संख्या
> 1_n = दी गई संख्या में अंकों की संख्या 1 के रूप में गिनी जाएगी।

Ex. 428 पृष्ठों वाली पुस्तक को क्रमांकित करने के लिए कितने अंकों की आवश्यकता होगी?

HINTS

अंक	संख्या	कुल अंक
एकल	1 से 9	1 × 9
दो	10 से 99	2 × 90 = 180
तीन	100 से 428	3 × 329 = 987

आवश्यक अंकों की संख्या = 9 +180 + 987 = 1176

वैकल्पिक विधि

अंकों की कुल संख्या = $n (N + 1) - 1_n$

= 3 (428 + 1) – 111 = 1287 – 111 = 1176

Ex. एक मुद्रक एक पुस्तक के पृष्ठ को 1 से शुरू करते हुए 3189 अंकों का उपयोग करता है। पुस्तक में कितने पृष्ठ हैं?

HINTS अंकों की कुल संख्या = $n (N + 1) - 1_n$

⇒ 3189 = 4 (N + 1) – 1111

⇒ 4300 = 4 (N + 1) ⇒ N + 1 = 1075 ⇒ N = 1074

☞ अंकों का योग

Ex. 1 से 100 तक सभी अंकों का योग ज्ञात करें।

HINTS

एकल अंक संख्या (1 – 9):-
योग = 1 + 2 ..... + 9 = 45
दो अंकीय संख्या (10 – 99):-
(प्रत्येक अंक 1 – 9, 10 बार आता है)
दहाई का स्थान :- (1 + 2 +..... + 9) × 10 = 45 × 10 = 450
(प्रत्येक अंक 0 – 9, 9 बार आता है)
इकाई अंक:- (0 + 1 + 2 +..... + 9) × 9 = 45 × 9 = 405
तीन अंक (100):- (1 सैकड़ा स्थान)
कुल योग = 45 + 450 + 405 + 1 = 901

@apna_channels

वर्गों के अंतर के रूप में संख्या की अवधारणा

यदि एक संख्या N को दो संख्याओं (a × b) के गुणनफल के रूप में लिखा जा सकता है तो $N = ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$ इस प्रकार, $N = x^2 - y^2$	$a + b$ = विषम $a - b$ = विषम $a = \frac{\text{विषम} + \text{विषम}}{2}$ = सम प्राकृतिक संख्या	$a + b$ = सम $a - b$ = सम $a = \frac{\text{सम} + \text{सम}}{2}$ = सम प्राकृतिक संख्या.	$a + b$ = सम $a - b$ = विषम $a = \frac{\text{सम} + \text{विषम}}{2} = \frac{\text{विषम}}{2}$ 1 प्राकृतिक संख्या

Ex. प्राकृतिक संख्याओं के ऐसे कितने युग्म हैं जिनके वर्ग का अंतर 35 है?

HINTS मान लीजिए, संख्याएँ x और y हैं।

$x^2 - y^2 = N$

$x^2 - y^2 = 35$

$(x + y)$ $(x - y)$

7 × 5 = 35

35 × 1 = 35

अतः, 2 जोड़ी संभव है।

∴ x और y प्राकृतिक संख्याएँ हैं, $(x - y)$ और $(x + y)$ भी पूर्णांक होना चाहिए। साथ ही $x^2 - y^2 = 35 > 0$ इसलिए $(x - y)$ और $(x + y)$ एक धनात्मक पूर्णांक होना चाहिए।

Ex. प्राकृतिक संख्याओं के ऐसे कितने युग्म हैं जिनके वर्ग का अंतर 36 है?

HINTS मान लीजिए, संख्याएँ x और y हैं।

$x^2 - y^2 = 36$

$(x + y)$		$(x - y)$ = 36	
1	×	36 = ×	⟶ $x = \frac{1 + 36}{2}$ ≠ प्राकृतिक संख्या
2	×	18 = ✓	⟶ $\frac{x+y}{2} = \frac{2+18}{2} = 10$
3	×	12 = ×	प्राकृतिक संख्या
4	×	9 = ×	$\frac{x-y}{2} = \frac{18-2}{2} = 8$
6	×	6 = ✓	अतः, 2 जोड़ी संभव है।

> x और y के धनात्मक पूर्णांक होने के लिए, x और y दोनों को या तो विषम होना चाहिए या दोनों को सम होना चाहिए। यदि एक सम है और दूसरा विषम है, तो x और y का मान दशमलव में होगा।

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

2-अंकीय संख्या और उसकी विपरीत संख्या

माना, दो अंकों की मूल संख्या = $10x + y$, विपरीत संख्या $10y + x$

मूल और विपरीत संख्या का योग	मूल और विपरीत संख्या का अंतर
$(10x + y) + (10y + x) = 11(x + y)$	$(10x + y) - (10y + x) = 9(x - y)$

Ex: दो अंकों की संख्या और अंकों को आपस में बदलकर प्राप्त संख्या का योग 77 है। यदि अंकों का अंतर 1 है, तो संख्या है:

HINTS माना, संख्या = $10x + y$

$(10x + y) + (10y + x) = 77$

$\Rightarrow x + y = 7$ .... (i)

$x - y = 1$ ....(ii)

समीकरण (i) और (ii) को हल करने पर,

$x = 4$ और $y = 3$

अतः, संख्या = $10x + y = 10 \times 4 + 3 = 43$

Ex: दो अंकों वाली एक संख्या के अंकों का योग 9 है। इसके अंकों को आपस में बदलने पर प्राप्त संख्या दी गई संख्या से 45 अधिक है, तो मूल संख्या क्या है?

HINTS माना, दो अंकों वाली संख्या $10x + y$ है

प्रश्नानुसार, $x + y = 9$ .....(i)

$10y + x - (10x + y) = 45$

$\Rightarrow 9y - 9x = 45$

$\Rightarrow y - x = 5$ .....(ii)

समीकरण (i) और (ii) से, $x = 2, y = 7$

$\therefore$ मूल संख्या = $10x + y = 10 \times 2 + 7 = 27$

3-अंकीय संख्या और उसकी विपरीत संख्या

माना, सैकड़ा अंक = x, दहाई अंक = y, इकाई अंक = z, अतः, मूल संख्या = $100x + 10y + z$

मूल संख्या ($100x + 10y + z$)

@apna_channels

सैकड़ा और इकाई अंक को आपस में बदलते हैं	सैकड़ा और दहाई अंक को आपस में बदलते हैं
नई संख्या = $100z + 10y + x$	नई संख्या = $100y + 10x + z$
घटाने के बाद = मूल संख्या – नई संख्या	घटाने के बाद = मूल संख्या – नई संख्या
$= 100x + 10y + z - (100z + 10y + x)$	$= 100x + 10y + z - (100y + 10x + z)$
$= 99(x - z)$	$= 90(x - y)$
$= 99(z - x)$ यदि विपरीत हो	$= 90(y - x)$ यदि विपरीत हो

Ex: यदि तीन अंकों वाली एक संख्या के सैकड़ा और इकाई के अंकों को आपस में बदल दिया जाए, तो परिणामी संख्या मूल संख्या से 198 कम होगी। सैकड़ा और इकाई के अंकों के बीच क्या अंतर है?

HINTS मान लीजिए, मूल संख्या $100x + 10y + z$ है

सैकड़ा और इकाई के अंकों को आपस में बदलने के बाद, संख्या

$= 100z + 10y + x$

दिया है,

$(100x + 10y + z) - (100z + 10y + x) = 198$

$\Rightarrow 99x - 99z = 198$

$\Rightarrow 99(x - z) = 198$

$\Rightarrow x - z = 2$

$\therefore$ सैकड़ा और इकाई अंक के बीच अंतर = 2

Ex: यदि तीन अंकों वाली एक संख्या के सैकड़ा और दहाई के अंकों को आपस में बदल दिया जाए, तो परिणामी संख्या मूल संख्या से 360 कम होगी। सैकड़ा और दहाई के अंकों के बीच क्या अंतर है?

HINTS मान लीजिए, मूल संख्या $100x + 10y + z$ है

सैकड़ा और दहाई के अंकों को आपस में बदलने के बाद, संख्या

$= 100y + 10x + z$

दिया है,

$(100x + 10y + z) - (100y + 10x + z) = 360$

$\Rightarrow 90x - 90y = 360$

$\Rightarrow 90(x - y) = 360$

$\Rightarrow x - y = 4$

$\therefore$ सैकड़ा और दहाई के अंकों का अंतर = 4

आपस में बदलने पर	नयी संख्या	अंतर	परिणाम
सैकड़ा और इकाई	$100z + 10y + x$	$99(x - z)$	99 का गुणज
सैकड़ा और दहाई	$100y + 10x + z$	$90(x - y)$	90 का गुणज

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram @yct_publication

बाइनरी संख्या

बाइनरी → आधार 2
(0, 1)

Ex. $(101010)_2 \rightarrow (?)_8$ में बदलें

HINTS

1	0	1		0	1	0
2^2	2^1	2^0		2^2	2^1	2^0
4	+	1			2	
	5				2	

= 52

Ex. $(1010101)_2 \rightarrow (?)_{10}$ में बदलें

HINTS

1	0	1	0	1	0	1
2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
64		16		4		1

64 + 16 + 4 + 1 = 85

Ex. $(1010101)_2 \rightarrow (?)_{16}$ में बदलें

HINTS

0	1	0	1		0	1	0	1
2^3	2^2	2^1	2^0		2^3	2^2	2^1	2^0
	4		1			4		1
		5					5	

= 55

ऑक्टल → आधार 8
(0,1,2,3,4,5,6,7)

Ex. $(675)_8 \rightarrow (?)_2$ में बदलें

HINTS

	4	2	1
6	1	1	0
7	1	1	1
5	1	0	1

= 1 1 0 1 1 1 1 0 1

Ex. $(175)_8 \rightarrow (?)_{10}$ में बदलें

HINTS

	1	7	5
×	8^2	8^1	8^0
	64	56	5

64 + 56 + 5 = 125

Ex. $(675)_8 \rightarrow (?)_{16}$ में बदलें

HINTS

$(675)_8 \rightarrow (\ )_2 \rightarrow (?)_{16}$

	4	2	1
6	1	1	0
7	1	1	1
5	1	0	1

= 1 1 0 1 1 1 1 0 1

अब, $\rightarrow (?)_{16}$

0 0 0 1	1 0 1 1	1 1 0 1
8 4 2 1	8 4 2 1	8 4 2 1
1	11(B)	13(D)

= 1BD

दशमलव → आधार 10
(0,1,2,3,4,5,6,7,8,9)

Ex. $(63)_{10} \rightarrow (?)_2$ में बदलें

HINTS

2	63	
2	31	1
2	15	1
2	7	1
2	3	1
	1	1

= 1 1 1 1 1 1

Ex. $(67)_{10} \rightarrow (?)_8$ में बदलें

HINTS

8	67	
8	8	3
	1	0

= 103

Ex. $(425)_{10} \rightarrow (?)_{16}$ में बदलें

HINTS

16	425	
16	26	9
	1	10 (A)

= 1A9

हेक्साडेसिमल → आधार 16
(0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A(10), B(11),C(12),D(13),E(14),F(15))

Ex. $(D9)_{16} \rightarrow (?)_2$ में बदलें

HINTS

	8	4	2	1
D(13)	1	1	0	1
9	1	0	0	1

= 1 1 0 1 1 0 0 1

Ex. $(6FD)_{16} \rightarrow (?)_8$ में बदलें

HINTS

$(6FD)_{16} \rightarrow (\ )_2 \rightarrow (?)_8$

	8	4	2	1
6	0	1	1	0
F (15)	1	1	1	1
D (13)	1	1	0	1

= 0 1 1 0 1 1 1 1 1 1 0 1

अब, $\rightarrow (\ ?\ )_8$

0 1 1	0 1 1	1 1 1	1 0 1
4 2 1	4 2 1	4 2 1	4 2 1
3	3	7	5

= 3 3 7 5

Ex. $(1AD)_{16} \rightarrow (?)_{10}$ में बदलें

HINTS

	1	A(10)	D(13)
×	16^2	16^1	16^0
	256	160	13

256 + 160 + 13 = 429

स्वयं करें

Ex. $(4AE)_{16} \rightarrow (?)_8$ में बदलें
Ans. $(2256)_8$

Ex. $(10101)_2 \rightarrow (?)_{16}$ में बदलें
Ans. $(15)_{16}$

Note:
- जब दशमलव बाईं ओर हो तो दी गई संख्या को दाईं ओर के आधार से विभाजित करें।
- जब दशमलव दाईं ओर मौजूद हो तो बाएं आधार की घात की श्रृंखला से गुणा करें।
- बाइनरी से ऑक्टल या ऑक्टल से बाइनरी → 421/3 अंक युग्म
- बाइनरी से हेक्साडेसिमल या हेक्साडेसिमल से बाइनरी → 8421/4 अंक युग्म
- ऑक्टल को हेक्साडेसिमल में या हेक्साडेसिमल को ऑक्टल में सीधे रूपान्तरित करना संभव नहीं है। सबसे पहले आपको इसे बाइनरी में बदलना होगा।

Ex. $(17.125)_{10} = (?)_2$ में परिवर्तित करें

HINTS सबसे पहले, पूर्णांक भाग को परिवर्तित करें

2	17	
2	8	1
2	4	0
2	2	0
	1	0

भिन्नात्मक भाग को परिवर्तित करें

$0.125 \times 2 = 0.250 \quad 0$

$0.250 \times 2 = 0.500 \quad 0$

$0.500 \times 2 = 1.00 \quad 1$

$(17.125)_{10} = (10001.001)_2$

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

अध्याय 05

ल.स.प. और म.स.प.

LCM (लघुत्तम समापवर्त्य)

दो या दो से अधिक संख्याओं का लघुत्तम समापवर्त्य वह सबसे छोटी संख्या है जो दी गई प्रत्येक संख्या से पूर्णतः विभाज्य हो।

Ex: 10, 15 और 20 का लघुत्तम समापवर्त्य = 60

HCF (महत्तम समापवर्तक)

यह वह सबसे बड़ी संख्या है जो दो या दो से अधिक दी गई संख्याओं को पूर्णतः विभाजित कर सकती है। कभी-कभी इसे महत्तम समापवर्तक (GCD) भी कहा जाता है।

Ex: 10 और 15 का HCF = 5

LCM और HCF ज्ञात करने की विधियाँ

LCM

अभाज्य गुणनखंड विधि

चरण-1: सभी दी गई संख्याओं को उनके अभाज्य गुणनखंडों में विभाजित करें।

चरण-2: उन अभाज्य गुणनखंडों में से सभी अलग-अलग अभाज्य गुणनखंडों को एकत्रित करें।

चरण-3: प्रत्येक अभाज्य गुणनखंड की अधिकतम उपलब्ध घात में 1 बढ़ाएँ और फिर गुणा करें।

Ex. 18 और 42 का लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात कीजिए।

HINTS

चरण -1: 18 और 42 का गुणनखंड करें।

$18 = 2 \times 3^2$

$42 = 2 \times 3 \times 7$

चरण-2: 18 या 42 में आने वाले विशिष्ट गुणनखंड 2, 3 और 7 हैं

चरण-3: 2 की उच्चतम घात 2^1, 3 की घात 3^2 तथा 7 की घात 7^1 है।

$\therefore$(18, 42) का लघुत्तम समापवर्त्य = $2^1 \times 3^2 \times 7^1 = 126$.

विभाजन विधि

2	18, 42
3	9, 21
	3, 7

$\therefore$(18, 42) का लघुत्तम समापवर्त्य = $2 \times 3^2 \times 7 = 126$

Ex. 12, 15 और 18 का लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात करें।

HINTS

अभाज्य गुणनखंड → $12 = 2^2 \times 3^1$

$15 = 3^1 \times 5^1$

$18 = 2^1 \times 3^2$

$\therefore$ 12, 15 और 18 का लघुत्तम समापवर्त्य = $2^2 \times 3^2 \times 5^1 = 180$

Ex. 144, 360 और 450 का LCM ज्ञात कीजिए।

HINTS

अभाज्य गुणनखंड → $144 = 24 \times 3^2 = 2^4 \times 3^2$

$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$

$450 = 2 \times 3^2 \times 5^2$

$\therefore$(144, 360, 450) का लघुत्तम समापवर्त्य = $2^4 \times 3^2 \times 5^2 = 3600$

Ex. $2^3 \times 9^2 \times 13$, $2^2 \times 13^2 \times 19$ और $9^3 \times 13^2 \times 19^2$ का लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात कीजिए।

HINTS

$2^3 \times 9^2 \times 13$, $2^2 \times 13^2 \times 19$, $9^3 \times 13^2 \times 19^2$ का लघुत्तम समापवर्त्य

$= 2^3 \times 9^3 \times 13^2 \times 19^2$

HCF

अभाज्य गुणनखंड विधि

चरण-1: सभी दी गई संख्याओं को उनके अभाज्य गुणनखंडों में विभाजित करें।

चरण-2: उभयनिष्ठ गुणनखंडों का गुणनफल लीजिए। यह HCF होगा।

Ex. 18 और 42 का HCF ज्ञात कीजिए।

HINTS

चरण-1: 18 और 42 का गुणनखंड करें

$18 = 2 \times 3^2$

$42 = 2 \times 3 \times 7$

चरण-2: सामान्य गुणनखंड 2 और 3 हैं।

(18, 42) का HCF = उभयनिष्ठ गुणनखंडों का गुणनफल

$= 2 \times 3 = 6 = 2 \times 3 = 6$

@apna_channels

दीर्घ विभाजन विधि

```
18 ) 42 ( 2
    -36
     6 ) 18 ( 3
        -18
         00
```

$\therefore$(18, 42) का HCF = 6

अंतर विधि

यदि a, b और c का HCF N है। इसका अर्थ है कि a, b और c, N से विभाज्य हैं, और |a – b|, |b – c|, |c – a| भी N से विभाज्य है।

HCF = |a – b|, |b – c|, |c – a|

Ex. 240, 280 और 560 का HCF ज्ञात कीजिए।

HINTS

240 —(अंतर 40)— 280 —(अंतर 280)— 560

$\because$ 240, 280 और 560, 40 से पूर्णतः विभाज्य हैं।

$\therefore$ 240, 280 और 560 का म.स.प. = 40

Ex. संख्या 1026, 2268 और 2430 का म.स.प. क्या है?

HINTS

1026 —(अंतर 1242)— 2268 —(अंतर 162)— 2430

$162 = 2 \times 3^4 = 3 \times 54$

$\because$ 54, 162 का सबसे बड़ा गुणनखंड है जो 1026, 2268 और 2430 को पूर्णतः विभाजित करता है

$\therefore$ 1026, 2268 और 2430 का म.स.प. = 54

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

भिन्नों का LCM और HCF

LCM

भिन्नों का LCM = $\frac{\text{अंशों का LCM}}{\text{हरों का HCF}}$

$\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}\right)$ का LCM = $\frac{(a, c, e) \text{ का LCM}}{(b, d, f) \text{ का HCF}}$

Ex. $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{4}{7}$ और $\frac{6}{17}$ का LCM ज्ञात कीजिए?

HINTS

भिन्नों का LCM = $\frac{\text{अंशों का LCM}}{\text{हरों का HCF}}$

$= \frac{(1, 2, 4, 6) \text{ का LCM}}{(2, 5, 7, 17) \text{ का HCF}} = \frac{12}{1} = 12$

HCF

भिन्नों का HCF = $\frac{\text{अंशों का HCF}}{\text{हरों का LCM}}$

$\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}\right)$ का HCF = $\frac{(a, c, e) \text{ का HCF}}{(b, d, f) \text{ का LCM}}$

Ex. $\frac{4}{5}, \frac{24}{25}$ और $\frac{16}{35}$ का HCF ज्ञात कीजिए?

HINTS

भिन्नों का HCF = $\frac{\text{अंशों का HCF}}{\text{हरों का LCM}}$

$\left(\frac{4}{5}, \frac{24}{25}, \frac{16}{35}\right)$ का HCF = $\frac{(4, 24 \& 16) \text{ का HCF}}{(5, 25 \& 35) \text{ का LCM}} = \frac{4}{175}$

दशमलव का LCM और HCF

चरण-1: दशमलव को भिन्न में बदलें

चरण-2: भिन्नों को सरल करें (यदि आवश्यक हो)।

चरण-3: अंश और हर का अलग-अलग LCM या HCF ज्ञात करें।

LCM

भिन्नों का LCM = $\frac{\text{अंशों का LCM}}{\text{हरों का HCF}}$

Ex. 0.15, 0.18 और 0.45 का LCM क्या है?

HINTS

(0.15, 0.18 और 0.45) का LCM = $\left(\frac{15}{100}, \frac{18}{100}, \frac{45}{100}\right)$ का LCM

$= \frac{(15, 18, 45) \text{ का LCM}}{(100\ 100\ 100) \text{ का HCF}} = \frac{3 \times 5 \times 2 \times 3}{100} = \frac{90}{100} = 0.9$

वैकल्पिक

0.15, 0.18, 0.45 = 15, 18, 45, LCM = 90

दूसरे चरण में हमने जो दशमलव हटाया था उसे पुनः जोड़ा जाएगा = 0.9

Ex. 0.126, 0.36 और 0.96 का LCM क्या है?

HINTS

(0.126, 0.36, 0.96) का LCM = $\frac{(126, 36, 96) \text{ का LCM}}{(1000, 100, 100) \text{ का HCF}}$

अभाज्य गुणनखंड → $126 = 7 \times 3^2 \times 2$, $36 = 3^2 \times 2^2$, $96 = 2^5 \times 3$

$\therefore$ LCM = $2^5 \times 3^2 \times 7 = 2016$

1000, 100, 100 का HCF = 100

$\therefore$ अभीष्ट LCM = $\frac{2016}{100} = 20.16$

वैकल्पिक

0.126,.36,.96= 126, 360, 960, LCM = 20160

तीसरे स्थान से हमने जो दशमलव हटाया है उसे फिर से जोड़ा जाएगा = 20.16

HCF

भिन्नों का HCF = $\frac{\text{अंशों का HCF}}{\text{हरों का LCM}}$

Ex. 0.48, 0.72 और 0.108 का HCF ज्ञात कीजिए।

HINTS

$0.48 = \frac{48}{100}, 0.72 = \frac{72}{100}, 0.108 = \frac{108}{1000}$

भिन्नों का HCF = $\frac{(48, 72, 108) \text{ का HCF}}{(100, 100, 1000) \text{ का LCM}} = \frac{12}{1000} = 0.012$

वैकल्पिक

0.48, 0.72, 0.108 = 480, 720, 108, HCF = 12

तीसरे चरण से हमने जो दशमलव हटाया है उसे फिर से जोड़ा जाएगा = 0.012

Ex. 0.70, 0.35 और 1.05 का HCF ज्ञात कीजिए।

HINTS

$0.70 = \frac{70}{100}, 0.35 = \frac{35}{100}, 1.05 = \frac{105}{100}$

भिन्नों का HCF = $\frac{(70, 35, 105) \text{ का HCF}}{(100, 100, 100) \text{ का LCM}} = \frac{35}{100} = 0.35$

वैकल्पिक

0.70,0.35,1.05 = 70, 35, 105 HCF = 35

दूसरे स्थान से हमने जो दशमलव हटाया है उसे फिर से जोड़ा जाएगा = 0.35

नोट:- वैकल्पिक दृष्टिकोण में सबसे पहले हम सभी संख्याओं को बराबर करते हैं, दशमलव हटाते हैं और उनके पीछे शून्य लगाते हैं। फिर उसके बाद हम उस संख्या का HCF या LCM ज्ञात करते हैं, जो भी दिया गया हो।

महत्वपूर्ण परिणाम: $(A^M \pm 1, A^N \pm 1)$ का HCF = $(A^{HCF(M,N)} \pm 1)$

Ex. वह सबसे बड़ी संख्या क्या है जो $(2^{35} - 1)$ और $(2^{91} - 1)$ दोनों को विभाजित करती है?

HINTS सबसे पहले घात का HCF ज्ञात करें।

(35, 91) का HCF = 7

सबसे बड़ी संख्या = $2^7 - 1 = 128 - 1 = 127$

Selected है Selection दिलाएंगे

@apna_channels
Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

ल.स.प. और म.स.प.

Ex. $(3^{45} - 1)$ और $(3^{35} - 1)$ का म.स.प. क्या है?

HINTS सबसे पहले घात का HCF ज्ञात करें।

(45, 35) का HCF = 5

$(3^{45} - 1)$ और $(3^{35} - 1)$ का HCF = $3^5 - 1 = 243 - 1 = 242$

Ex. $(4^{63} + 1)$ और $(4^{45} + 1)$ का म.स.प. क्या है?

HINTS सबसे पहले घात का HCF ज्ञात करें।

(63, 45) का म.स.प. = 9

$(4^{63} + 1)$ और $(4^{45} + 1)$ का म.स.प. = $4^9 + 1$

बहुपदों का LCM और HCF

LCM

दो या अधिक बहुपदों का लघुत्तम समापवर्त्य "न्यूनतम घात का सार्वगुणज" होता है।

Ex. बहुपदों $(x^2 - 5x + 6)$ और $(x^2 - 7x + 10)$ का LCM ज्ञात कीजिए

HINTS

$x^2 - 5x + 6 = x^2 - 2x - 3x + 6$

$= x(x-2) - 3(x-2)$

$= (x-2)(x-3)$

$x^2 - 7x + 10 = x^2 - 2x - 5x + 10$

$= x(x-2) - 5(x-2)$

$= (x-2)(x-5)$

$\therefore$ LCM $= (x-2)(x-3)(x-5)$

Ex. निम्नलिखित बहुपदों का LCM ज्ञात कीजिए:

$x^2 - 5x + 6$, $x^2 - 2x - 15$ और $x^2 - 9$

HINTS

$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$,

$x^2 - 2x - 15 = (x-5)(x+3)$ और $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$.

$\therefore$ LCM $= (x-2)(x-3)(x+3)(x-5)$

HCF

दो या अधिक बहुपदों का H.C.F. "उच्चतम घात का उभयनिष्ठ गुणनखंड" होता है।

Ex. निम्नलिखित बहुपद का HCF ज्ञात कीजिए-

$15x^2 + 8x - 12$, $3x^2 + x - 2$, $3x^2 - 2x$, $9x^2 - 12x + 4$.

HINTS

बहुपद के गुणनखंड

$15x^2 + 8x - 12 = (3x-2)(5x+6)$

$3x^2 + x - 2 = (3x-2)(x+1)$

$9x^2 - 12x + 4 = (3x-2)^2$

$3x^2 - 2x = x(3x-2)$

$\therefore$ HCF $= (3x-2)$

Ex. निम्नलिखित का HCF ज्ञात कीजिए-

$6xy^2z$, $8x^2y^2z^2$, $12x^3y^3z^3$

HINTS

$6xy^2z = 2 \times 3 \times x \times y \times y \times z$

$8x^2y^2z^2 = 2 \times 2 \times 2 \times x \times x \times y \times y \times z \times z$

$12x^3y^3z^3 = 2 \times 2 \times 3 \times x \times x \times x \times y \times y \times y \times z \times z \times z$

$\therefore$ HCF $= 2 \times x \times y \times y \times z = 2xy^2z$

@apna_channels

LCM और HCF से संबंधित महत्वपूर्ण गुण और मानक सूत्र

1. दो संख्याओं का गुणनफल = HCF × LCM
2. संख्याओं के किसी दिए गए समूह का LCM उसी संख्याओं के HCF से अधिक होना चाहिए।
3. यदि x और y का HCF, H है, तो HCF होगा
   (i) x, $(x + y)$ भी H है।
   (ii) x, $(x - y)$ भी H है।
4. ऋणात्मक संख्याओं के लिए HCF और LCM परिभाषित नहीं हैं।

Ex. दो संख्याओं का HCF और LCM क्रमशः 6 और 5040 है। यदि उनमें से एक संख्या 210 है, तो दूसरी संख्या क्या होगी?

HINTS माना, दूसरी संख्या = x

हम जानते हैं कि, दो संख्याओ का गुणनफल = LCM × HCF

$\Rightarrow 6 \times 5040 = 210 \times x \Rightarrow x = 144$

Ex. दो संख्याओं का महत्तम समापवर्तक (HCF) उनके लघुत्तम समापवर्त्य (LCM) का $\frac{1}{20}$ है। यदि एक संख्या 96 है और लघुत्तम समापवर्त्य और महत्तम समापवर्त्य का अंतर 456 है, तो दूसरी संख्या क्या होगी?

HINTS माना, LCM = 20 इकाई, तब HCF = 1 इकाई

अंतर (19 इकाई) = 456 ⇒ 1 इकाई = 24

अब, LCM × HCF = पहली संख्या × दूसरी संख्या

⇒ (20 × 24) × (1 × 24) = 96 × दूसरी संख्या

⇒ दूसरी संख्या = $\frac{(20 \times 24) \times (1 \times 24)}{96} = 120$

Ex. दो संख्याओं का गुणनफल 2028 है और उनका HCF, 13 है। ऐसे युग्मों की संख्या है:

HINTS माना, पहली संख्या = x और दूसरी संख्या = y

$13x \times 13y = 2028 \Rightarrow xy = 12$

संभावित युग्म = (1 × 12), (3 × 4)

$\therefore$ ऐसे जोड़ों की संख्या 2 है।

Ex. दो संख्याओं का योग 528 है और उनका HCF, 33 है। ऐसे संभावित जोड़ों की संख्या क्या है?

HINTS HCF = 33

पहली संख्या = $33x$, दूसरी संख्या = $33y$

पहली संख्या + दूसरी संख्या = 528

$\Rightarrow 33x + 33y = 528 \Rightarrow 33(x + y) = 528$

$\Rightarrow (x + y) = 16$

1 15 ✓

2 14 × (सह-अभाज्य नहीं हैं)

3 13 ✓

4 12 × (सह-अभाज्य नहीं हैं)

5 11 ✓

6 10 (×) (सह-अभाज्य नहीं हैं)

7 9 (✓)

8 8 (×) (सह-अभाज्य नहीं हैं)

संभावित युग्म = (1, 15), (3, 13), (5, 11), (7, 9)

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. दो संख्याओं का योग 1215 है और उनका HCF, 81 है। यदि संख्याएँ 500 और 700 के बीच हैं, तो संख्याओं के व्युत्क्रमों का योग क्या है?

HINTS पहली संख्या = $81x$, दूसरी संख्या = $81y$

प्रश्नानुसार,

$81x + 81y = 1215 \Rightarrow 81(x + y) = 1215$

$\Rightarrow x + y = 15$

1 14 (×) (∵ 81 × 1 = 81 संख्या 500 – 700 के बीच नहीं है)
2 13 (×)
4 11 (×)
7 8 (✓)

पहली संख्या = 81 × 7, दूसरी संख्या = 81 × 8

व्युत्क्रमो का योग = $\frac{1}{81\times7}+\frac{1}{81\times8}=\frac{1}{81}\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)$

$=\frac{1}{81}\left(\frac{15}{56}\right)=\frac{5}{1512}$

संख्याओं के अनुपात पर आधारित

Ex. दो संख्याओं का लघुत्तम समापवर्त्य 84 है। यदि संख्याएँ 2 : 3 के अनुपात में हैं, तो संख्याओं का योग है:

HINTS माना, संख्याएँ 2K और 3K होंगी

(2K, 3K) का HCF = K

तब, (2K, 3K) का LCM ⇒ 2 × 3 × K = 84 ⇒ K = 14

∴ संख्याओं का योग = 2K + 3K = 5K = 5 × 14 = 70

Ex. तीन संख्याओं का अनुपात 5 : 6 : 8 है, तथा उनका लघुत्तम समापवर्त्य 1200 है। संख्याओं का योग ज्ञात कीजिए।

HINTS मान लीजिए, संख्याएँ क्रमशः $5x$, $6x$ और $8x$ हैं।

LCM = $120x \Rightarrow 120x = 1200 \Rightarrow x = 10$

∴ संख्याओं का योग = $19x$ = 19 × 10 = 190

LCM और HCF का अनुप्रयोग

LCM

(i) सबसे छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जो x, y, z से पूर्णतः विभाज्य हो
= (x, y, z) का LCM

(ii) वह सबसे छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिसे x, y, z से विभाजित करने पर प्रत्येक स्थिति में शेषफल r बचे
= (x, y, z) का लघुत्तम समापवर्त्य + r

(iii) वह सबसे छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिसे x, y, z से विभाजित करने पर क्रमशः a, b, c शेषफल बचे
= (x,y, z) का LCM – k [जहाँ, k = (x – a) = (y – b) = (z – c)]

HCF

(i) वह सबसे बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए जो x, y और z को पूर्णतः विभाजित करेगी
= (x, y, z) का HCF

(ii) वह सबसे बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए जो x, y और z को पूर्णतः विभाजित करने पर शेषफल r बचें
= [(x – r), (y – r), (z – r)] का HCF या
[(x – y), (y – z), (z – x)] का HCF

(iii) वह सबसे बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए जो x, y और z को पूर्णतः विभाजित करने पर क्रमशः a, b और c शेषफल बचें
= [(x – a), (y – b), (z – c)] का HCF

@apna_channels

Ex. वह सबसे छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जो 105, 91 और 130 से पूर्णतः विभाज्य हो।

HINTS (105, 91, 130) का LCM = 2730

Ex. मान लीजिए x वह सबसे छोटी संख्या है जिसे 5, 6, 7 और 8 से भाग देने पर प्रत्येक स्थिति में 3 शेषफल बचता है, लेकिन 9 से भाग देने पर शून्य शेषफल बचता है। x के अंकों का योग है:

HINTS (5, 6, 7, 8) का LCM = 840, r = 3

संख्या = 840k + 3

जब संख्या 9 से विभाजित हो, r = 0

k = 2 रखने पर

अभीष्ट संख्या = 840 × 2 + 3 = 1683

संख्याओं का योग = 1 + 6 + 8 + 3 = 18

Ex. वह सबसे छोटा धनात्मक पूर्णांक क्या है जिसे 4, 5, 8, 9 से विभाजित करने पर क्रमशः 3, 4, 7, 8 शेषफल बचता है?

HINTS अंतर (k) = 4 – 3 = 5 – 4 = 8 – 7 = 9 – 8 = 1

4, 5, 8, 9 का LCM = 360

∴ अभीष्ट संख्या = 360 – 1 = 359

Ex. पांच अंकों की वह सबसे बड़ी संख्या क्या है जिसे 6,7,8 और 9 से विभाजित करने पर क्रमशः 4, 5, 6 और 7 शेषफल बचते हैं?

HINTS उभयनिष्ठ अंतर = (6 – 4) = (7 – 5) = (8 – 6) = (9 – 7) = 2

6,7, 8 और 9 का LCM = 504

अभीष्ट संख्या = 504k – 2, जहाँ k कोई पूर्णांक हैं

चूंकि हमें सबसे बड़ी पांच अंकीय संख्या ज्ञात करनी है, इसलिए यह 504 का गुणज और 99999 के निकटतम होनी चाहिए।

k = 198 रखने पर,

504k = 504 × 198 = 99792

∴ अभीष्ट संख्या = 99792 – 2 = 99790

Ex. सुबह 10 बजे 5 घंटियाँ एक साथ बजती हैं। ये घंटियाँ क्रमशः 12 सेकंड, 18 सेकंड, 24 सेकंड, 36 सेकंड और 45 सेकंड के अंतराल पर बजती हैं। ये घंटियाँ फिर से किस समय एक साथ बजेंगी?

HINTS 12, 18, 24, 36, 45 का LCM = 360 सेकंड

$=\frac{360}{60}$ मिनट = 6 मिनट

सुबह 10:06 बजे सभी घंटियाँ पुनः एक साथ बजती हैं।

Ex. स्वप्निल, आकाश और विनय एक गोलाकार स्टेडियम के चारों ओर दौड़ना शुरु करते हैं। वे क्रमशः 36 सेकंड, 48 सेकंड और 42 सेकंड में अपनी परिक्रमा पूरी करते हैं। कितने सेकंड बाद वे शुरुआती बिंदु पर एक साथ होंगे?

HINTS $36 = 2^2 \times 3^2$,

$48 = 2^4 \times 3$,

$42 = 2 \times 3 \times 7$

(36, 48, 42) का LCM = $2^4 \times 3 \times 3 \times 7 = 16 \times 9 \times 7 = 1008$

अतः, 1008 सेकंड के बाद तीनों रेसर प्रारंभिक बिंदु पर एक साथ मिलेंगे।

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. एक माली के पास रोपने के लिए कुछ पौधे थे। उसने उन्हें 7, 8, 9 और 12 की पंक्तियों में लगाने की कोशिश की। लेकिन उसके पास हमेशा एक पौधा बचता था। जब उसने उन्हें 11 की पंक्तियों में लगाने की कोशिश की, तो उसके पास एक भी पौधा नहीं बचा। माली के पास पौधों की न्यूनतम संख्या ज्ञात कीजिए।

HINTS N = (7, 8, 9, 12) n + 1 का LCM = 504n + 1

$N = \frac{504n+1}{11} = 9n + 1$

n = 6 रखने पर,

$\therefore$ N = 504 × 6 + 1 = 3024 + 1 = 3025

पौधों की न्यूनतम संख्या = 3025

Ex. छह घंटियाँ सुबह 7:59 बजे एक साथ बजना शुरू होती हैं। वे क्रमशः 3, 6, 9, 12 और 15 सेकंड के अंतराल पर बजती हैं। सुबह 8:16 बजे तक वे कितनी बार एक साथ बजेंगी? (सुबह 7:59 बजे की घंटियों को छोड़कर)

HINTS (3, 6, 9, 12, 15) का LCM = 180

$\Rightarrow$ घंटियाँ प्रत्येक 180 सेकंड या $\frac{180}{60}$ = 3 मिनट के बाद बजती हैं।

सुबह 7:59 से 8:16 तक, कुल 17 मिनट का अंतराल होता है।

घंटियों के बजने की संख्या = $\frac{17}{3} \sim 5$

Ex. वह सबसे बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए जो 216, 248 और 312 को विभाजित करने पर समान शेषफल प्रदान करे।

HINTS

248 ↔ 216 अंतर = 32; 312 ↔ 248 अंतर = 64; 312 ↔ 216 अंतर = 96

32, 64 और 96 में से, वह सबसे छोटी संख्या जो सभी दी गई संख्याओं को पूर्णतः विभाजित करती है, 32 है।

इसलिए, सबसे बड़ी संख्या जो सभी संख्याओं को विभाजित करने पर समान शेषफल देती है, वह 32 है।

Ex. वह सबसे बड़ी संख्या क्या है जिससे 156, 181 और 331 को विभाजित किया जाए, यदि प्रत्येक स्थिति में शेषफल 6 बचे?

HINTS 156 – 6 = 150, 181 – 6 = 175, 331 – 6 = 325

(150, 175, 325) का HCF = 25

Ex. वह सबसे बड़ी संख्या क्या है जिससे 2675 और 2320 को विभाजित करने पर क्रमशः शेषफल 5 और 6 बचते हैं?

HINTS यदि कोई संख्या 2675 को विभाजित करती है और शेषफल 5 बचाती है तो इसका अर्थ है कि यह संख्या (2675 - 5) को पूरी तरह से विभाजित करेगी और (2320 - 6) को भी।

2670 = 178 × 15, 2314 = 178 × 13

अतः 2670 और 2314 का HCF = 178

$\therefore$ 178 सबसे बड़ी संख्या है जो 2675 और 2320 को विभाजित करने पर क्रमशः 5 और 6 शेषफल बचाती है।

Ex. जब 2388, 4309 और 8151 को एक निश्चित 3-अंकीय संख्या से विभाजित किया जाता है, तो प्रत्येक स्थिति में शेषफल समान होता है, शेषफल है।

HINTS

4309 ↔ 2388 अंतर = 1921; 8151 ↔ 4309 अंतर = 3842; 8151 ↔ 2388 अंतर = 5763

(1921, 3842, 5763) का HCF = 1921

1921 के गुणनखंड = 17 × 113

तो तीन अंकों की संख्या = 113

जब हम 2388, 4309 और 8151 को 113 से भाग देंगे तो शेषफल 15 प्राप्त होगा।

$\therefore$ अभीष्ट शेषफल = 15

Ex. एक आयताकार कमरे के फर्श की विमाएँ 3 मीटर 60 सेमी × 5 मीटर 40 सेमी हैं। इसे वर्गाकार टाइलों से ढकना है। सबसे बड़ी वर्गाकार टाइल जो लगाई जा सकती है, उसकी विमा क्या है? इसे ढकने के लिए कितनी टाइलों की आवश्यकता होगी?

HINTS आयताकार कमरे के फर्श के आयाम $\Rightarrow$ 3 मीटर 60 सेमी = 360 सेमी और 5 मीटर 40 सेमी = 540 सेमी।

360 = 2 × 180, 540 = 3 × 180

$\therefore$ HCF = 180

इसका अर्थ है कि सबसे बड़ी वर्गाकार टाइल का आयाम 180 सेमी × 180 सेमी होना चाहिए।

आवश्यक टाइल्स की संख्या

$= \frac{\text{फर्श का क्षेत्रफल}}{\text{वर्गाकार टाइलों का क्षेत्रफल}} = \frac{360 \times 540}{180 \times 180} = 6$

Ex. विभाजन विधि द्वारा दो संख्याओं का HCF ज्ञात करने में चार क्रमिक भागफल क्रमशः 4, 3, 6 और 5 हैं तथा अंतिम भाजक 12 है। दो संख्याएँ क्या हैं?

HINTS

```
1176)5076(4
     4704
      372)1176(3
          1116
            60)372(6
               360
                12)60(5
                   60
                    0
```

अतः दो संख्याएँ 1176, 5076 हैं।

Ex. एक दूध विक्रेता के पास 75 लीटर गाय का दूध, 45 लीटर टोन्ड दूध और 30 लीटर फुल क्रीम दूध है। इन्हें अलग-अलग ट्रे में इस प्रकार रखा जाना चाहिए कि प्रत्येक ट्रे में दूध की मात्रा समान हो और एक ट्रे में दो प्रकार के दूध न मिलें। सारा दूध रखने के लिए कम से कम कितनी ट्रे की आवश्यकता होगी?

HINTS 75, 45, 30 का HCF = 15

आवश्यक ट्रे की न्यूनतम संख्या = $\frac{75}{15} + \frac{45}{15} + \frac{30}{15}$

= 5 + 3 + 2 = 10

Ex. 13, a, b, c चार भिन्न संख्याएँ हैं और संख्याओं के प्रत्येक युग्म (13, a) ; (13, b); (13, c) का HCF 13 है, जहाँ a,b,c प्रत्येक 60 से कम हैं और a < b < c है। $\frac{a+c}{b}$ का मान क्या है?

HINTS a, b, c 13 के गुणज होने चाहिए, क्योंकि HCF, 13 है

13 और a का HCF = 13 $\Rightarrow$ a = 26

13 और b का HCF = 13 $\Rightarrow$ b = 39

13 और c का HCF = 13 $\Rightarrow$ c = 52

यहाँ, a < b < c < 60

$\therefore \frac{(a+c)}{b} = \frac{(26+52)}{39} = \frac{78}{39} = 2$

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

अध्याय 06

अनुक्रम और श्रृंखला

श्रेणी के प्रकार

- समांतर श्रेणी
- गुणोत्तर श्रेणी
- हरात्मक श्रेणी

मूल शब्दावली

अनुक्रम

अनुक्रम एक विशिष्ट पैटर्न या नियम का पालन करने वाली संख्याओं की एक क्रमबद्ध सूची है।

Ex. a_1, a_2, a_3, a_4.........

2, 4, 6, 8 ....

श्रेणी

श्रेणी एक विशिष्ट प्रकार का अनुक्रम है, जिसमें प्रत्येक पद एक निश्चित नियम का उपयोग करके अपने पूर्ववर्ती पद से व्युत्पन्न होता है।

श्रृंखला

श्रृंखला किसी अनुक्रम के पदों का योग होती है।

$S = a_1, a_2, a_3, a_4$......... (एक अनुक्रम है)

तो व्यक्त योग $= a_1 + a_2 + a_3 + a_4$......... (एक श्रृंखला है)

समांतर श्रेणी

संख्याओं के किसी क्रम को समांतर श्रेणी (A.P.) में कहा जाता है यदि उसके किन्हीं दो क्रमागत पदों के बीच का अंतर स्थिर हो। इस स्थिरांक को सार्व अंतर (c.d.) कहते हैं और सामान्यतः इसे d से दर्शाया जाता है।

मानक रूप : a, (a + d), (a + 2d),.........

जहाँ a पहला पद है और d एक समांतर श्रेणी के अनुक्रम का सार्व अंतर है।

(i) एक समांतर श्रेणी का nवाँ पद

$a_n = a + (n-1)d$

(ii) किसी समांतर श्रेणी का nवाँ पद अंतिम पद से

$a_n = l - (n-1)d$

(iii) एक समांतर श्रेणी के प्रथम n पदों का योग

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d] = \frac{n}{2}\left[a+\underbrace{a+(n-1)d}_{a_n}\right] = \frac{n}{2}[a+a_n]$$

$$S_n = \frac{n}{2}[\text{पहला पद} + \text{अंतिम पद}]$$

(iv) यदि किसी समांतर श्रेणी के दो पद a_m और a_n ज्ञात हैं तो

$$d = \frac{a_n - a_m}{n-m}$$

Ex. 15, 20, 25 .... 135 के बीच कितने पद हैं?

HINTS माना पदों की संख्या = n

$a_n = a + (n-1)d$

$\Rightarrow 135 = 15 + (n-1)5 \Rightarrow 24 = n - 1$

$\Rightarrow n = 25$

Ex. अनुक्रम 26, 20, 14, 8 ...... का 21वाँ पद ज्ञात कीजिए।

HINTS प्रथम पद (a) = 26

अंतर (d) = – 6

कुल पद (n) = 21

$a_n = a + (n-1)d$

$\therefore a_{21} = a + 20d$

$= 26 + 20(-6)$

$= 26 - 120 = -94$

Ex. अनुक्रम 249, 260, 271...... से 153 पदों तक का योगफल ज्ञात कीजिए

HINTS प्रथम पद (a) = 249

अंतर (d) = 260 – 249 = 11

कुल पद (n) = 153

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$S_{153} = \frac{153}{2}[2 \times 249 + (153-1) \times 11]$$

$$= \frac{153}{2} \times (498 + 1672) = 166005$$

Ex. एक समान्तर श्रेणी (A.P.) जिसका 17वाँ और पहला पद क्रमशः 315 और 251 है। 24 पदों तक का योग ज्ञात कीजिए।

HINTS प्रथम पद (a) = 251 ..... (i)

17वाँ पद (a + 16d) = 315 ..... (ii)

समीकरण (i) और (ii) से,

$$16d = 64 \Rightarrow d = \frac{64}{16} = 4$$

$$\because S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$S_{24} = \frac{24}{2}(2 \times 251 + 23 \times 4)$$

$= 12 \times 594 = 7128$

AM =

Ex. एक व्यक्ति जनवरी 2018 में ₹1750 बचाता है और हर महीने अपनी बचत में ₹95 की वृद्धि करता है। वर्ष 2018 में उस व्यक्ति की वार्षिक बचत कितनी है?

HINTS $\because S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

$$S_{12} = \frac{12}{2}[2 \times 1750 + (12-1) \times 95]$$

$= 6(3500 + 11 \times 95) = 27270$

समांतर श्रेणी के पदों का चयन

- समांतर श्रेणी में लगातार तीन पद = a – d, a, a + d
- समांतर श्रेणी में लगातार चार पद = a–3d, a–d, a+d, a+3d
- समांतर श्रेणी में लगातार पाँच पद = a–2d, a–d, a, a+d, a+2d

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. समांतर श्रेणी में तीन संख्याओं का योग -3 है और उनका गुणनफल 8 है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

HINTS माना, संख्याएँ = a – d, a, a + d

प्रश्नानुसार,

$(a - d) + a + (a + d) = -3$

$\Rightarrow 3a = -3 \Rightarrow a = -1$

अब, $(-1 - d) \times (-1) \times (-1 + d) = 8$

$\Rightarrow d^2 - 1 = 8$

$\Rightarrow d = \pm 3$

जब $d = -3$, संख्याएँ $\rightarrow 2, -1, -4$

जब $d = 3$, संख्याएँ $\rightarrow -4, -1, 2$

सामान्य अंतर d_1 और d_2 वाले दो समान्तर श्रेणी के सामान्य पद भी सामान्य अंतर वाले समान्तर श्रेणी में हैं

= ल.स.प. $\rightarrow \{d_1, d_2\}$

Ex. दी गई दो समान्तर श्रेणी के लिए 10वाँ सामान्य पद ज्ञात कीजिए:

3, 7, 11, 15, 19 .... और 1, 6, 11, 16, 21 ....

HINTS $d_1 = 4$ और $d_2 = 5$

अतः, अभीष्ट श्रेणी (d) का सार्वांतर = ल.स.प. (4, 5)

$\therefore d = 20$

दी गई श्रृंखला में पहला उभयनिष्ठ पद 11 है।

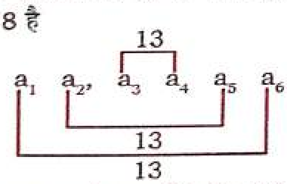
अतः, 11, 31, 51 ....

$a_{10} = 11 + 9 \times 20 = 11 + 180 = 191$

एक समान्तर श्रेणी में, आरंभ और अंत से समान दूरी पर स्थित पदों का योग समान होता है।

$a_1 + a_4 = a_2 + a_3$

Ex. एक समान्तर श्रेणी के प्रथम 6 पदों का योग ज्ञात कीजिए यदि तीसरा और चौथा पद 5 और 8 है



$a_3 + a_4 = a_2 + a_5 = a_1 + a_6 = 5 + 8 = 13$

आवश्यक योग = 3 × 13 = 39

समांतर माध्य

जब तीन या अधिक संख्याएँ समांतर श्रेणी में होती हैं, तो पहले और अंतिम पदों के बीच की संख्याओं को उनके बीच समांतर माध्य (A.M.) के रूप में जाना जाता है।

(i) यदि A दो संख्याओं a और b के बीच का समांतर माध्य है, तो,

$$A = \frac{1}{2}(a + b)$$

(ii) सामान्यतः, यदि a, b, c, ... n पद समांतर श्रेणी में हों, तो उनके

$$AM = \frac{a + b + c + ...n \text{ पद}}{n}$$

Ex. 6, 10 और 14 में कौन सी संख्या जोड़नी होगी कि समांतर माध्य 12 हो जाए?

HINTS मान लीजिए, संख्या = x

$$\frac{6 + 10 + 14 + x}{4} = 12 \Rightarrow \frac{30 + x}{4} = 12 \Rightarrow x = 18$$

गुणोत्तर श्रेणी

संख्याओं के अनुक्रम को गुणोत्तर श्रेणी में तब कहा जाता है जब किसी भी पद (पहले पद को छोड़कर) का उसके पिछले पद से अनुपात सदैव स्थिर रहता है। इस स्थिर अनुपात को उसका सार्व अनुपात कहते हैं और इसे सामान्यतः r से दर्शाया जाता है।

मानक रूप : $a, ar, ar^2, ...$

जहाँ a पहला पद है और r एक गुणोत्तर श्रेणी के अनुक्रम का सामान्य अनुपात है।

(i) शुरुआत से एक गुणोत्तर श्रेणी का nवाँ पद $a_n = ar^{(n-1)}$

(ii) अंत से G.P. का nवाँ पद $a_n = \frac{1}{r^{n-1}}$ द्वारा दिया गया है

(iii) m पदों वाली एक निश्चित गुणोत्तर श्रेणी (GP) का अंतिम से 'n' पद" $= ar^{m-n}$

(iv) आरंभ से nवाँ पद × अंत से nवाँ पद

= प्रथम पद × अंतिम पद = $a \times l$

(v) एक गुणोत्तर श्रेणी के प्रथम n पदों का योग

$$S_n = \begin{cases} \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}; r \neq 1 \text{ और } r < 1 \\ \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}; r \neq 1 \text{ और } r > 1 \end{cases}$$

$$S_\infty = \frac{a}{1 - r}; -1 < r < 1$$

यदि सार्व अनुपात 1 के बराबर है, तो

GP के पहले n पदों का योग $S_n = na$ द्वारा दिया जाता है

(I) a, b, c → AP → 2b = a + c

a, b, c → GP → $b^2 = ac$

(II) GP का कोई भी पद 0 नहीं हो सकता।

गुणोत्तर श्रेणी में चुने गए पदों की संख्या

- लगातार तीन पद = $\frac{a}{r}$, a, ar
- लगातार चार पद = $\frac{a}{r^3}, \frac{a}{r}$, ar, ar^3
- लगातार पाँच पद = $\frac{a}{r^2}, \frac{a}{r}$, a, ar, ar^2

Ex. गुणोत्तर श्रेणी (G.P) 6, 18, 54 .... 39366 में कितने पद हैं?

HINTS प्रथम पद (a) = 6

अनुपात (r) = $\frac{\text{दूसरा पद}}{\text{प्रथम पद}} = \frac{18}{6} = 3$

अंतिम पद (a_n) = 39366

$\therefore a_n = ar^{n-1} \Rightarrow 39366 = ar^{n-1}$

$\Rightarrow 6 \times 3^{n-1} = 39366$

$\Rightarrow 3^{n-1} = 6561$

$\Rightarrow 3^{n-1} = 3^8$

$\Rightarrow n - 1 = 8$ (घातों की तुलना)

$\Rightarrow n = 9$

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. यदि पहला पद 125 है और सार्वानुपात $\frac{2}{5}$ है, तो गुणोत्तर श्रेणी का चौथा पद क्या होगा?

HINTS प्रथम पद (a) = 125, सार्वानुपात (r) = $\frac{2}{5}$

पदों की संख्या (n) = 4

$a_n = ar^{n-1}$

$\therefore\ a_4 = 125 \times \left(\frac{2}{5}\right)^{4-1}$

$= 125 \times \frac{2 \times 2 \times 2}{5 \times 5 \times 5} = 8$

Ex. यदि गुणोत्तर श्रेणी का दूसरा और पांचवां पद क्रमशः 24 और 81 है, तो गुणोत्तर श्रेणी ज्ञात कीजिए।

HINTS दूसरा पद (ar) = 24 ....(i)

पाँचवां पद $(ar^4) = 81$ ....(ii)

(ii) को (i) से भाग दें,

$r^3 = \frac{81}{24} = \frac{27}{8} \Rightarrow r = \frac{3}{2}$

समीकरण (i) से

$ar = 24 \Rightarrow a \times \frac{3}{2} = 24 \Rightarrow a = 16$

$GP = 16,\ 16 \times \frac{3}{2} = 24,\ 24 \times \frac{3}{2}$

$= 36,\ 36 \times \frac{3}{2} = 54$

GP = 16, 24, 36, 54 ....

Ex. यदि एक गुणोत्तर श्रेणी (GP) का पहला पद 12 है और सार्वानुपात 4 है, तो चारों पदों का योग ज्ञात कीजिए?

HINTS प्रथम पद (a) = 15, सार्वानुपात (r) = 4, पदों की संख्या (n) = 4

$\therefore\ S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r-1}$ (यदि, r > 1)

$S_4 = \frac{15(4^4 - 1)}{4-1} = \frac{15(256-1)}{3}$

= 1275

Ex. निम्नलिखित गुणोत्तर श्रेणी (GP) का योग ज्ञात कीजिए?

यदि $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}$ .... n पदों तक

HINTS प्रथम पद (a) = $\frac{1}{3}$

सार्वानुपात (r) = $\frac{\text{दूसरा पद}}{\text{प्रथम पद}} = \frac{1}{9} \times \frac{3}{1} = \frac{1}{3}$

गुणोत्तर श्रेणी का योग

$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ (यदि, r < 1)

$S_n = \frac{\frac{1}{3} \times \left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3} \times \left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{\frac{2}{3}}$

$= \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$

Ex. निम्नलिखित गुणोत्तर श्रेणी (GP) का योग ज्ञात कीजिए

यदि $\frac{9}{10}, \frac{9}{100}, \frac{9}{1000}, \frac{9}{10000}$ .... n पदों तक

HINTS प्रथम पद (a) = $\frac{9}{10}$

सार्वानुपात (r) = $\frac{\text{दूसरा पद}}{\text{प्रथम पद}} = \frac{9}{100} \times \frac{10}{9} = \frac{1}{10}$

एक गुणोत्तर श्रेणी के n पदों का योग

$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ (If, r < 1)

$S_n = \frac{9}{10}\left[\frac{1\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)}{1 - \frac{1}{10}}\right] = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{9}{10}}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right) = \left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$

गुणोत्तर माध्य

जब तीन या अधिक संख्याएँ गुणोत्तर श्रेणी में होती हैं, तो पहले और अंतिम पदों के बीच की संख्याओं को उनके बीच ज्यामितीय माध्य (G.M) के रूप में जाना जाता है।

(i) यदि G दो संख्याओं a और b के बीच का GM है तो

$G = \sqrt{ab}$

(ii) सामान्यतः, यदि a_1, a_2, a_3, ... n पद गुणोत्तर श्रेणी में हों, तो

$GM = (a_1.a_2.....a_n)^{\frac{1}{n}}$

Ex. 4, 2 और 27 का गुणोत्तर माध्य ज्ञात कीजिए

HINTS $GM = \sqrt[3]{abc} = \sqrt[3]{4 \times 2 \times 27} = 2 \times 3 = 6$

Ex. $\frac{3}{4}$ और $\frac{48}{25}$ का गुणोत्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

HINTS $GM = \sqrt{\frac{3}{4} \times \frac{48}{25}} = \sqrt{\frac{144}{100}} = 1.2$

Ex. दो संख्याओं का गुणोत्तर माध्य 18 है और एक संख्या 8 है। दूसरी संख्या ज्ञात कीजिए।

HINTS मान लीजिए दूसरी संख्या =b

$GM = \sqrt{8 \times b} = 18$

$8 \times b = 18^2 \Rightarrow b = \frac{324}{8} = 40.5$

Ex. दो अवलोकनों के लिए, योग S है और गुणनफल P है। इन दो अवलोकनों का हरात्माक माध्य क्या है?

HINTS $a + b = S,\ a \times b = P$

$HM = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2P}{S}$

Ex. यदि x और y का समांतर और गुणोत्तर माध्य क्रमशः 8 और $3\sqrt{7}$ है, तो $x^3 + y^3$ का मान क्या है?

HINTS $\frac{x+y}{2} = 8 \Rightarrow x+y = 16$

$\sqrt{xy} = 3\sqrt{7} \Rightarrow xy = 63$

हिट और ट्रायल द्वारा,

$x = 9,\ y = 7$

$\therefore\ x^3 + y^3 = 9^3 + 7^3 = 1072$

स्वयं करें

Ex. दो धनात्मक संख्याओं का समांतर माध्य और गुणोत्तर माध्य 5:4 के अनुपात में हैं और ज्यामितीय माध्य 20 है। दोनों संख्याएँ ज्ञात कीजिए। **[Ans. 40 और 10]**

Ex. दो संख्याओं का समांतर माध्य 13 है और उनका गुणोत्तर माध्य 12 है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए। **[Ans. 18 और 8]**

@apna_channels

Selected हैं Selection दिलाएंगे

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

हरात्मक श्रेणी

हरात्मक श्रेणी (H.P) संख्याओं का एक क्रम है जिसमें पदों के व्युत्क्रम एक समांतर श्रेणी बनाते हैं।

दूसरे शब्दों में,

अगर a_1, a_2, a_3.......... अगर हरात्मक श्रेणी में है तो,

(I) एक समांतर श्रेणी का nवाँ पद

$$= \frac{1}{a_1} + (n-1)d$$

(II) किसी समांतर श्रेणी का nवाँ पद अंतिम पद से

$$= \frac{1}{\frac{1}{a_1} + (n-1)d}$$

nवें पदों का योग = कोई सीधा तरीका नहीं है लेकिन इसे A.P की सहायता से ज्ञात किया जा सकता है

दो धनात्मक संख्याओं a और b के लिए.

समांतर माध्य (A.M.) = $\frac{a+b}{2}$

गुणोत्तर माध्य (G.M.) = $\sqrt{ab}$

हरात्मक माध्य (H.M.) = $\frac{2ab}{a+b}$

$$AM \times HM = GM^2$$

जोड़ के लिए कुछ मानक सूत्र

- प्रथम 'n' प्राकृतिक संख्याओं का योग

  $1 + 2 + 3 + ...+ n = \frac{n(n+1)}{2}$

- प्रथम 'n' सम संख्याओं का योग

  $2 + 4 + 6........... + 2n = n(n + 1)$

- प्रथम 'n' विषम संख्याओं का योग

  $1 + 3 + 5 + ...(2n - 1) = n^2$

- प्रथम 'n' प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का योग

  $1^2 + 2^2 + 3^2 + ...+ n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

- प्रथम 'n' सम संख्याओं के वर्गों का योग

  $2^2 + 4^2 + 6^2 + ...+ (2n)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$

- प्रथम 'n' विषम संख्याओं के वर्गों का योग

  $1^2 + 3^2 + 5^2 + ...+ (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$

- प्रथम 'n' प्राकृतिक संख्याओं के घनों का योग

  $1^3 + 2^3 + 3^3 + ...+n^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

- प्रथम 'n' सम संख्याओं के घनों का योग

  $2^3 + 4^3 + 6^3 + ...+ (2n)^3 = 2n^2(n+1)^2$

- प्रथम 'n' विषम संख्याओं के घनों का योग

  $1^3 + 3^3 + 5^3 + ...+ (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$

निरंतर भिन्न श्रृंखला

$$\frac{1}{a \times b} = \frac{1}{(b-a)}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

Ex. $\frac{1}{1\times3} + \frac{1}{3\times5} + \frac{1}{5\times7} + ... + \frac{1}{199\times201}$

HINTS योग = $\frac{1}{\text{लगातार पदो के बीच अंतर}}\left[\frac{1}{\text{प्रथम पद}} - \frac{1}{\text{अंतिम पद}}\right]$

योग = $\frac{1}{3-1}\left[\frac{1}{1} - \frac{1}{201}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{201-1}{201}\right] = \frac{100}{201}$

Ex. $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72}$

HINTS हम दी गई श्रृंखला को इस रूप में लिख सकते हैं–

$\frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + \frac{1}{3\times4} + \frac{1}{4\times5} + \frac{1}{5\times6} + \frac{1}{6\times7} + \frac{1}{7\times8} + \frac{1}{8\times9}$

योग = $\frac{1}{2-1}\left[\frac{1}{1} - \frac{1}{9}\right] = \frac{8}{9}$

Ex. $\frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{4^2-1} + \frac{1}{6^2-1} + ... + \frac{1}{20^2-1}$

HINTS $a^2 - b^2 = (a-b) \times (a+b)$, का उपयोग करके, हम दी गई श्रृंखला को इस रूप में लिख सकते हैं–

$\frac{1}{1\times3} + \frac{1}{3\times5} + \frac{1}{5\times7} + ... + \frac{1}{19\times21}$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1} - \frac{1}{21}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{20}{21}\right] = \frac{10}{21}$

@apna_channels

Ex. $\frac{1}{7^2-3^2} + \frac{1}{13^2-3^2} + \frac{1}{19^2-3^2} + ... + \frac{1}{49^2-3^2}$

HINTS $a^2 - b^2 = (a-b) \times (a+b)$, का उपयोग करके, हम दी गई श्रृंखला को इस रूप में लिख सकते हैं–

$\frac{1}{4\times10} + \frac{1}{10\times16} + \frac{1}{16\times22} + ... + \frac{1}{46\times52}$

$= \frac{1}{6}\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{52}\right] = \frac{1}{6}\left[\frac{13-1}{52}\right] = \frac{1}{26}$

Ex. निम्नलिखित श्रृंखला का मान है:

$\frac{5}{2^2\cdot3^2} + \frac{7}{3^2\cdot4^2} + \frac{9}{4^2\cdot5^2} + \frac{11}{5^2\cdot6^2} + \frac{13}{6^2\cdot7^2} + \frac{15}{7^2\cdot8^2} + \frac{17}{8^2\cdot9^2} + \frac{19}{9^2\cdot10^2}$

HINTS इस पद $\frac{5}{2^2\cdot3^2}$ को $\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}$ में विभाजित किया जा सकता है।

इसी प्रकार का पैटर्न जारी रहेगा, इसलिए हम पूरी श्रृंखला को इस प्रकार लिख सकते हैं:

$\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^2} - \frac{1}{8^2} + \frac{1}{8^2} - \frac{1}{9^2} + \frac{1}{9^2} - \frac{1}{10^2}$

$= \frac{1}{2^2} - \frac{1}{10^2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{100}$

$= \frac{25-1}{100} = \frac{24}{100} = \frac{6}{25}$

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

यदि हर (D'). के दो लगातार पदों का अंतर अंश (N') में दिया गया है।

$$\text{योग} = \left[\frac{1}{\text{प्रथम पद}} - \frac{1}{\text{अंतिम पद}}\right]$$

$$= \left[\frac{1}{2^2} - \frac{1}{10^2}\right] = \frac{6}{25}$$

$$\frac{1}{a \times b \times c} = \frac{1}{(c-a)}\left[\frac{1}{ab} - \frac{1}{bc}\right]$$

Ex. निम्नलिखित श्रृंखला का मान ज्ञात कीजिए।

$$\frac{1}{1\times2\times3} + \frac{1}{2\times3\times4} + \frac{1}{3\times4\times5} + \ldots\ldots + \frac{1}{10\times11\times12}$$

HINTS

$$\text{योग} = \frac{1}{\dfrac{\text{अंतिम और प्रथम का अंतर}}{\text{हर D' के प्रत्येक पद की संख्या}}}\left[\frac{1}{\text{हर D' शृंखला के पहली दो संख्याओं का गुणनफल}} - \frac{1}{\text{हर D' शृंखला के अंतिम दो संख्याओं का गुणनफल}}\right]$$

$$\text{योग} = \frac{1}{(3-1)}\left[\frac{1}{1\times2} - \frac{1}{11\times12}\right]$$

$$= \frac{65}{264}$$

$$\frac{1}{a\times b\times c\times d} = \frac{1}{(d-a)}\left[\frac{1}{abc} - \frac{1}{bcd}\right]$$

Ex. निम्नलिखित श्रृंखला का मान ज्ञात कीजिए।

$$\frac{1}{1\times2\times3\times4} + \frac{1}{2\times3\times4\times5} + \frac{1}{3\times4\times5\times6} + \ldots + \frac{1}{22\times23\times24\times25}$$

HINTS

$$\text{योग} = \frac{1}{\dfrac{\text{अंतिम और प्रथम का अंतर}}{\text{हर D' के प्रत्येक पद की संख्या}}}\left[\frac{1}{\text{हर D' शृंखला के पहली तीन संख्याओं का गुणनफल}} - \frac{1}{\text{हर D' शृंखला के अंतिम तीन संख्याओं का गुणनफल}}\right]$$

$$\text{योग} = \frac{1}{4-1}\left[\frac{1}{1\times2\times3} - \frac{1}{23\times24\times25}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{6} - \frac{1}{13800}\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{2300-1}{13800}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{2299}{13800}\right] = \frac{2299}{41400}$$

☞ उन श्रृंखलाओं के गुणनफल का योग जिनके पद समांतर श्रेणी में हैं।

$$\text{योग} = \frac{\text{अंतिम पद} \times \text{आगे का पद} - \text{पहला पद} \times \text{अंतिम से पद}}{\text{अंतर} \times \text{सूत्र में पदों संख्या}}$$

Ex. $1\times2 + 2\times3 + 3\times4 + 4\times5 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 10\times11$

HINTS $\text{योग} = \dfrac{10\times11\times12 - 1\times2\times0}{1\times3} = 440$

Ex. $\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{99}\right)\left(1-\frac{1}{100}\right)\right]$

HINTS $\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{99}\right)\left(1-\frac{1}{100}\right)\right]$

$$= \frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{98}{99}\times\frac{99}{100} = \frac{2}{100} = \frac{1}{50}$$

प्रथम पद के N को अंतिम पद के D से विभाजित करके, अंतिम उत्तर सीधे प्राप्त किया जा सकता है।

Ex. $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{1}{9^2}\right)\left(1-\frac{1}{10^2}\right) = ?$

HINTS $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{1}{10^2}\right)$

$$= \left(\frac{2^2-1}{2^2}\right)\left(\frac{3^2-1}{3^2}\right)\left(\frac{4^2-1}{4^2}\right)\ldots\ldots\left(\frac{10^2-1}{10^2}\right)$$

$$= \frac{3}{4}\times\frac{8}{9}\times\frac{15}{16}\times\ldots\ldots\ldots\times\frac{99}{100}$$

$$= \frac{3}{4}\times\frac{8}{9}\times\frac{15}{16}\times\frac{24}{25}\times\frac{35}{36}\times\frac{48}{49}\times\frac{63}{64}\times\frac{80}{81}\times\frac{99}{100} = \frac{11}{20}$$

पद	समान्तर श्रेणी	गुणोत्तर श्रेणी	हरात्मक श्रेणी
परिभाषा	शब्दों के बीच स्थिर अंतर	पदों के बीच स्थिर अनुपात	समांतर श्रेणी का व्युत्क्रम
सामान्य पद	$a_n = a + (n-1)d$	$a_n = ar^{n-1}$	$a_n = \dfrac{1}{a+(n-1)d}$
प्रथम 'n' पदों का योग	$S_n = \dfrac{n}{2}[2a+(n-1)d]$	• $S_n = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$ $(r\neq1, r>1)$ • $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ $(r\neq1, r<1)$	कोई मानक सूत्र नहीं [समांतर श्रेणी को व्युत्क्रम में बदलना]
अनंत योग	परिभाषित नहीं होगा (जब तक d = 0 न हो)	$S_\infty = \dfrac{a}{1-r}$ $(-1<r<1)$	
अंत से 'n' पदों का योग	$a_n = l - (n-1)d$	$a_n = \dfrac{1}{r^n - 1}$	समांतर श्रेणी के व्युत्क्रम पर आधारित
दो पदों के बीच का माध्य	समान्तर माध्य (AM)$=\dfrac{a+b}{2}$	गुणोत्तर माध्य (GM)$=\sqrt{ab}$	हरात्मक माध्य (HM)$=\dfrac{2ab}{a+b}$

@apna_channels

Selected हैं Selection दिलाएंगे

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

अध्याय 07

सरलीकरण

BODMAS का नियम

यह नियम बीजगणितीय या संख्यात्मक व्यंजकों को हल करने का मूल सिद्धांत है।

हल करने का क्रम		
B	कोष्ठक	5× (6 + 2) = 5 × 8 = 40
O	का	10 of 2^3 =10 × 8 = 80
D	भाग	20 + 16 ÷ 4 = 20 + 4 = 24
M	गुणा	15 + 4 × 2 = 15 + 8 = 23
A	जोड़	10 × 2 + 7 = 20 + 7 = 27
S	घटाव	10 × 2 – 7 = 20 – 7 = 13

कोष्ठक के प्रकार एवं हल करने का क्रम	
–	रेखा कोष्ठक
( )	छोटा कोष्ठक
{ }	मंझला कोष्ठक
[ ]	बड़ा कोष्ठक

Ex. दिए गए व्यंजक को सरल कीजिए।

$4 \times 7 - 3\{7 \times 4 \div (6 \times 2)\}$

HINTS $4 \times 7 - 3\{7 \times 4 \div (6 \times 2)\}$

$= 28 - 3\{7 \times 4 \div 12\}$

$= 28 - 3 \times \frac{7}{3} = 21$

Ex. दिए गए व्यंजक को सरल कीजिए।

$3\frac{1}{5}$ का $2\frac{3}{4} \div \frac{11}{3} + \left(2\frac{1}{5} \div 1\frac{2}{5}\right.$ का $\left.1\frac{3}{7} - 2\frac{1}{3}\right)$

HINTS $3\frac{1}{5}$ का $2\frac{3}{4} \div \frac{11}{3} + \left(2\frac{1}{5} \div 1\frac{2}{5}\right.$ का $\left.1\frac{3}{7} - 2\frac{1}{3}\right)$

$= \frac{16}{5}$ का $\frac{11}{4} \div \frac{11}{3} + \left(\frac{11}{5} \div \frac{7}{5} \text{ of } \frac{10}{7} - \frac{7}{3}\right)$

$= \frac{16}{5}$ का $\frac{11}{4} \div \frac{11}{3} + \left(\frac{11}{10} - \frac{7}{3}\right)$

$= \frac{44}{5} \div \frac{11}{3} + \frac{(-37)}{30}$

$= \frac{12}{5} - \frac{37}{30} = \frac{35}{30} = \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$

Ex. दिए गए व्यंजक को सरल कीजिए।

$25 - [16 - \{14 - (18 - \overline{8+3})\}]$

HINTS $25 - [16 - \{14 - (18 - \overline{8+3})\}]$

$= 25 - [16 - \{14 - (18 - 11)\}]$

$= 25 - [16 - \{14 - 7\}] = 25 - [16 - 7]$

$= 25 - 9 = 16$

Ex. दिए गए व्यंजक को सरल कीजिए।

$133 \div 19 \times 3 - 48 \times 2 \div 24 + 841 \div [\{\overline{45 - 16}\}]$

HINTS $133 \div 19 \times 3 - 48 \times 2 \div 24 + 841 \div [\{\overline{45 - 16}\}]$

$= 21 - 4 + 841 \div 29$

$= 17 + 29 = 46$

Ex. निम्नलिखित का मान है।

$5\frac{1}{4} - \left[3\frac{1}{2} - \left\{\frac{5}{6} - \left(\frac{3}{5} \times \frac{1}{10} \div \frac{4}{15}\right)\right\}\right]$

HINTS $5\frac{1}{4} - \left[3\frac{1}{2} - \left\{\frac{5}{6} - \left(\frac{3}{5} \times \frac{1}{10} \div \frac{4}{15}\right)\right\}\right]$

$= \frac{21}{4} - \left[\frac{7}{2} - \left\{\frac{5}{6} - \frac{9}{40}\right\}\right] = \frac{21}{4} - \left[\frac{7}{2} - \frac{73}{120}\right]$

$= \frac{21}{4} - \frac{347}{120}$

$= \frac{283}{120} = 2\frac{43}{120}$

Ex. दिए गए व्यंजक को सरल कीजिए।

$$\frac{\left(2\frac{1}{7} + 6\frac{1}{7}\right) \div \frac{9}{7}}{1\frac{1}{9} \div \left\{\frac{7}{9} + \left(\frac{4}{9} \div \frac{4}{3}\right)\right\}}$$

HINTS

$$\frac{\left(\frac{15}{7} + \frac{43}{7}\right) \div \frac{9}{7}}{\frac{10}{9} \div \left\{\frac{7}{9} + \left(\frac{4}{9} \times \frac{3}{4}\right)\right\}} = \frac{\frac{58}{7} \div \frac{9}{7}}{\frac{10}{9} \div \left\{\frac{7}{9} + \frac{3}{9}\right\}} = \frac{\frac{58}{9}}{\frac{10}{9} \div \frac{10}{9}} = \frac{58}{9}$$

Ex. $\left(1\frac{1}{3} \div 2\frac{6}{7}\right.$ का $\left.5\frac{3}{5}\right) \times \left(6\frac{2}{5} \div 4\frac{1}{2}\right.$ का $\left.5\frac{1}{3}\right) \div \left(\frac{3}{4} \times 2\frac{2}{3} \div \frac{5}{9}\right.$ का $\left.1\frac{1}{5}\right)$

= k, k का मान ज्ञात कीजिए?

HINTS

$\left(1\frac{1}{3} \div 2\frac{6}{7}\right.$ का $\left.5\frac{3}{5}\right) \times \left(6\frac{2}{5} \div 4\frac{1}{2}\right.$ का $\left.5\frac{1}{3}\right) \div \left(\frac{3}{4} \times 2\frac{2}{3} \div \frac{5}{9}\right.$ का $\left.1\frac{1}{5}\right) = k$

$\Rightarrow \left(\frac{4}{3} \div \frac{20}{7}\right.$ का $\left.\frac{28}{5}\right) \times \left(\frac{32}{5} \div \frac{9}{2}\right.$ का $\left.\frac{16}{3}\right) \div \left(\frac{3}{4} \times \frac{8}{3} \div \frac{5}{9}\right.$ का $\left.\frac{6}{5}\right) = k$

$\Rightarrow \left(\frac{4}{3} \times \frac{1}{16}\right) \times \left(\frac{32}{5} \times \frac{1}{24}\right) \div \left(\frac{3}{4} \times \frac{8}{3} \times \frac{3}{2}\right) = k$

$\Rightarrow \frac{1}{12} \times \frac{4}{15} \times \frac{1}{3} = k \Rightarrow \frac{1}{45 \times 3} = k$

$\Rightarrow k = \frac{1}{135} = 0.0074$

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

बीजगणितीय सूत्र पर आधारित

$(a+b)^2$ = a^2+b^2+2ab = $(a-b)^2+4ab$

$(a-b)^2$ = a^2+b^2-2ab = $(a+b)^2-4ab$

- $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$
- $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$
- $ab=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$
- $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

a^4-b^4 = $(a^2+b^2)(a^2-b^2)$ = $(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$

a^4+b^4 = $(a^2-b^2)^2+2a^2b^2$ = $(a^2+b^2)^2-2a^2b^2$

- $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$
- $(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$
- $(a+b)^3+(a-b)^3=2a^3+6ab^2$
- $(a+b)^3-(a-b)^3=2b^3+6a^2b$

a^3+b^3 = $(a+b)(a^2-ab+b^2)$ = $(a+b)[(a+b)^2-3ab]$ = $(a+b)^3-3ab(a+b)$

a^3-b^3 = $(a-b)(a^2+ab+b^2)$ = $(a-b)[(a-b)^2+3ab]$ = $(a-b)^3+3ab(a-b)$

$a^3+b^3+c^3-3abc$

F-1 $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

F-2 $(a+b+c)[(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)]$

F-3 $\frac{1}{2}(a+b+c)[3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2]$

F-4 $\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$

Ex. सरल करें

$$\frac{(612+388)^2+(612-388)^2}{(612\times612)+(388\times388)}=?$$

HINTS हम जानते है कि

$(x+y)^2+(x-y)^2=2(x^2+y^2)$

$$\frac{(612+388)^2+(612-388)^2}{(612\times612)+(388\times388)}=\frac{2\times[(612)^2+(388)^2]}{(612)^2+(388)^2}=2$$

Ex. दिए गए व्यंजक को सरल कीजिए।

$$\frac{((32)^4-1)}{33\times31\times(2^{10}+1)}$$

HINTS $\frac{(32^2-1)(32^2+1)}{33\times31\times(2^{10}+1)}$

$\{\because a^2-b^2=(a+b)(a-b)\}$

$$\Rightarrow\frac{(32+1)(32-1)(32^2+1)}{33\times31\times(2^{10}+1)}$$

$$=\frac{33\times31\times(32^2+1)}{33\times31\times(2^{10}+1)}$$

$$=\frac{32^2+1}{(2^{10}+1)}\quad\left(\because\begin{matrix}2^5=32\\2^{10}=32^2\end{matrix}\right)$$

$$=\frac{32^2+1}{32^2+1}=1$$

Ex. सरल करें

$$\frac{(8.3)^3+(9.2)^3+(6.1)^3-3\times8.3\times9.2\times6.1}{(8.3)^2+(9.2)^2+(6.1)^2-8.3\times9.2-9.2\times6.1-6.1\times.8.3}$$

HINTS हम जानते है कि

$$\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}=(a+b+c)$$

$$\therefore\frac{(8.3)^3+(9.2)^3+(6.1)^3-3\times8.3\times9.2\times6.1}{(8.3)^2+(9.2)^2+(6.1)^2-8.3\times9.2-9.2\times6.1-6.1\times.8.3}$$

$= 8.3 + 9.2 + 6.1$

$= 23.6$

Ex. $\frac{(453\times453\times453-383\times383\times383)}{(453\times383+383\times383+453\times453)}$ का मान ज्ञात करें

HINTS हम जानते है कि

$$\frac{a^3-b^3}{a^2+b^2+ab}=(a-b)$$

$$\therefore\frac{453\times453\times453-383\times383\times383}{453\times383+383\times383+453\times453}$$

$$=\frac{(453)^3-(383)^3}{(383)^2+(453)^2+453\times383}$$

$= 453 - 383 = 70$

Ex. दिए गए व्यंजक को सरल कीजिए।

$$\frac{(80\times80\times80)+(70\times70\times70)+(50\times50\times50)-840000}{6400+4900+2500-5600-3500-4000}$$

HINTS हम जानते है कि

$$\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}$$

$= a + b + c$

$$\frac{(80\times80\times80)+(70\times70\times70)+(50\times50\times50)-840000}{6400+4900+2500-5600-3500-4000}$$

$$=\frac{(80)^3+(70)^3+(50)^3-3\times80\times70\times50}{(80)^2+(70)^2+(50)^2-80\times70-70\times50-50\times80}$$

$= (80 + 70 + 50) = 200$

@apna_channels
Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

भिन्नों की तुलना

उचित भिन्न

भिन्न का अंश हर से छोटा है या भिन्न का मान 1 से कम है।

$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{7}{11}, \frac{12}{23}$ इत्यादि

तुलना करने पर :

चरण 1: प्रत्येक भिन्न के अंश (N') और हर (D') का अंतर लें।

चरण 2: अंतर समान होना चाहिए। यदि दिया गया अंतर समान नहीं है, तो अंतरों का लघुत्तम समापवर्त्य लें और प्रत्येक भिन्न को निम्न प्रकार से गुणा करें।

परिणामी भिन्न = $\frac{N' \times (LCM \div N' \text{ और } D' \text{ के बीच का अंतर})}{D' \times (LCM \div N' \text{ और } D' \text{ के बीच का अंतर})}$

चरण 3: छोटे अंश (N') वाली भिन्न सबसे छोटी होगी और बड़े अंश (N') वाली भिन्न सबसे बड़ी होगी।

Ex. (i) $\frac{7}{8} > \frac{6}{7}$ (ii) $\frac{1091}{1093} > \frac{1087}{1089}$

अनुचित भिन्न

भिन्न का अंश हर से बड़ा है या भिन्न का मान 1 से अधिक है।

$\frac{3}{2}, \frac{13}{4}, \frac{6}{5}, \frac{27}{17}$ इत्यादि

तुलना करने पर :

चरण 1: प्रत्येक भिन्न के अंश (N') और हर (D') का अंतर लें।

चरण 2: अंतर समान होना चाहिए। यदि दिया गया अंतर समान नहीं है, तो अंतरों का लघुत्तम समापवर्त्य लें और प्रत्येक भिन्न को निम्न प्रकार से गुणा करें।

परिणामी भिन्न = $\frac{N' \times (LCM \div N' \text{ और } D' \text{ के बीच का अंतर})}{D' \times (LCM \div N' \text{ और } D' \text{ के बीच का अंतर})}$

चरण 3: छोटे अंश(N') वाली भिन्न सबसे बड़ी होगी और बड़े अंश (N') वाली भिन्न सबसे छोटी होगी।

Ex. (i) $\frac{8}{7} < \frac{7}{6}$ (ii) $\frac{1093}{1091} < \frac{1089}{1087}$

"अनुचित भिन्न सदैव उचित भिन्न से बड़ी होती है।"

जब हर बराबर हो

बड़े अंश वाली भिन्न सबसे बड़ी होगी और इसके विपरीत।

Ex. तुलना करे: $\frac{2}{17}, \frac{14}{17}, \frac{9}{17}, \frac{25}{17}$

HINTS

$\frac{25}{17} > \frac{14}{17} > \frac{9}{17} > \frac{2}{17}$ या $\frac{2}{17} < \frac{9}{17} < \frac{14}{17} < \frac{25}{17}$

जब अंश बराबर हो

छोटे हर वाली भिन्न सबसे बड़ी होगी और इसके विपरीत।

Ex. तुलना करे: $\frac{9}{7}, \frac{9}{5}, \frac{9}{13}, \frac{9}{8}$

HINTS

$\frac{9}{5} > \frac{9}{7} > \frac{9}{8} > \frac{9}{13}$ या $\frac{9}{13} < \frac{9}{8} < \frac{9}{7} < \frac{9}{5}$

यदि हम अंश (N') को बढ़ाएँ और हर (D') को घटाएँ, तो परिणामी भिन्न बड़ा होगा।

Ex. (i) $\frac{3}{7} < \frac{5}{6}$ (ii) $\frac{101}{236} < \frac{103}{234}$ (iii) $\frac{339}{237} < \frac{347}{231}$

यदि हम अंश (N') को घटाएँ और हर (D') को बढ़ाएँ तो परिणामी भिन्न छोटा होगा।

Ex. (i) $\frac{7}{11} > \frac{6}{13}$ (ii) $\frac{101}{236} > \frac{99}{247}$ (iii) $\frac{334}{229} > \frac{329}{235}$

@apna_channels

वज्र गुणज विधि

Ex. निम्नलिखित में से सबसे बड़ा भिन्न ज्ञात करें: $\frac{8}{11}, \frac{15}{19}, \frac{4}{5}, \frac{13}{21}$

HINTS

$\frac{8}{11} \times \frac{15}{19} \Rightarrow 152 < 165 \Rightarrow \frac{8}{11}$ (निष्कासित)

$\frac{15}{19} \times \frac{4}{5} \Rightarrow 75 < 76 \Rightarrow \frac{15}{19}$ (निष्कासित)

$\frac{4}{5} \times \frac{13}{21} \Rightarrow 84 > 65 \Rightarrow \frac{13}{21}$ (निष्कासित)

$\therefore \frac{4}{5}$ सबसे बड़ा भिन्न है।

Ex. निम्नलिखित में से सबसे छोटा भिन्न ज्ञात कीजिए: $\frac{5}{11}, \frac{7}{12}, \frac{8}{13}, \frac{9}{17}$

HINTS

$\frac{5}{11} \times \frac{7}{12} \Rightarrow 60 < 77 \Rightarrow \frac{7}{12}$ (निष्कासित)

$\frac{5}{11} \times \frac{8}{13} \Rightarrow 65 < 88 \Rightarrow \frac{8}{13}$ (निष्कासित)

$\frac{5}{11} \times \frac{9}{17} \Rightarrow 85 < 99 \Rightarrow \frac{9}{17}$ (निष्कासित)

$\therefore \frac{5}{11}$ सबसे छोटा भिन्न है।

यदि हम अंश (N') और हर (D') को एक साथ बढ़ाते हैं या अंश (N') और हर (D') को एक साथ घटाते हैं, तो परिणामी अंश में वृद्धि या कमी हो सकती है या इसमें कोई परिवर्तन नहीं होगा, जिसे प्रतिशत परिवर्तन का उपयोग करके निर्धारित किया जा सकता है।

Ex. तुलना करे: $\frac{123}{237}$ & $\frac{137}{267}$

HINTS

$\frac{123}{237} \rightarrow \frac{137}{267}$ (अंश: $+14 \approx 11\%$, हर: $+30 \approx 13\%$)

यहाँ हर D' % बढते क्रम में है।

$\Rightarrow$ परिणामी भिन्न छोटा होगा।

$\Rightarrow \frac{123}{237} > \frac{137}{267}$

Ex. तुलना करे: $\frac{247}{437}$ & $\frac{228}{387}$

HINTS

$\frac{247}{437} \rightarrow \frac{228}{387}$ (अंश: $-19 < 10\%$, हर: $-50 > 10\%$)

यहाँ हर D' % घटते क्रम में है।

$\Rightarrow$ परिणामी भिन्न बड़ा होगा।

$\Rightarrow \frac{247}{437} < \frac{228}{387}$

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. तुलना करें:

$\frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{13}{14}, \frac{11}{12}$

HINTS प्रत्येक भिन्न में N^r और D^r का अंतर समान है, अर्थात्, छोटी N^r वाली भिन्न अर्थात् $\frac{4}{5}$ सबसे छोटी होगी और अधिक N^r वाली भिन्न अर्थात् $\frac{13}{14}$ सबसे बड़ी होगी।

इसलिए, $\frac{4}{5} < \frac{6}{7} < \frac{11}{12} < \frac{13}{14}$ 'या' $\frac{13}{14} > \frac{11}{12} > \frac{6}{7} > \frac{4}{5}$

Ex. निम्न भिन्नों में सबसे बड़े और सबसे छोटे मान के बीच का अंतर ज्ञात कीजिए

$\frac{5}{11}, \frac{5}{7}, \frac{3}{8}, \frac{6}{11}$

HINTS (अंतर) $\frac{5}{11} \to 6, \quad \frac{5}{7} \to 2, \quad \frac{3}{8} \to 5, \quad \frac{6}{11} \to 5$

यहाँ अंश (N^r)और हर (D^r) का अंतर समान नहीं है, हम 6, 2, 5 और 5 का ल.स.प. = 30 लेकर उन्हें बराबर कर देते हैं।

परिणामी भिन्न =

$\frac{5\times(30\div6)}{11\times(30\div6)}, \frac{5\times(30\div2)}{7\times(30\div2)}, \frac{3\times(30\div5)}{8\times(30\div5)}, \frac{6\times(30\div5)}{11\times(30\div5)}$

$= \frac{5\times5}{11\times5}, \frac{5\times15}{7\times15}, \frac{3\times6}{8\times6}, \frac{6\times6}{11\times6}$

[अब, अंश (N^r)और हर (D^r) के बीच अंतर समान है]

अधिकतम = $\frac{5}{7}$, न्यूनतम = $\frac{3}{8}$

$\therefore$ अधिकतम – न्यूनतम = $\frac{5}{7} - \frac{3}{8} = \frac{40-21}{56} = \frac{19}{56}$

Ex. तुलना करें: $\frac{23}{18}, \frac{37}{32}$

HINTS प्रत्येक भिन्न में अंश (N^r)और हर (D^r) का अंतर समान (5) है, अर्थात, छोटे N^r वाला भिन्न सबसे बड़ा होगा और इसके विपरीत।

इस प्रकार, $\frac{23}{18} > \frac{37}{32}$

Ex. सबसे छोटा और सबसे बड़ा भिन्न ज्ञात करें

$\frac{16}{15}, \frac{20}{19}, \frac{25}{24}, \frac{35}{34}$

HINTS सबसे बड़ा = $\frac{16}{15}$ और सबसे छोटा = $\frac{35}{34}$

Ex. सबसे छोटा और सबसे बड़ा भिन्न ज्ञात करें

$\frac{15}{16}, \frac{8}{3}, \frac{11}{12}, \frac{7}{8}$

HINTS अनुचित भिन्न > उचित भिन्न

$\therefore$ $\frac{8}{3}$ अनुचित भिन्न है, इसलिए, सबसे बड़ी = $\frac{8}{3}$ और

सबसे छोटा = $\frac{7}{8}$ (क्योंकि अंतर समान है)

Ex. सबसे छोटा और सबसे बड़ा भिन्न ज्ञात करें

$\frac{3}{5}, \frac{7}{9}, \frac{13}{15}, \frac{17}{19}$

HINTS प्रत्येक भिन्न में अंश (N^r)और हर (D^r) का अंतर समान (2) है, अर्थात, छोटे N^r वाला भिन्न सबसे बड़ा होगा और इसके विपरीत।

सबसे बड़ा = $\frac{17}{19}$, सबसे छोटा = $\frac{3}{5}$

@apna_channels

लैडर फ्रैक्शन

लैडर फ्रैक्शन

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}}$$

चरण-1: सबसे पहले अंतिम पद लिखे $\left(\frac{1}{3}\right)$

चरण-2: अंतिम पद में पहले '**1**' लिखें और फिर '**3**' लिखें

1 3

चरण-3: प्रश्न में जितनी बार '1' दिया गया है, उसके ठीक पहले वाली संख्या को अगली संख्या में जोड़ा जाएगा।

3 + 4   4 + 7   7 + 11

1   3   4   7   11   18

चरण-4: और अंत में, अंतिम संख्या को उसके ठीक पहले वाली संख्या के साथ भिन्न के रूप में लिखें।

आवश्यक उत्तर = $\frac{18}{11}$

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}}$$

चरण-1: सबसे पहले अंतिम पद लिखे $\left(\frac{1}{3}\right)$

चरण-2: अंतिम पद में पहले '**1**' लिखें और फिर '**3**' लिखें

1 3

चरण-3: प्रश्न में जितनी बार '1' दिया गया है, उसके ठीक पहले वाली संख्या को अगली संख्या में जोड़ा जाएगा।

3 + 4   4 + 7

1   3   4   7   11

चरण-4: और अंत में, अंतिम संख्या से ठीक पहले वाली संख्या और अंतिम संख्या को भिन्न के रूप में लिखें।

आवश्यक उत्तर = $\frac{7}{11}$

Selected हैं Selection दिलाएंगे

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए:

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{3}}}}}$$

HINTS **चरण-1:** सबसे पहले अंतिम पद लिखे $\left(\frac{2}{3}\right)$

चरण-2: अंतिम पद में पहले '2' लिखें और फिर '3' लिखें

2 3

चरण-3: प्रश्न में जितनी बार '1' दिया गया है, उसके ठीक पहले वाली संख्या को अगली संख्या में जोड़ा जाएगा।

5 + 3, 8 + 5, 13 + 8, 21 + 13

2 3 5 8 13 21 34

चरण-4: और अंत में, अंतिम संख्या को उसके ठीक पहले वाली संख्या के साथ भिन्न के रूप में लिखें।

आवश्यक उत्तर = $\frac{34}{21}$

Ex. निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए:

$$1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{2}{3}}}}$$

HINTS **चरण-1:** सबसे पहले अंतिम पद लिखें $\left(\frac{2}{3}\right)$

चरण-2: अंतिम पद में पहले '2' लिखें और फिर '3' लिखें

2 3

चरण-3: फिर पिछली संख्या से अगली संख्या को तुरंत घटाएँ।

1 – 3, –2 – 1, –3 – (–2)

2 3 1 –2 –3 –1

चरण-4: और अंत में, अंतिम संख्या को उसके ठीक पहले वाली संख्या के साथ भिन्न के रूप में लिखें।

आवश्यक उत्तर = $\frac{-1}{-3}=\frac{1}{3}$

Ex. यदि $2 = x+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2}}}$ है, तो x का मान बराबर है:

HINTS

×5+1, ×1+2, ×x+11

1 2 11 13 $13x+11$

भिन्न → $\frac{13x+11}{13}=\frac{2}{1}$

$\Rightarrow 13x + 11 = 26$

$\Rightarrow x = \frac{15}{13}$

Ex. निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए:

$$1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4}}}$$

HINTS **चरण-1:** सबसे पहले अंतिम पद लिखें $\left(\frac{1}{4}\right)$

चरण-2: अंतिम पद में पहले '1' लिखें और फिर '4' लिखें

1 4

चरण-3: फिर पिछली संख्या से अगली संख्या को तुरंत घटाएँ।

×2+1, ×3+4, ×1+9

1 4 9 31 40

चरण-4: और अंत में, अंतिम संख्या को उसके ठीक पहले वाली संख्या के साथ भिन्न के रूप में लिखें।

आवश्यक भिन्न = $\frac{40}{31}$

Ex. निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए:

$$4-\cfrac{5}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4}}}}$$

HINTS

×2+1, ×3+4, ×1+9, ×4–31

1 4 9 31 $\frac{40}{5}=8$ $(32-31)=1$

आवश्यक भिन्न = $\frac{1}{8}$

Ex. निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए:

$$3+\cfrac{5}{5+\cfrac{3}{1+\cfrac{7}{5}}}$$

HINTS

×1+7, ×5+5, ×3+4

7 5 $\frac{12}{3}=4$ $\frac{25}{5}=5$ 19

आवश्यक भिन्न = $\frac{19}{5}$

Ex. यदि $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}}}=\frac{5}{8}$ है, तो x का मान क्या है?

HINTS

$x+x+1$, $x+1+2x+1$

1 x $x+1$ $2x+1$ $3x+2$

आवश्यंक भिन्न → $\frac{2x+1}{3x+2}=\frac{5}{8}$

$\Rightarrow 16x + 8 = 15x + 10$

$\Rightarrow x = 2$

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. यदि $\dfrac{1}{a+\dfrac{1}{b+\dfrac{1}{c+\dfrac{1}{d}}}}=\dfrac{17}{60}$, a + b + c + d का मान ज्ञात करें

HINTS
$$\begin{array}{l} 17)\,60\,(3 = a \\ \quad\;\; 51 \\ \quad\;\; 9)\,17\,(1 = b \\ \qquad\;\; 9 \\ \qquad\;\; 8)\,9\,(1 = c \\ \qquad\quad\; 8 \\ \qquad\quad\; 1)\,8\,(8 = d \\ \qquad\qquad 8 \\ \qquad\qquad 0 \end{array}$$

$\therefore$ a + b + c + d = 3 + 1 + 1 + 8 = 13

वैकल्पिक विधि

$\dfrac{60}{17}=3+\dfrac{9}{17} \Rightarrow a=3$

$\dfrac{17}{9}=1+\dfrac{8}{9} \Rightarrow b=1$

$\dfrac{9}{8}=1+\dfrac{1}{8} \Rightarrow c=1$

$\dfrac{8}{1}=8 \Rightarrow d=8$

$\therefore$ a + b + c + d = 3 + 1 + 1 + 8 = 13

Ex. यदि $\dfrac{45}{53}=\dfrac{1}{a+\dfrac{1}{b+\dfrac{1}{c-\dfrac{2}{5}}}}$, जहाँ a, b और c धनात्मक पूर्णांक हैं, तो (4a – b + 3c) का मान क्या है?

HINTS $\dfrac{53}{45}=1+\dfrac{8}{45} \Rightarrow a=1$

$\dfrac{45}{8}=5+\dfrac{5}{8} \Rightarrow b=5$

$\dfrac{8}{5}=2-\dfrac{2}{5} \Rightarrow c=2$

$\therefore 4a-b+3c=4\times1-5+3\times2=5$

Ex. यदि $\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{y+\dfrac{2}{z+\dfrac{1}{4}}}}=\dfrac{29}{79}$, जहाँ x, y और z प्राकृतिक संख्याएँ हैं, तो (2x + 3y – z) का मान है:

HINTS $\dfrac{79}{29}=2+\dfrac{21}{29} \Rightarrow x=2$

$\dfrac{29}{21}=1+\dfrac{2\times4}{21} \Rightarrow y=1$

$\dfrac{21}{4}=5+\dfrac{1}{4} \Rightarrow z=5$

$\therefore 2x+3y-z=4+3-5=2$

बार पर आधारित

Ex. 0.7777......... ∞ = ?

HINTS माना, x = 0.777............∞ ...(i)

दोनों तरफ 10 से गुणा करने पर,

10x = 7.777............∞ ...(ii)

(i) को (ii) से घटाएँ

$9x=7 \Rightarrow x=\dfrac{7}{9}=0.\overline{7}$

Ex. 0.535353............∞ = ?

HINTS माना, x = 0.535353............∞ ...(i)

दोनों तरफ 100 से गुणा करने पर,

100x = 53.535353............∞ ...(ii)

(i) को (ii) से घटाएँ

$99x=53 \Rightarrow x=\dfrac{53}{99}$

Ex. 0.28383............∞ = ?

HINTS माना, x = 0.2838383............∞

10 x = 2.838383................∞ ....(i)

1000 x = 283.838383.........∞ ....(ii)

(i) को (ii) से घटाएँ

$990x=281 \Rightarrow x=\dfrac{281}{990}\;\; 0.2\overline{83}$

आवर्ती दशमलव को भिन्न में बदलने के लिए उपयोग करें:

$$\frac{\text{मूल संख्या - (गैर-दोहराव वाली संख्या)}}{\text{दशमलव बिंदु के बाद जितनी बार दोहराव वाली संख्याएँ हैं, उतनी बार 9 और जितनी बार गैर-दोहराव वाली संख्याएँ हैं, उतनी बार 0}}$$

Ex. $11.\overline{4}+22.5\overline{67}-33.5\overline{9}$ का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS $\left(11+\dfrac{4}{9}\right)+\left(22+\dfrac{567-5}{990}\right)-\left(33+\dfrac{59-5}{90}\right)$

$=\dfrac{4}{9}+\dfrac{562}{990}-\dfrac{54}{90}=\dfrac{440+562-594}{990}=\dfrac{1002-594}{990}$

$=\dfrac{408}{990}=0.4\overline{12}$

वैकल्पिक विधि

अंकों की संख्या जिन पर कोई बार नहीं है (1)		उन अंकों का LCM जिन पर बार रखा गया है LCM (1, 2) = 2	उत्तर की सटीकता के लिए न्यूनतम 2 अंक
11.	4	44	44
22.	5	67	67
– 33.	5	99	99
00.	4	12	12

$\Rightarrow 11.\overline{4}+22.5\overline{67}-33.5\overline{9}=0.4\overline{12}$

आवर्ती दशमलव के जोड़/घटाव के प्रश्नों में, जिस अधिकतम संख्या पर कोई बार नहीं है और जिन संख्याओं पर बार है उनका लघुत्तम समापवर्त्य (LCM) विकल्प में मेल खाता है, वही सही उत्तर होगा। जैसे उपरोक्त उदाहरण में, अधिकतम संख्या 1 पर दशमलव के बाद बार नहीं है, अतः सही विकल्प में भी दशमलव के बाद उसी संख्या पर बार नहीं होगी और जिन संख्याओं पर बार है उनका लघुत्तम समापवर्त्य (2, 1) = 2 है, अतः सही विकल्प में 2 संख्याओं पर बार होनी चाहिए।

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. यदि $A = 0.3\overline{12}, B = 0.4\overline{15}$ और $C = 0.30\overline{9}$ है, तो A + B + C का मान क्या है?

HINTS $A + B + C = \frac{312-3}{990} + \frac{415-4}{990} + \frac{309-30}{900}$

$= \frac{309+411}{990} + \frac{279}{900} = \frac{720}{990} + \frac{279}{900}$

$= \frac{80}{110} + \frac{31}{100} = \frac{800+341}{1100} = \frac{1141}{1100}$

वैकल्पिक विधि

$A + B + C = 0.3\overline{12} + 0.4\overline{15} + 0.30\overline{9}$

अंकों की संख्या जिन पर कोई बार नहीं है (2)		उन अंकों का LCM जिन पर बार रखा गया है LCM (1, 2) = 2	उत्तर की सटीकता के लिए न्यूनतम 2 अंक
0.	31	21	21
0.	41	51	51
+ 0.	30	99	99
1.	03	72	71

$\therefore \quad A + B + C = 0.3\overline{12} + 0.4\overline{15} + 0.30\overline{9} = 1.03\overline{72}$

$= \frac{10372-103}{9900} = \frac{10269}{9900} = \frac{1141}{1100}$

Ex. निम्नलिखित का मान है

$0.4\overline{6} + 0.7\overline{23} - 0.3\overline{9} \times 0.\overline{7}$

HINTS $0.4\overline{6} + 0.7\overline{23} - 0.3\overline{9} \times 0.\overline{7}$

$= \frac{46-4}{90} + \frac{723-7}{990} - \frac{(39-3)}{90} \times \frac{7}{9}$

$= \frac{42}{90} + \frac{716}{990} - \frac{36}{90} \times \frac{7}{9}$

$= \frac{42}{90} + \frac{716}{990} - \frac{28}{90}$

$= \frac{14}{90} + \frac{716}{990} = \frac{154+716}{990}$

$= \frac{870}{990} = 0.\overline{87}$

Ex. $\bar{2}.75 + \bar{3}.78 = ?$

HINTS $-2 + 0.75 - 3 + 0.78$

$= -5 + 1.53$

$= -4 + 0.53 = \bar{4}.53$

Ex. यदि $0.a\overline{b} + 0.b\overline{a} = \frac{5}{9}$, a + b का मान क्या है?

HINTS $\frac{ab-a}{90} + \frac{ba-b}{90} = \frac{50}{90}$

$\Rightarrow 10a + b - a + 10b + a - b = 50$

$\Rightarrow 10(a + b) = 50$

$\Rightarrow a + b = 5$

सारांश

$0.\overline{7} = \frac{7}{9}$	$0.2\overline{3} = \frac{21}{90}$	$0.1\overline{25} = \frac{124}{990}$
$0.\overline{56} = \frac{56}{99}$	$0.5\overline{6} = \frac{51}{90}$	$0.1\overline{34} = \frac{133}{990}$
$0.\overline{125} = \frac{125}{999}$	$0.12\overline{5} = \frac{113}{900}$	$\bar{1}.32 = -0.68$

$a\frac{b}{c}$ प्रकार की संख्याएँ

यदि किसी संख्या का हर गुणक के समान हो

Ex. $999\frac{994}{999} \times 999 = ?$ (समान)

HINTS 994 में 5 जोड़ने पर यह 999 हो जाता है।

$999\frac{(994+5)}{999} \times 999 = (999 + 1) \times 999 = 999000$

अब, 5 घटाने पर

$999000 - 5 = 998995$

यदि अंश और हर के बीच अंतर 1 है

Ex. $\frac{1}{8} + 999\frac{791}{792} \times 99 = ?$

HINTS

यहाँ 792 − 791 = 1 तो हम लिख सकते है $\frac{791}{792} = 1 - \frac{1}{792}$

$\Rightarrow \frac{1}{8} + \left(999 + 1 - \frac{1}{792}\right) \times 99$

$= \frac{1}{8} + 99000 - \frac{99}{792} = \frac{1}{8} + 99000 - \frac{1}{8} = 99000$

श्रृंखला प्रकार

Ex. $999\frac{1}{5} + 999\frac{2}{5} + \ldots\ldots\ldots + 999\frac{4}{5} = ?$

HINTS

$999\frac{1}{5} + 999\frac{2}{5} + \ldots\ldots\ldots + 999\frac{4}{5} = 999 \times 4 + \left(\frac{1+2+3+4}{5}\right)$

$= (4000 - 4) + \frac{(4 \times 5)}{5 \times 2} = 3996 + 2 = 3998$

Ex. $99\frac{1}{11} + 99\frac{2}{11} + \ldots\ldots\ldots + 99\frac{10}{11} = ?$

HINTS $99\frac{1}{11} + 99\frac{2}{11} + \ldots\ldots\ldots + 99\frac{10}{11}$

$= 999 \times 10 + \left(\frac{1+2+3\ldots\ldots+10}{11}\right) = 99 \times 10 + \frac{10}{2} = 995$

$\left(\because 1 + 2 + 3 + \ldots. + 10 = \frac{10 \times 11}{2}\right)$

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

अध्याय 08

घातांक और करणी

करणी

परिभाषा

- करणी संख्याएँ अपरिमेय संख्याएँ होती हैं जिन्हें मूल रूप में व्यक्त किया जाता है (जैसे वर्गमूल, घनमूल) जिन्हें पूर्ण संख्याओं में सरल नहीं किया जा सकता।

Ex. $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt[3]{7}$

गुण

- $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
- $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} \times b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}}$
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$
- $(\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
- $(\sqrt[n]{a})^n = a^{\frac{n}{n}} = a$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n]{a^{\frac{1}{m}}} = a^{\frac{1}{mn}}$
- $\left(\sqrt[z]{\sqrt[y]{(\sqrt[x]{a})^m}^n}\right)^o = a^{\frac{mno}{xyz}}$

घातांक

- सूचकांक, जिसे घातांक भी कहा जाता है, यह दर्शाता है कि आधार संख्या को स्वयं से कितनी बार गुणा किया गया है।

Ex. 2^3

- $a \times a \times$ .... n गुणा $= a^n$
- $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- $a^m \div a^n = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $(ab)^n = a^n b^n$
- $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} = a^n \div b^n$
- $\frac{a^{-n}}{b^{-m}} = \frac{b^m}{a^n}$
- $a^{\frac{p}{q}} = (a^p)^{\frac{1}{q}}$
- $a^0 = 1\ (a \neq 0)$
- $a^1 = a$
- $a^x = a^y \Rightarrow x = y$

Ex. $\sqrt{[(7^2+6^3+9^2)\div 2+52]}$ सरल करें।

HINTS $\sqrt{[(7^2+6^3+9^2)\div 2+52]}$

$= \sqrt{[(49+216+81)\div 2+52]}$

$= \sqrt{[346\div 2+52]}$

$= \sqrt{225} = 15$

Ex. $\sqrt{10+\sqrt{25+\sqrt{108+\sqrt{154+\sqrt{225}}}}} = ?$

HINTS याद रखें, इस प्रकार के प्रश्नों को हमेशा दाईं ओर से हल करना चाहिए।

$\sqrt{10+\sqrt{25+\sqrt{108+\sqrt{154+15}}}}$

$= \sqrt{10+\sqrt{25+\sqrt{108+13}}}$

$= \sqrt{10+\sqrt{25+\sqrt{121}}}$

$= \sqrt{10+\sqrt{36}}$

$= \sqrt{10+6} = 4$

Ex. $\frac{\sqrt[3]{6859}}{\sqrt[4]{1296}} \times \frac{3}{57} \times 42 = ?$

HINTS $\frac{\sqrt[3]{6859}}{\sqrt[4]{1296}} \times \frac{3}{57} \times 42$

$= \frac{19}{6} \times \frac{3}{57} \times 42 = 7$

Ex. $\frac{\sqrt{29.16}}{\sqrt{1.1664}} + \frac{\sqrt{0.2916}}{\sqrt{116.64}} + \frac{\sqrt{0.0036}}{\sqrt{0.36}} = ?$

HINTS $\frac{\sqrt{29.16}}{\sqrt{1.1664}} + \frac{\sqrt{0.2916}}{\sqrt{116.64}} + \frac{\sqrt{0.0036}}{\sqrt{0.36}}$

$= \sqrt{\frac{1}{4}\times\frac{10^4}{10^2}} + \sqrt{\frac{1}{4}\times\frac{10^2}{10^4}} + \sqrt{1\times\frac{10^2}{10^4}}$

$= \sqrt{\frac{1}{4}\times 10^2} + \sqrt{\frac{1}{4}\times\frac{1}{10^2}} + \sqrt{\frac{1}{10^2}} = 5 + \frac{1}{20} + \frac{1}{10} = \frac{103}{20}$

Ex. $\left(\sqrt[3]{\sqrt[3]{343}}\right)^3 \times \left(\sqrt[3]{\sqrt[3]{216}}\right)^3$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $\left(\sqrt[3]{\sqrt[3]{343}}\right)^3 \times \left(\sqrt[3]{\sqrt[3]{216}}\right)^3$

$= (343)^{3\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}} \times (216)^{3\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}}$

$= (7^3)^{\frac{1}{3}} \times (6^3)^{\frac{1}{3}} = 7 \times 6 = 42$

Ex. $\sqrt{104.04} + \sqrt{1.0404} + \sqrt{0.010404}$ के बराबर है।

HINTS $(102)^2 = 10404$

$\sqrt{104.04} + \sqrt{1.0404} + \sqrt{0.010404}$

$= 10.2 + 1.02 + 0.102$

$= 11.322$

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. यदि $\sqrt{5329} = 73$

$\sqrt{5329} + \sqrt{53.29} + \sqrt{0.5329} + \sqrt{0.005329} + \sqrt{0.00005329}$ का मान ज्ञात करें।

HINTS

$\sqrt{5329} + \sqrt{53.29} + \sqrt{0.5329} + \sqrt{0.005329} + \sqrt{0.00005329}$

$= 73 + 7.3 + 0.73 + 0.073 + 0.0073$

$= 81.1103$

अनंत श्रृंखला

(a) गुणा और भाग

अनंत श्रृंखला

- $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a......n \text{ गुना}}}} = a^{1-\frac{1}{2^n}} = a^{\frac{2^n-1}{2^n}}$

- **सामान्य रूप** $\sqrt[n]{a\sqrt[n]{a\sqrt[n]{a.....\infty}}} = \sqrt[n-1]{a}$
  - $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a....\infty}}} = a$

- **सामान्य रूप** $\sqrt[n]{a \div \sqrt[n]{a \div \sqrt[n]{a....\infty}}} = \sqrt[n+1]{a}$
  - $\sqrt{a \div \sqrt{a \div \sqrt{a \div \sqrt{a \div .....\infty}}}} = \sqrt[3]{a}$

- **सामान्य रूप** $\sqrt[m]{a\sqrt[n]{b\sqrt[m]{a.......\infty}}} = \sqrt[mn-1]{a^n b}$
  - $\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{b....\infty}}}} = (a^2b)^{\frac{1}{3}}$

Ex. $\sqrt{7\sqrt{7\sqrt{7\sqrt{7\sqrt{7\sqrt{7}}}}}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS कुल वर्गमूल = 6

$2^6 = 64$

$\therefore \sqrt{7\sqrt{7\sqrt{7\sqrt{7\sqrt{7\sqrt{7}}}}}} = 7^{\frac{2^6-1}{2^6}} = 7^{\frac{63}{64}}$

Ex. $\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5....\infty}}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS $\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5....\infty}}} = 5$

Ex. $\sqrt{27 \div \sqrt{27 \div \sqrt{27....\infty}}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS $\sqrt{27 \div \sqrt{27 \div \sqrt{27....\infty}}} = \sqrt[3]{27} = 3$

Ex. $\sqrt{2\sqrt[3]{4\sqrt{2\sqrt[3]{4........\infty}}}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS $\sqrt[2\times3-1]{2^3 \times 4} = \sqrt[5]{2^3 \times 4} = \sqrt[5]{2^3 \times 2^2} = \sqrt[5]{2^5} = 2$

(b) जोड़ना और घटाना

अनंत श्रृंखला

- $x = \sqrt{a \pm \sqrt{a \pm \sqrt{a \pm ....\infty}}}$
  यदि a को दो क्रमिक पूर्णांकों में विभाजित किया जा सकता है, अर्थात् n, (n+1) तो
  - जोड़ → (n+1) उत्तर होगा।
  - घटाना → n उत्तर होगा।

- $x = \sqrt{a \pm \sqrt{a \pm \sqrt{a \pm ....\infty}}}$
  यदि a को दो क्रमिक पूर्णांकों में विभाजित नहीं किया जा सकता है, तो
  $\sqrt{a \pm \sqrt{a \pm \sqrt{a \pm ....\infty}}} = \frac{\sqrt{1+4a} \pm 1}{2}$
  सामान्य रूप
  $x = \sqrt{a + b\sqrt{a + b\sqrt{a + ...\infty}}} = \frac{\sqrt{4a+b^2}+b}{2}$
  $y = \sqrt{a - b\sqrt{a - b\sqrt{a - ......\infty}}} = \frac{\sqrt{4a+b^2}-b}{2}$
  $\Rightarrow \boxed{x - y = b}$ और $\boxed{xy = a}$

- **सामान्य रूप**
  $\sqrt{a \pm b\sqrt{a \mp b\sqrt{a \pm ......\infty}}} = \frac{\sqrt{4a-3b^2} \pm b}{2}$
  - $\sqrt{a \pm \sqrt{a \mp \sqrt{a \pm ......\infty}}} = \frac{\sqrt{4a-3} \pm 1}{2}$

Ex. $\sqrt{56 + \sqrt{56 + \sqrt{56 + ...\infty}}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS $\sqrt{56 + \sqrt{56 + \sqrt{56 + ...\infty}}}$

7 × 8

बड़ा गुणनखंड ही उत्तर है अर्थात 8.

Ex. $\sqrt{90 - \sqrt{90 - \sqrt{90....\infty}}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS $\sqrt{90 - \sqrt{90 - \sqrt{90....\infty}}}$

9 × 10

छोटा गुणनखंड ही उत्तर है अर्थात 9.

Ex. $\sqrt{5 + \sqrt{5 + \sqrt{5 + ...\infty}}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS $\sqrt{5 + \sqrt{5 + \sqrt{5 + ...\infty}}} = \frac{\sqrt{1+4\times5}+1}{2} = \frac{\sqrt{21}+1}{2}$

Ex. $\sqrt{1 - \sqrt{1 - \sqrt{1 - ....\infty}}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS $\sqrt{1 - \sqrt{1 - \sqrt{1 - ....\infty}}} = \frac{\sqrt{1+4\times1}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

Ex. $\sqrt{35 + 2\sqrt{35 + 2\sqrt{35 + 2\sqrt{35 + ...\infty}}}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS

$x = \sqrt{35 + 2\sqrt{35 + 2\sqrt{35 + ...\infty}}} = \frac{\sqrt{4\times35+2^2}+2}{2} = 7$

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

वैकल्पिक विधि

35 को दो ऐसी संख्याओं में विभाजित करें जिनका गुणनफल 35 हो और अंतर 2 हो। यहाँ 35 = 5 × 7.

यदि दी गई श्रृंखला योग की है तो बड़ी संख्या उत्तर होगी अर्थात 7।

Ex. $\sqrt{154-3\sqrt{154-3\sqrt{154-3\sqrt{154-....\infty}}}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS $y=\sqrt{154-3\sqrt{154-3\sqrt{154-.......\infty}}}$

$=\frac{\sqrt{4\times154+3^2}-3}{2}=11$

वैकल्पिक विधि

154 को दो ऐसी संख्याओं में विभाजित करें जिनका गुणनफल 154 हो और अंतर 3 हो। यहाँ 154 = 11 × 14. यदि दी गई श्रृंखला घटाव की है तो छोटी संख्या उत्तर होगी अर्थात् 11।

Ex. $\sqrt{7+2\sqrt{7-2\sqrt{7+2\sqrt{7-2\sqrt{7+....}}}}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS $\frac{\sqrt{7\times4-3\times2^2}+2}{2}=\frac{\sqrt{28-12}+2}{2}=\frac{4+2}{2}=3$

Ex. $\sqrt{13-3\sqrt{13+3\sqrt{13-3\sqrt{13+....\infty}}}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS $\frac{\sqrt{4\times13-3\times3^2}-3}{2}=\frac{\sqrt{52-27}-3}{2}=\frac{5-3}{2}=1$

Ex. माना $x=\sqrt{6-\sqrt{6+\sqrt{6-\sqrt{6+....}}}}$ अनंत तक तो x बराबर है

HINTS $x=\frac{\sqrt{4\times6-3}-1}{2}=\frac{\sqrt{21}-1}{2}$

Ex. माना $x=\sqrt{13+\sqrt{13-\sqrt{13+\sqrt{13....}}}}$ अनंत तक तो x बराबर है

HINTS $x=\frac{\sqrt{4\times13-3}+1}{2}=\frac{7+1}{2}=4$

सबसे छोटा/सबसे बड़ा ज्ञात करें

जब घातांक भिन्न में हो

जब घातांक भिन्न में हो → ल.स.प. लें

Ex. $\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \sqrt[6]{6}$

HINTS [यहाँ घातांक 2, 3, 4, 6 का लघुत्तम समापवर्त्य 12 है]

$(2^{1/2})^{12}, (3^{1/3})^{12}, (4^{1/4})^{12}, (6^{1/6})^{12} = 2^6, 3^4, 4^3, 6^2 = 64, 81, 64, 36$

∴ सबसे छोटा $\sqrt[6]{6}$ है और सबसे बड़ा $\sqrt[3]{3}$ है।

जब घातांक पूर्णांक में हो

जब घातांक पूर्णांक में हो → म.स.प. लें

Ex. $7^{200}, 9^{150}, 6^{200}, 5^{300}$.

HINTS यहाँ, करणी (200, 150, 200, 300) का म.स.प. = 50

$7^{200/50}, 9^{150/50}, 6^{200/50}, 5^{300/50} = 7^4, 9^3, 6^4, 5^6$

= 2401, 729, 1296, 15625

∴ सबसे बड़ी संख्या = 15625 अर्थात् 5^{300}

@apna_channels

समान योग

न्यूनतम अंतर, सबसे बड़ी संख्या

Ex. $\sqrt{8}+\sqrt{3}, \sqrt{9}+\sqrt{2}, \sqrt{7}+\sqrt{4}, \sqrt{6}+\sqrt{5}$

HINTS $\sqrt{8}+\sqrt{3}, \sqrt{9}+\sqrt{2}, \sqrt{7}+\sqrt{4}, \sqrt{6}+\sqrt{5}$

योग → 11, 11, 11, 11

यहाँ संख्याओं का योग समान है। अतः अंतर है,

8 − 3 = 5, 9 − 2 = 7, 7 − 4 = 3, 6 − 5 = 1

∴ $\sqrt{6}+\sqrt{5}$ सबसे बड़ा और $\sqrt{9}+\sqrt{2}$ सबसे छोटा

समान अंतर

छोटा अंक, सबसे बड़ी संख्या

Ex. $\sqrt{7}-\sqrt{5}, \sqrt{9}-\sqrt{7}, \sqrt{5}-\sqrt{3}, \sqrt{11}-\sqrt{9}$

HINTS $\sqrt{7}-\sqrt{5}, \sqrt{9}-\sqrt{7}, \sqrt{5}-\sqrt{3}, \sqrt{11}-\sqrt{9}$

अंतर → 2, 2, 2, 2

यहाँ, संख्याओं का अंतर समान है। अतः

तुलना (7, 9, 5, 11) और (5, 7, 3, 9)

∴ $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ सबसे बड़ा और $\sqrt{11}-\sqrt{9}$ सबसे छोटा

समान गुणनफल

अधिकतम योग/अंतर, सबसे बड़ी संख्या

Ex. $\sqrt{8}\pm\sqrt{3}$ और $\sqrt{6}\pm\sqrt{4}$

HINTS $\sqrt{8}\pm\sqrt{3}$ और $\sqrt{6}\pm\sqrt{4}$

गुणनफल → 24, 24

यहाँ संख्याओं का गुणनफल समान है।

योग → 8 + 3 = 11, 6 + 4 = 10

अंतर → 8 − 3 = 5, 6 − 4 = 2

∴ $\sqrt{8}\pm\sqrt{3}$ सबसे बड़ा और $\sqrt{6}\pm\sqrt{4}$ सबसे छोटा

वर्गमूल के अंदर वर्गमूल व्यंजक

इस प्रकार के प्रश्न में वर्गमूल के अंदर व्यंजक, का वर्ग बनाने का प्रयास करें।

Ex. $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$ मूल्यांकन करें।

HINTS $\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{2})^2+2\sqrt{3}\times\sqrt{2}}$

$=\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

Ex. यदि $\sqrt{52-30\sqrt{3}}=a+b\sqrt{3}$ तो a + b बराबर है:

HINTS $\sqrt{52-30\sqrt{3}}=a+b\sqrt{3}$

$\Rightarrow \sqrt{(3\sqrt{3}-5)^2}=a+b\sqrt{3}$

$\Rightarrow 3\sqrt{3}-5=a+b\sqrt{3}$

तुलना करने पर, a = −5, b = 3

∴ a + b = − 5 + 3 = − 2

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. $\sqrt{10+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15}}$ मूल्यांकन करें।

HINTS

$$\sqrt{10+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15}} = \sqrt{2+3+5+2(\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{15})}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2+(\sqrt{5})^2+2(\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{15})}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})^2} = \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$$

यदि वर्गमूल हर में है

इस प्रकार के प्रश्नों में संयुग्मी पदों से गुणा और भाग करके पदों को तर्कसंगत बनाएं

Ex. $2+\frac{6}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}-2} = ?$

HINTS $2+\frac{6\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}+\frac{2-\sqrt{3}}{1}+\frac{\sqrt{3}+2}{-1}$

$$= 2+\frac{6\sqrt{3}}{3}+2-\sqrt{3}-\sqrt{3}-2 = 2$$

- $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = 2\left(\frac{a+b}{a-b}\right)$
- $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{4\sqrt{ab}}{a-b}$

Ex. यदि $x = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ और $y = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ तो $(x+y)$ बराबर है:

HINTS $x+y = 2\left(\frac{5+3}{5-3}\right) = 8$

Ex. नीचे दिए गए व्यंजक का मान है:

$$\frac{1}{\sqrt{(12-\sqrt{140})}}-\frac{1}{\sqrt{(8-\sqrt{60})}}-\frac{2}{\sqrt{10+\sqrt{84}}}$$

HINTS $\frac{1}{\sqrt{12-\sqrt{4\times35}}}-\frac{1}{\sqrt{8-\sqrt{4\times15}}}-\frac{2}{\sqrt{10+\sqrt{4\times21}}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{7})^2+(\sqrt{5})^2-2\sqrt{7}\times\sqrt{5}}}-\frac{1}{\sqrt{(\sqrt{5})^2+(\sqrt{3})^2-2\sqrt{5}\times\sqrt{3}}}$$

$$-\frac{2}{\sqrt{(\sqrt{7})^2+(\sqrt{3})^2+2\sqrt{7}\times\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$$

उपरोक्त समीकरण का परिमेयीकरण करने पर

$$\Rightarrow \frac{(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{2}-\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{2}-\frac{(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}-\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2} = 0$$

घात का सरलीकरण

Ex. यदि $3^{x+1} = 3^7$, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS $3^{x+1} = 3^7 \Rightarrow x+1 = 7 \Rightarrow x = 6$

Ex. यदि $(125)^{\frac{2}{3}} \times (625)^{\frac{-1}{4}} = (5)^x$, तो x का मान है:

HINTS $(125)^{\frac{2}{3}} \times (625)^{\frac{-1}{4}} = (5)^x$

$$\Rightarrow (5^3)^{\frac{2}{3}} \times (5^4)^{\frac{-1}{4}} = 5^x$$

$$\Rightarrow 5^2 \times 5^{-1} = 5^x$$

$$\Rightarrow 5^1 = 5^x$$

$$\Rightarrow x = 1$$

Ex. $\left(\frac{x^b}{x^c}\right)^a \times \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^b \times \left(\frac{x^a}{x^b}\right)^c = ?$

HINTS $\left(\frac{x^b}{x^c}\right)^a \times \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^b \times \left(\frac{x^a}{x^b}\right)^c = x^{(b-c)a} \times x^{(c-a)b} \times x^{(a-b)c}$

$$= x^{ab-ac+bc-ab+ac-bc} = x^0 = 1$$

Ex. $(0.3)^{[\{(200-146)/(3\times3\times3)\}-3]}$ का मान है:

HINTS $(0.3)^{\left[\left\{\frac{(200-146)}{(3\times3\times3)}\right\}-3\right]}$

$$= 0.3^{(2-3)} = (0.3)^{-1} = \frac{1}{0.3} = \frac{10}{3}$$

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

अध्याय 09

बीजगणित

बीजगणित गणित की वह शाखा है जिसमें संख्याओं के स्थान पर सांकेतिक अक्षरों (चर या प्रतीकों) का प्रयोग किया जाता है और इन प्रतीकों पर अंकगणितीय क्रियाएँ (जैसे जोड़, घटा , गुणा, भाग आदि) की जाती हैं।

सम्मिलित विषय

- व्युत्क्रम फलन
- 2V और 3V के लिए वर्ग सूत्र
- 2V और 3V के लिए घन सूत्र
- पूर्ण वर्ग की अवधारणा
- मान रखने की अवधारणा और समरूपता
- द्विघात समीकरण

व्युत्क्रम फलन (Inverse Function)

(A) मूल सूत्र

$$x \pm \frac{1}{x}$$

यदि $x + \frac{1}{x} = n$, तब

- $x^2 + \frac{1}{x^2} = n^2 - 2$
- $x^4 + \frac{1}{x^4} = (n^2 - 2)^2 - 2$
- $x^8 + \frac{1}{x^8} = \left[(n^2 - 2)^2 - 2\right]^2 - 2$
- $x^3 + \frac{1}{x^3} = n^3 - 3n$
- $x^6 + \frac{1}{x^6} = (n^3 - 3n)^2 - 2$

यदि $x - \frac{1}{x} = n$, तब

- $x^2 + \frac{1}{x^2} = n^2 + 2$
- $x^4 + \frac{1}{x^4} = (n^2 + 2)^2 - 2$
- $x^8 + \frac{1}{x^8} = \left[(n^2 + 2)^2 - 2\right]^2 - 2$
- $x^3 - \frac{1}{x^3} = n^3 + 3n$
- $x^6 + \frac{1}{x^6} = (n^3 + 3n)^2 + 2$

@apna_channels

Ex. यदि $x + \frac{1}{x} = 3$, तो

HINTS $x^2 + \frac{1}{x^2} = 3^2 - 2 = 7$

- $x^4 + \frac{1}{x^4} = \left(3^2 - 2\right)^2 - 2 = 47$
- $x^8 + \frac{1}{x^8} = \left[\left(3^2 - 2\right)^2 - 2\right]^2 - 2 = 2207$
- $x^3 + \frac{1}{x^3} = 3^3 - 3 \times 3 = 18$
- $x^6 + \frac{1}{x^6} = \left(3^3 - 3 \times 3\right)^2 - 2 = 322$

Ex. यदि $x - \frac{1}{x} = 3$, तब

HINTS $x^2 + \frac{1}{x^2} = 3^2 + 2 = 11$

- $x^4 + \frac{1}{x^4} = \left(3^2 + 2\right)^2 - 2 = 119$
- $x^8 + \frac{1}{x^8} = \left[\left(3^2 + 2\right)^2 - 2\right]^2 - 2 = (119)^2 - 2 = 14159$
- $x^3 - \frac{1}{x^3} = 3^3 + 3 \times 3 = 36$
- $x^6 + \frac{1}{x^6} = (3^3 + 3 \times 3)^2 + 2 = 1298$

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram @yct_publication

$x \pm \frac{1}{x}$

यदि $x + \frac{1}{x} = n$, तब

- $x^5 + \frac{1}{x^5} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right)$
  $= (n^2 - 2)(n^3 - 3n) - n$
- $x^7 + \frac{1}{x^7} = \left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right)$
  $= \left[(n^2 - 2)^2 - 2\right](n^3 - 3n) - n$

यदि $x - \frac{1}{x} = n$, तब

- $x^5 - \frac{1}{x^5} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right) - \left(x - \frac{1}{x}\right)$
  $= (n^2 + 2)(n^3 + 3n) - n$
- $x^7 - \frac{1}{x^7} = \left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right) + \left(x - \frac{1}{x}\right)$
  $= \left[(n^2 + 2)^2 - 2\right](n^3 + 3n) + n$

- $x^5 \pm \frac{1}{x^5}$ और $x^7 \pm \frac{1}{x^7}$, n का गुणज होना चाहिए।
- यदि $x \pm \frac{1}{x} = n$ (इकाई अंक), तब $x^5 \pm \frac{1}{x^5}$ और $x^7 \pm \frac{1}{x^7}$, का इकाई अंक n होना चाहिए।

Ex. यदि $x + \frac{1}{x} = 3$, तब

HINTS $x^5 + \frac{1}{x^5} = (3^2 - 2)\ (3^3 - 3 \times 3) - 3 = 123$

- $x^7 + \frac{1}{x^7} = [(3^2 - 2)^2 - 2]\ (3^3 - 3 \times 3) - 3 = 843$

Ex. यदि $x - \frac{1}{x} = 3$, तब

HINTS $x^5 - \frac{1}{x^5} = (3^2 + 2)\ (3^3 + 3 \times 3) - 3 = 393$

- $x^7 - \frac{1}{x^7} = [(32 + 2)2 - 2]\ (33 + 3 \times 3) + 3 = 4287$

(B) द्विघात समीकरण

हल करने के लिए, पहले द्विघात समीकरण ($ax^2 + bx + c = 0$) को $\left(x + \frac{1}{x}\right)$ या $\left(x - \frac{1}{x}\right)$ में परिवर्तित करें।

Ex. यदि $\frac{2p}{p^2 - 5p + 1} = \frac{1}{10}, p \neq 0$ है, तो $\left(p + \frac{1}{p}\right)$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $\frac{2p}{p^2 - 5p + 1} = \frac{1}{10}$

$\Rightarrow \frac{2}{p - 5 + \frac{1}{p}} = \frac{1}{10} \Rightarrow 20 = p + \frac{1}{p} - 5 \Rightarrow 25 = p + \frac{1}{p}$

Ex. यदि $p^2 - 4p - 1 = 0$ है, तब $p^2 + 3p + \frac{1}{p^2} - \frac{3}{p}$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $p^2 - 4p - 1 = 0,$

$\Rightarrow p - \frac{1}{p} = 4$

$\Rightarrow p^2 + \frac{1}{p^2} = 4^2 + 2 = 18$

$\therefore\ p^2 + \frac{1}{p^2} + 3\left(p - \frac{1}{p}\right)$

$= 18 + 3 \times 4 = 18 + 12 = 30$

(C) रिवर्स केस

यदि $x^4 + \frac{1}{x^4} = n$, तब

$x^2 + \frac{1}{x^2} = \sqrt{n+2}$ $\qquad$ $x^2 - \frac{1}{x^2} = \sqrt{n-2}$

$x + \frac{1}{x} = \sqrt{\sqrt{n+2} + 2}$ $\qquad$ $x - \frac{1}{x} = \sqrt{\sqrt{n+2} - 2}$

हल करने के लिए, पहले दिए गए व्यंजक को $x \pm \frac{1}{x}$ में बदलें फिर प्रश्नों की आवश्यकता के अनुसार आगे बढ़ें।

Ex. यदि $x^2 + \frac{1}{x^2} = 119\ (x > 0)$ है, तब $\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $x^2 + \frac{1}{x^2} = 119$

$\Rightarrow x + \frac{1}{x} = \sqrt{119 + 2} = \sqrt{121} = 11$

$= x^3 + \frac{1}{x^3} = (11)^3 - 3 \times 11 = 1331 - 33 = 1298$

Ex. यदि $k^4 + \frac{1}{k^4} = 194$ है, तब $k^3 + \frac{1}{k^3}$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $k^4 + \frac{1}{k^4} = 194$

$\Rightarrow k^2 + \frac{1}{k^2} = \sqrt{194 + 2} = 14$

$\Rightarrow k + \frac{1}{k} = \sqrt{14 + 2} = 4$

$\therefore\ k^3 + \frac{1}{k^3} = 4^3 - 12 = 52$

Ex. If $x > 1$ और $x^2 + \frac{1}{x^2} = 83$ है, तब $x^3 - \frac{1}{x^3}$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $x^2 + \frac{1}{x^2} = 83$

$x - \frac{1}{x} = \sqrt{83 - 2} = 9$

$\therefore\ x^3 - \frac{1}{x^3} = 9^3 + 3 \times 9 = 729 + 27 = 756$

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram @yct_publication

Ex. दिया है $x^8 - 34x^4 + 1 = 0,\ x > 0$ है, तब $x^3 - \frac{1}{x^3}$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $x^8 - 34x^4 + 1 = 0$

$\Rightarrow x^4 - 34 + \frac{1}{x^4} = 0 \Rightarrow x^4 + \frac{1}{x^4} = 34$

$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = \sqrt{34+2} = 6$

$x - \frac{1}{x} = \sqrt{6-2} = 2$

$\therefore\ x^3 - \frac{1}{x^3} = 2^3 + 3 \times 2 = 14$

(D) ब्रिजिंग (Bridging) अवधारणा

$x \pm \frac{1}{x} = n$

यदि $x + \frac{1}{x} = n$, तब

- $x - \frac{1}{x} = \pm\sqrt{n^2 - 4}$
- $x^2 - \frac{1}{x^2} = \pm n\sqrt{n^2 - 4}$

यदि $x - \frac{1}{x} = n$, तब

- $x + \frac{1}{x} = \pm\sqrt{n^2 + 4}$
- $x^2 - \frac{1}{x^2} = \pm n\sqrt{n^2 + 4}$

Ex. यदि $x + \frac{1}{x} = 3$, तब

HINTS

- $x - \frac{1}{x} = \pm\sqrt{3^2 - 4} = \pm\sqrt{5}$
- $x^2 - \frac{1}{x^2} = 3 \times (\pm\sqrt{5}) = \pm 3\sqrt{5}$

Ex. यदि $x - \frac{1}{x} = 3$, तब

HINTS

- $x + \frac{1}{x} = \pm\sqrt{3^2 + 4} = \pm\sqrt{13}$
- $x^2 - \frac{1}{x^2} = 3 \times (\pm\sqrt{13}) = \pm 3\sqrt{13}$

Ex. यदि $x + \frac{1}{x} = -14$, और $x < -1$ है, तब $x^2 - \frac{1}{x^2}$ का मान ज्ञात करें

HINTS $x + \frac{1}{x} = -14$

- $x - \frac{1}{x} = \sqrt{(-14)^2 - 4} = \sqrt{192} = \pm 8\sqrt{3}$

$x + \frac{1}{x}$ या $x - \frac{1}{x} = \pm n$ दो मान देता है।

- x की सीमा के आधार पर चिह्न चुनें।
- यदि $x < -1$, तो मान ऋणात्मक है।

यहाँ, $-8\sqrt{3}$ हम लेते हैं क्योंकि $x < -1$,

$x^2 - \frac{1}{x^2} = (-14) \times (-8\sqrt{3}) = 112\sqrt{3}$

सामान्य रूप :-

- यदि $x^m + \frac{1}{x^m} = a$, तब $x^m - \frac{1}{x^m} = \pm\sqrt{a^2 - 4}$
- यदि $x^m - \frac{1}{x^m} = a$, तब $x^m + \frac{1}{x^m} = \pm\sqrt{a^2 + 4}$

Ex. यदि $x^3 + \frac{1}{x^3} = 18$ है, तब $x^3 - \frac{1}{x^3}$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $x^3 - \frac{1}{x^3} = \sqrt{18^2 - 4} = \sqrt{324 - 4} = \sqrt{320} = 8\sqrt{5}$

Ex. यदि $x^5 - \frac{1}{x^5} = 82$ है, तब $x^5 + \frac{1}{x^5}$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $x^5 + \frac{1}{x^5} = \sqrt{82^2 + 4} = \sqrt{6724 + 4} = \sqrt{6728} = 58\sqrt{2}$

Ex. यदि $x > 1$ और $x^2 + \frac{1}{x^2} = 2\sqrt{5}$ है, तब $x^4 - \frac{1}{x^4}$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $x^2 + \frac{1}{x^2} = 2\sqrt{5}$

$x^2 - \frac{1}{x^2} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - 4} = 4$

$\therefore\ x^4 - \frac{1}{x^4} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) = 2\sqrt{5} \times 4 = 8\sqrt{5}$

Ex. यदि $\left(x + \frac{1}{x}\right) = 2\sqrt{2}$ और $x > 1$ है, तब $\left(x^6 - \frac{1}{x^6}\right)$ का मान ज्ञात करें।

HINTS दिया है,

$x + \frac{1}{x} = 2\sqrt{2}$

$x - \frac{1}{x} = \sqrt{8 - 4} = 2$

$\Rightarrow x^3 - \frac{1}{x^3} = 2^3 + 3 \times 2 = 14$

$\Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = (2\sqrt{2})^3 - 3 \times 2\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$

$\Rightarrow x^6 - \frac{1}{x^6} = (x^3 - \frac{1}{x^3})(x^3 + \frac{1}{x^3})$

$= 14 \times 10\sqrt{2} = 140\sqrt{2}$

Ex. यदि $\left(x - \frac{1}{x}\right) = \sqrt{6}$, और $x > 1$ है, तब $\left(x^8 - \frac{1}{x^8}\right)$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $\left(x - \frac{1}{x}\right) = \sqrt{6}$

$x + \frac{1}{x} = \sqrt{6 + 4} = \sqrt{10}$

$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = (\sqrt{10})^2 - 2 = 8$

$\Rightarrow x^4 + \frac{1}{x^4} = 8^2 - 2 = 62$

$\Rightarrow x^4 - \frac{1}{x^4} = \sqrt{3844 - 4} = \sqrt{3840}$

$\therefore\ x^8 - \frac{1}{x^8} = \left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)\left(x^4 - \frac{1}{x^4}\right) = 62\sqrt{3840} = 992\sqrt{15}$

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram @yct_publication

(E) असमान गुणांक

$ax \pm \frac{b}{x} = k$

यदि $ax + \frac{b}{x} = k$, तब

- $ax - \frac{b}{x} = \pm\sqrt{k^2 - 4ab}$
- $a^2x^2 + \frac{b^2}{x^2} = k^2 - 2ab$
- $a^3x^3 + \frac{b^3}{x^3} = k^3 - 3kab$

यदि $ax - \frac{b}{x} = k$, तब

- $ax + \frac{b}{x} = \pm\sqrt{k^2 + 4ab}$
- $a^2x^2 + \frac{b^2}{x^2} = k^2 + 2ab$
- $a^3x^3 - \frac{b^3}{x^3} = k^3 + 3kab$

Ex. यदि $\left(5a + \frac{4}{a} - 2\right) = 13$ और $a > 0$, तब

HINTS $5a + \frac{4}{a} - 2 = 13$

$\Rightarrow 5a + \frac{4}{a} = 15$

- $5a - \frac{4}{a} = \pm\sqrt{15^2 - 4 \times 5 \times 4} = \pm\sqrt{225 - 80} = \pm\sqrt{145}$
- $25a^2 + \frac{16}{a^2} = 225 - 2 \times 5 \times 4 = 225 - 40 = 185$
- $125a^3 + \frac{64}{a^3} = 3375 - 3 \times 15 \times 5 \times 4 = 3375 - 900 = 2475$

Ex. यदि $\left(5a - \frac{4}{a}\right) = 13$ और $a > 0$, तब

HINTS $5a - \frac{4}{a} = 13$

- $5a + \frac{4}{a} = \pm\sqrt{13^2 + 4 \times 5 \times 4} = \pm\sqrt{169 + 80} = \pm\sqrt{249}$
- $25a^2 + \frac{16}{a^2} = 169 + 2 \times 5 \times 4 = 169 + 40 = 209$
- $125a^3 + \frac{64}{a^3} = (13)^3 + 3 \times 13 \times 5 \times 4 = 2197 + 780 = 2977$

(F) विषेश स्थिति

- यदि $x + \frac{1}{x} = 2$, तब $x = 1$
- यदि $x + \frac{1}{x} = -2$, तब $x = -1$
- यदि $x + \frac{1}{x} = 1$, तब $x^3 = -1$
- यदि $x + \frac{1}{x} = -1$, तब $x^3 = 1$
- यदि $x + \frac{1}{x} = \pm\sqrt{2}$, तब $x^2 + \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x^4 = -1$
- यदि $x + \frac{1}{x} = \pm\sqrt{3}$, तब $x^3 + \frac{1}{x^3} = 0 \Rightarrow x^6 = -1$

Ex. यदि $x + \frac{1}{x} = 2$ है, तब $x^{121} + \frac{1}{x^{121}}$ का मान ज्ञात करें।

HINTS हम जानते है कि, यदि $x + \frac{1}{x} = 2$ तब $x = 1$

$\therefore x^{121} + \frac{1}{x^{121}} = 1 + 1 = 2$

Ex. यदि $x + \frac{1}{x+2} = -4$ है, तब $(x+2)^{231} + \frac{1}{(x+2)^{231}}$ का मान ज्ञात करें।

HINTS दिया है, $x + \frac{1}{x+2} = -4$

$\Rightarrow (x+2) + \frac{1}{(x+2)} = -2 \Rightarrow x + 2 = -1$

$\therefore (x+2)^{231} + \frac{1}{(x+2)^{231}} = (-1)^{231} + \frac{1}{(-1)^{231}}$

$= -1 - 1 = -2$

Ex. यदि $\frac{r}{13} + \frac{13}{r} = 1$ है, तब r^3 का मान ज्ञात करें।

HINTS $\frac{r}{13} + \frac{13}{r} = 1$ माना, $x = \frac{r}{13}$

यदि, $x + \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow x^3 = -1 \Rightarrow \left(\frac{r}{13}\right)^3 = -1 \Rightarrow r^3 = -2197$

Ex. यदि $x + \frac{1}{x} = -1$ है, तब $x^{51} + x^{45} + x^{21} + x^{15} + x^3 + 4$ का मान ज्ञात करें।

HINTS हम जानते हैं कि, यदि $x + \frac{1}{x} = -1$ तब $x^3 = 1$

$\therefore x^{51} + x^{45} + x^{21} + x^{15} + x^3 + 4$

$= (x^3)^{17} + (x^3)^{15} + (x^3)^7 + (x^3)^5 + x^3 + 4$

$= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 4 = 9$

Ex. यदि $x + \frac{1}{x} = \sqrt{2}$ है, तब $x^{96} + x^{100} + x^{112} + x^{116} + x^4 + 3$ का मान ज्ञात करें।

HINTS यदि $x + \frac{1}{x} = \sqrt{2}$ तो $x^4 = -1$

$\therefore x^{96} + x^{100} + x^{112} + x^{116} + x^4 + 3$

$= x^{96}(x^4 + 1) + x^{112}(x^4 + 1) + x^4 + 3$

$= 0 + 0 + (-1) + 3 = 2$

Ex. यदि $x + \frac{1}{x} = \sqrt{3}$ है, तब $x^{1012} + x^{1006} + x^{506} + x^{500} + x^{400} + x^{406} + x^{206} + x^{200} + x^6 + 5$ का मान ज्ञात करें।

HINTS हम जानते हैं कि, $x + \frac{1}{x} = \sqrt{3}$ तब $x^6 + 1 = 0$ या $x^6 = -1$.

$\therefore x^{1012} + x^{1006} + x^{506} + x^{500} + x^{400} + x^{406} + x^{206} + x^{200} + x^6 + 5$

$= x^{1006}(x^6 + 1) + x^{500}(x^6 + 1) + x^{400}(x^6 + 1) + x^{200}(x^6 + 1) + x^6 + 5 = -1 + 5 = 4$

(G) विविध अवधारणा

☞ यदि $x = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$ तब, $x + \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{2(a+b)}{(a-b)}$

Ex. यदि $x = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{4}}{\sqrt{5} + \sqrt{4}}$ या $y = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{4}}{\sqrt{5} - \sqrt{4}}$ है, तो $\frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + xy + y^2}$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $xy = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{4}}{\sqrt{5} + \sqrt{4}} \times \frac{\sqrt{5} + \sqrt{4}}{\sqrt{5} - \sqrt{4}} = 1$

जब दो संख्याएँ x और y व्युत्क्रमानुपाती हो तब,

$x + y = \frac{2(a+b)}{(a-b)} = \frac{2(5+4)}{(5-4)} = 18$

$x^2 + y^2 = 18^2 - 2 = 322$

$\therefore \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + xy + y^2} = \frac{322 - 1}{322 + 1} = \frac{321}{323}$

@apna_channels

Join Telegram @yct_publication

Ex. यदि $x^2 - 11x + 1 = 0$, है, तब $x^8 - 14159x^4 + 11$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $x^2 - 11x + 1 = 0$

$\Rightarrow x + \frac{1}{x} = 11$

$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 121 - 2 = 119$

$\Rightarrow x^4 + \frac{1}{x^4} = 119^2 - 2 = 14161 - 2$

$\Rightarrow x^4 + \frac{1}{x^4} = 14159 \Rightarrow x^8 + 1 = 14159x^4$

$\Rightarrow x^8 - 14159x^4 = -1$

$\therefore x^8 - 14159x^4 + 11 = -1 + 11 = 10$

Ex. यदि $x(x - 5) = -1$ है, तब $x^3(x^3 - 110)$ का मान ज्ञात करें।

HINTS दिया है, $x(x - 5) = -1$

$\Rightarrow x - 5 = \frac{-1}{x} \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 5$

$\Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = 5^3 - 3 \times 5$

$\Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = 110 \Rightarrow x^6 + 1 = 110x^3$

$\Rightarrow x^6 - 110x^3 = -1$

$\therefore x^3(x^3 - 110) = -1$

Ex. यदि $8k^6 + 15k^3 - 2 = 0$ है, तब $\left(k + \frac{1}{k}\right)$ का धनात्मक मान ज्ञात करें।

HINTS माना, $k^3 = x$

इसलिए,

$8x^2 + 15x - 2 = 0$

$\Rightarrow 8x^2 + 16x - x - 2 = 0$

$\Rightarrow 8x(x + 2) - 1(x + 2) = 0$

$\Rightarrow (8x - 1)(x + 2) = 0$

$\Rightarrow 8x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{8}$

or $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

[यह ऋणात्मक मान के कारण संभव नहीं है।]

अब,

$k^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow k = \frac{1}{2}$

$\therefore \left(k + \frac{1}{k}\right) = \left(\frac{1}{2} + 2\right) = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$

Ex. यदि $x^2 + 6x + 1 = 0$ है, तब $(x + 6)^3 + \frac{1}{(x+6)^3}$ का मान ज्ञात करें।

HINTS माना, $x + 6 = t \Rightarrow x = t - 6$

$x^2 + 6x + 1 = 0$

$\Rightarrow (t - 6)^2 + 6(t - 6) + 1 = 0$

$\Rightarrow t^2 + 36 - 12t + 6t - 36 + 1 = 0$

$\Rightarrow t^2 - 6t + 1 = 0 \Rightarrow t + \frac{1}{t} = 6$

$t^3 + \frac{1}{t^3} = 6^3 - 3 \times 6 = 198$

$\therefore (x + 6)^3 + \frac{1}{(x+6)^3} = 198$

वैकल्पिक विधि

$x^2 + 6x + 1 = 0 \Rightarrow x + 6 = \frac{-1}{x} \Rightarrow x + \frac{1}{x} = -6$

$x^3 + \frac{1}{x^3} = -216 + 18 = -198$

$\therefore (x + 6)^3 + \frac{1}{(x+6)^3} = \left(\frac{-1}{x}\right)^3 + (-x)^3 = -\left(\frac{1}{x^3} + x^3\right)$

$= -(-198) = 198$

Ex. यदि $x^2 - 16x + 59 = 0$ है, तब $(x - 6)^2 + \frac{1}{(x-6)^2}$ का मान ज्ञात करें।

HINTS माना $y = x - 6 \Rightarrow x = y + 6$

अब, $(y + 6)^2 - 16(y + 6) + 59 = 0$

$\Rightarrow y^2 + 36 + 12y - 16y - 96 + 59 = 0$

$\Rightarrow y^2 - 4y = 1$

$\Rightarrow y - \frac{1}{y} = 4$

$\Rightarrow y^2 + \frac{1}{y^2} = 18$

$\therefore (x - 6)^2 + \frac{1}{(x-6)^2} = 18$

@apna_channels

वर्ग का सूत्र (दो चर)

$(a + b)^2$ = $a^2 + b^2 + 2ab$ = $(a - b)^2 + 4ab$

$(a - b)^2$ = $a^2 + b^2 - 2ab$ = $(a + b)^2 - 4ab$

- $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$
- $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$
- $ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$
- $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$a^4 - b^4$ = $(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$ = $(a^2 + b^2)(a + b)(a - b)$

$a^4 + b^4$ = $(a^2 - b^2)^2 + 2a^2b^2$ = $(a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2$

Ex. $(7x + 4y)^2 + (7x - 4y)^2$ का सरलीकृत मान ज्ञात करें।

HINTS $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$

$(7x + 4y)^2 + (7x - 4y)^2 = 2[(7x)^2 + (4y)^2]$

$= 2(49x^2 + 16y^2)$

$= 98x^2 + 32y^2$

Ex. $\left(\frac{2x+3y}{2}\right)^2 - \left(\frac{2x-3y}{2}\right)^2 = ?$

HINTS $\left(\frac{2x+3y}{2}\right)^2 - \left(\frac{2x-3y}{2}\right)^2 = 2x \times 3y = 6xy$

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram @yct_publication

घन का सूत्र (दो चर)

- $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab\,(a + b)$
- $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab\,(a - b)$
- $(a + b)^3 + (a - b)^3 = 2a^3 + 6ab^2$
- $(a + b)^3 - (a - b)^3 = 2b^3 + 6a^2b$

$a^3 + b^3$:
- $(a + b)\,(a^2 - ab + b^2)$
- $(a + b)[(a + b)^2 - 3ab]$
- $(a + b)^3 - 3ab(a + b)$

$a^3 - b^3$:
- $(a - b)\,(a^2 + ab + b^2)$
- $(a - b)[(a - b)^2 + 3ab]$
- $(a - b)^3 + 3ab(a - b)$

- यदि $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \pm 1$, तो $a^3 \pm b^3 = 0$
- यदि $\frac{1}{a} \pm \frac{1}{b} = \frac{1}{a \pm b}$, तो $a^3 \mp b^3 = 0$
- यदि $ab(a+b) = 1$, तो $\frac{1}{a^3b^3} - a^3 - b^3 = 3$

Ex. यदि $x + y = 1$ है, तब $x^3 + 3xy + y^3$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $x + y = 1$

दोनों तरफ घन करने पर

$x^3 + y^3 + 3xy\,(x + y) = 1^3$

$\Rightarrow x^3 + y^3 + 3xy = 1$

Ex. यदि $a = 999$ है, तब $\sqrt[3]{a(a^2+3a+3)+1}$ is का मान ज्ञात करें।

HINTS हम जानते हैं कि, $(a + 1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$

यहाँ, $a = 999$

$\therefore \sqrt[3]{a(a^2+3a+3)+1} = (a + 1) = 999 + 1 = 1000$

Ex. $(x + y)^3 - (x - y)^3 - 6y(x^2 - y^2)$ को सरल करें।

HINTS $(x + y)^3 - (x - y)^3 = 2y^3 + 6x^2y$

$\therefore (x + y)^3 - (x - y)^3 - 6y(x^2 - y^2)$

$= 2y^3 + 6x^2y - 6x^2y + 6y^3 = 8y^3$

Ex. निम्नलिखित व्यंजक को सरल करें।

$$\left(x - \frac{1}{y}\right)^3 + \left(x + \frac{1}{y}\right)^3$$

HINTS $(a + b)^3 + (a - b)^3 = 2a^3 + 6ab^2$

$$\left(x - \frac{1}{y}\right)^3 + \left(x + \frac{1}{y}\right)^3 = 2(x)^3 + 6(x)\left(\frac{1}{y}\right)^2 = 2x^3 + \frac{6x}{y^2}$$

Ex. यदि $(2x - 5y)^3 - (2x + 5y)^3 = y\,[Ax^2 + By^2]$ है, तब $(2A - B)$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $(a - b)^3 - (a + b)^3 = -2b(b^2 + 3a^2)$

$(2x - 5y)^3 - (2x + 5y)^3 = -2 \times 5y\,[(5y)^2 + 3 \times (2x)^2]$

$= -10y\,(25y^2 + 12x^2) = y\,(-120x^2 - 250y^2)$

$\Rightarrow A = -120,\ B = -250$

$\therefore (2A - B) = 2 \times (-120) + 250 = 10$

Ex. यदि $a + b = 10$ और $ab = 6$ है, तब $a^3 + b^3$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $a + b = 10,\ ab = 6$

$a^3 + b^3 = (a + b)\,\{(a + b)^2 - 3ab\}$

$= 10\,\{(10)^2 - 3 \times 6\} = 10 \times 82$

$= 820$

Ex. यदि $x - y = 25$ और $xy = 444$ है, तब $x^3 - y^3$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $x^3 - y^3 = (x - y)\,[(x - y)^2 + 3xy]$

$= 25\,[25^2 + 3 \times 444]$

$= 25\,[625 + 1332]$

$= 48925$

वर्ग का सूत्र (तीन चर)

- $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$
- $(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2(ab - bc + ca)$
- $(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab - bc - ca)$
- $(a + b + c)^2 + (a - b - c)^2 = 2\,[a^2 + (b + c)^2]$
- $(a + b + c)^2 - (a - b - c)^2 = 4a\,(b + c)$
- $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 2\,(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$

Ex. यदि $a + b + c = 10$ और $ab + bc + ca = 30$ है, तब $a^2 + b^2 + c^2$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2\,(ab + bc + ca)$

$= (10)^2 - 2(30) = 40$

@apna_channels

Ex. यदि $x + y + z = 13$, $x^2 + y^2 + z^2 = 91$ और $xz = y^2$, तब z और x के बीच अंतर ज्ञात करें।

HINTS $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$

$\Rightarrow 169 = 91 + 2(xy + yz + y^2)$

$\Rightarrow 78 = 2y(x + z + y)$

$\Rightarrow 39 = y \times 13 \Rightarrow y = 3$

$(z - x)^2 = x^2 + z^2 - 2xz$

$\Rightarrow (z - x)^2 = 82 - 2 \times 9$

$\Rightarrow (z - x)^2 = 64 \Rightarrow z - x = 8$

वैकल्पिक विधि

$x = 1$, $y = 3$ और $z = 9$ रखने पर सभी समीकरणों को संतुष्ट करता है

$\therefore z - x = 9 - 1 = 8$

Ex. यदि $a + b + c = 10$ और $a^2 + b^2 + c^2 = 38$ है, तब $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $ab + bc + ca = \frac{(a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2)}{2}$

$= \frac{100-38}{2} = \frac{62}{2} = 31$

$\therefore (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 2(38 - 31) = 14$

वैकल्पिक विधि

$a = 5$, $b = 3$ और $c = 2$ रखने पर सभी समीकरणों को संतुष्ट करता है

$\therefore (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 2^2 + 1^2 + (-3)^2 = 4 + 1 + 9 = 14$

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram @yct_publication

घन का सूत्र (तीन चर)

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

- **F-1** $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$
- **F-2** $(a + b + c)[(a + b + c)^2 - 3(ab + bc + ca)]$
- **F-3** $\frac{1}{2}(a + b + c)[3(a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c)^2]$
- **F-4** $\frac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]$

Ex. यदि $a + b + c = 6$, $a^2 + b^2 + c^2 = 14$ और $ab + bc + ca = 11$ है, तब $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $a + b + c = 6$, $a^2 + b^2 + c^2 = 14$,

$ab + bc + ca = 11$

$\therefore a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 6(14 - 11) = 6 \times 3 = 18$

Ex. यदि $x + y + z = 7$ और $xy + yz + zx = 8$ है, तब $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 7(49 - 3 \times 8)$

$= 7(49 - 24) = 7 \times 25 = 175$

Ex. यदि $a + b + c = 6$, $a^2 + b^2 + c^2 = 32$ और $a^3 + b^3 + c^3 = 189$ है, तब $abc - 3$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

$= \frac{(a+b+c)}{2}[3(a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c)^2]$

$\Rightarrow 189 - 3abc = 3[3 \times 32 - 36]$

$\Rightarrow 189 - 3abc = 3 \times 60 \Rightarrow abc = 3$

$\therefore abc - 3 = 3 - 3 = 0$

Ex. यदि $x = 32$, $y = 33$ और $z = 35$ है, तब $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $x - y = -1$, $y - z = -2$, $z - x = 3$

$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{100}{2}(1 + 4 + 9) = 700$

विशेष स्थिति

स्थिति-I	स्थिति-II	स्थिति-III	स्थिति-IV
यदि $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$ → $a + b + c = 0$ (जब, a, b, c भिन्न पूर्णांक हों) ; $a = b = c$ (जब, a, b, c समान पूर्णांक हों)	यदि a, b और c समांतर श्रेणी में हैं और सार्व अंतर d है तब, $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 9bd^2$ जहाँ b मध्य पद है।	यदि a, b और c समांतर श्रेणी में हैं और सार्व अंतर d है, तब, $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 3d^2$	यदि दो संख्याएँ बराबर हैं और तीसरी संख्या उन संख्याओं में से एक अधिक है तो, $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = a + b + c$

Ex. यदि $(3x + 1)^3 + (x - 3)^3 + (4 - 2x)^3 + 6(3x + 1)(x - 3)(x - 2) = 0$ है, तब x का मान ज्ञात करें।

HINTS यदि $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$ तब $a + b + c = 0$

$\Rightarrow 3x + 1 + x - 3 + 4 - 2x = 0$

$\Rightarrow 2x + 2 = 0$

$\Rightarrow x = -1$

Ex. यदि $(4x - 3)^3 + (2x + 5)^3 + (5x - 7)^3 = (4x - 3)(6x + 15)(5x - 7)$ और $x \neq \frac{5}{11}$ है, तब x का मान ज्ञात करें।

HINTS **स्थिति 1 :-** यदि $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$ तब $a + b + c = 0$

$\Rightarrow 4x - 3 + 2x + 5 + 5x - 7 = 0$

$\Rightarrow 11x - 5 = 0$

$\Rightarrow x = \frac{5}{11}$ (यह संभव नहीं है)

स्थिति 2 :- यदि $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$ तब $a = b = c$

$\Rightarrow 4x - 3 = 2x + 5$

$\Rightarrow 2x = 8$

$\Rightarrow x = 4$

Ex. यदि $a = 199$, $b = 200$, $c = 201$ है, तब $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ का मान ज्ञात करें।

HINTS यहाँ, $a = 199$ $b = 200$ और $c = 201$ तथा a, b, c समांतर श्रेणी में हैं।

सार्व अंतर (d) $= 200 - 199 = 1$,

$b = 200$

$\therefore a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 9bd^2 = 9 \times 200 \times 1 = 1800$

Ex. यदि $a = 2001$, $b = 2002$ और $c = 2003$ है, तब $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$ का मान ज्ञात करें।

HINTS यहाँ, $a = 2001$, $b = 2002$ और $c = 2003$ तथा a, b और c समांतर श्रेणी में हैं।

सार्व अंतर (d) $= 2002 - 2001 = 1$

$\therefore a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 3d^2$

$= 3 \times (1)^2 = 3$

Ex. यदि $a = b = 336$ और $c = 337$ है, तब $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $a = b = 336$ और $c = 337$

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = a + b + c$

$= 336 + 336 + 337 = 1009$

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram @yct_publication

पूर्ण वर्ग की अवधारणा

यदि $x + y = 0$ है तब या तो x या y ऋणात्मक होना चाहिए लेकिन यदि $x^2 + y^2 = 0$ है तो x और y दोनों 0 होने चाहिए क्योंकि न तो x और न ही y ऋणात्मक हो सकते हैं।

(i) यदि $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ तो $x = y = z = 0$

(ii) यदि $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = 0$

तब $x - a = 0 \Rightarrow x = a$

$y - b = 0 \Rightarrow y = b$

$z - c = 0 \Rightarrow z = c$

> जब n पदों के वर्गों का योग शून्य के बराबर होता है तब प्रत्येक पद स्वयं भी शून्य होता हैं:-
> यदि $(x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + (x - a_3)^2 + \ldots\ldots\ldots (x - a_n)^2 = 0$
> तो, $x - a_1 = 0,\ x - a_2 = 0 \ldots\ldots\ldots x - a_n = 0$

Ex. यदि $(a - 18)^2 + (b - 12)^2 + (c - 6)^2 = 0$ है, तब $(a + b + c)^{1/2}$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $(a - 18)^2 + (b - 12)^2 + (c - 6)^2 = 0$

$\Rightarrow a = 18$; $b = 12$; $c = 6$

$\therefore (a + b + c)^{1/2} = (36)^{1/2} = \pm 6$

Ex. यदि $(a + b - 2)^2 + (b + c - 5)^2 + (c + a - 5)^2 = 0$ है, तब $\sqrt{(b+c)^a + (c+a)^b - 1}$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $(a + b - 2)^2 + (b + c - 5)^2 + (c + a - 5)^2 = 0$

$a + b = 2$ ......(i)

$b + c = 5$ ......(ii)

$c + a = 5$ .....(iii)

समीकरण (i), (ii) और (iii) को जोड़ने पर

$\therefore 2(a + b + c) = 12$

$\Rightarrow a + b + c = 6$ ......(iv)

$\Rightarrow a = 1, b = 1, c = 4$

$\therefore \sqrt{(b+c)^a + (c+a)^b - 1} = \sqrt{(5)^1 + (5)^1 - 1} = \sqrt{9} = 3$

Ex. यदि $x^2 + 4y^2 + 2x + 1 = 0$ है, तब $x^{39} + y^{36}$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $x^2 + 4y^2 + 2x + 1 = 0$

$\Rightarrow (x + 1)^2 + (2y)^2 = 0$

$\Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

$2y = 0 \Rightarrow y = 0$

$\therefore x^{39} + y^{36} = (-1)^{39} + (0)^{36} = -1$

Ex. यदि $a^2 + b^2 + 49c^2 + 18 = 2(b - 28c - a)$ है, तब $(a + b - 7c)$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $a = \dfrac{a \text{ का गुणांक}}{a^2 \text{ का गुणांक}} = \dfrac{-1}{1} = -1$

$b = \dfrac{b \text{ का गुणांक}}{b^2 \text{ का गुणांक}} = 1$

$c = \dfrac{c \text{ का गुणांक}}{c^2 \text{ का गुणांक}} = \dfrac{-28}{49} = \dfrac{-4}{7}$

$\therefore a + b - 7c = -1 + 1 - 7 \times \left(\dfrac{-4}{7}\right) = 4$

मान रखने की अवधारणा पर आधारित

यदि $x + y = 7$ तो $5(x + y)$

x	y
↓	↓
7	0
6	1
5	2
4	3

हम x और y का सही मान ज्ञात नहीं कर सकते है।

लेकिन $5(x + y) = 5 \times 7 = 35$

$\Rightarrow 5(x + y)$ का मान $(x + y)$ पर निर्भर करता है, x और y पर नहीं।

> यदि किसी समीकरण में दो चर हैं, तो दोनों चरों के मान ज्ञात करने के लिए दो समीकरणों की आवश्यकता होती है।

- यदि केवल एक समीकरण दिया गया है (जैसे $x + y = 7$), तो हम किसी एक चर का मान निश्चित कर सकते हैं। दूसरा चर अनिश्चित रहेगा और हम अपनी सुविधानुसार उसका मान सकते हैं, बशर्ते वह दी गई शर्त को पूरा करता हो।

ध्यान दें:

(i) जब आप किसी समीकरण में मान रखें, तो ध्यान रखें कि वह समीकरण $\frac{0}{0}$ जैसी **अनिर्धारित स्थिति में न** चला जाये या अनंत या कोई अन्य अनिर्धारित रूप न बन जाये।

(ii) पहले किसी एक चर के लिए 0 लगाने का प्रयास करें। यदि वह काम न करे, तो किसी अन्य चर के लिए 0 लगाने का प्रयास करें।

(iii) यदि 0 रखने से समीकरण संतुष्ट नहीं होता है, तो समीकरण में जो भी उपयुक्त हो, उसके आधार पर +1, –1, –2, –6 आदि जैसे अन्य मानों का प्रयास करें।

(iv) हम जो भी मान मानते हैं वह प्रश्न में दी गई किसी भी शर्त का **उल्लंघन नहीं करना** चाहिए।

- यदि दो/तीन समीकरण दिए गए हैं तो दो/तीन चरों का मान स्थिर होगा तथा शेष सभी चर अनिश्चित होंगे, जिनके मान हम तब तक मान सकते हैं जब तक समीकरण संतुष्ट हों।

@apna_channels

Ex. यदि $2a + 2b + c = 0$ है, तब $\dfrac{4a^2 + 4b^2 + 4c^2}{5c^2 - 8ab}$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $a = b = 1$ रखने पर

$\Rightarrow c = -4$

$\therefore \dfrac{4a^2 + 4b^2 + 4c^2}{5c^2 - 8ab} = \dfrac{4 + 4 + 64}{80 - 8} = \dfrac{72}{72} = 1$

Ex. यदि $\alpha + \beta + \gamma = 0$, तो $\dfrac{3\beta^2 + \alpha^2 + \gamma^2}{2\beta^2 - \alpha\gamma} = ?$

HINTS $\alpha = \beta = 1; \gamma = -2$ रखने पर

$\therefore \dfrac{3\beta^2 + \alpha^2 + \gamma^2}{2\beta^2 - \alpha\gamma}$

$= \dfrac{3 \times (1)^2 + (1)^2 + (-2)^2}{2 \times (1)^2 - 1 \times (-2)} = 2$

Ex. यदि $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$ है, तब $\left(\dfrac{17x^4 + 9y^4 + 16z^4}{8x^2y^2 + 6y^2z^2 + 10z^2x^2}\right)$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $x = y = z = 1$ रखने पर

$\therefore \dfrac{17 + 9 + 16}{8 + 6 + 10} = \dfrac{42}{24} = 1.75$

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram @yct_publication

समरूपता की अवधारणा

जब भी किसी व्यंजक में प्रत्येक पद की घात समान हो और वे दिए गए व्यंजक में समान संख्याओं में आते हों, तो समरूपता की अवधारणा लागू करें। अर्थात् प्रत्येक चर/पद को दूसरे के बराबर करें और व्यंजक को सरल करें।

- एक बीजीय व्यंजक अपने चरों में समरूपता होता है, किसी भी चर को आपस में बदलने से व्यंजक में कोई परिवर्तन नहीं होता है।

  यदि $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$, तब $a = b = c$
- दोनों पक्षों में प्रत्येक पद की घात समान होनी चाहिए।

Ex. यदि $a^2 = b + c, b^2 = c + a$ और $c^2 = a + b$ है, तब $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}$ का मान ज्ञात करें।

HINTS जांच करने पर $a^2 = b + c,\ b^2 = c + a,\ c^2 = a + b$ में $a = b = c = 2$ रखते हैं और ये मान समीकरण को संतुष्ट करते हैं।

$$\Rightarrow \frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2}=1$$

Ex. यदि $\frac{x^2}{by+cz}=\frac{y^2}{ax+cz}=\frac{z^2}{ax+by}=1$ है, तब $\frac{x}{x+a}+\frac{y}{y+b}+\frac{z}{z+a}$ का मान ज्ञात करें।

HINTS जांच करने पर $x = y = z = 2$, तथा $a = b = c = 1$ और ये मान समीकरण को संतुष्ट करते हैं।

$x = y = z = 2$ और $a = b = c = 1$ रखने पर

$$\Rightarrow \frac{x}{x+a}+\frac{y}{y+b}+\frac{z}{z+c}$$

$$=\frac{2}{2+1}+\frac{2}{2+1}+\frac{2}{2+1}=2$$

डिग्री की अवधारणा

बीजगणित में, घात बहुपद व्यंजक में चरों की उच्चतम घात (घातांक) को संदर्भित करता है (चर की अधिकतम घात को डिग्री कहते हैं)

मुख्य बिंदु:-

(i) रैखिक बहुपद: $ax + b$(डिग्री = 1)

(ii) द्विघात बहुपद: $ax^2 + bx + c$ (डिग्री = 2)

(iii) घन बहुपद: $ax^3 + bx^2 + cx + d$ (डिग्री = 3)

1. एकल-चर बहुपद के लिए: डिग्री उस चर का उच्चतम घातांक है:

Ex. $4x^3 + 2x^2 - x + 7$ में डिग्री 3 है (x^3 की उच्चतम घात के कारण)

2. बहुचर बहुपद के लिए: डिग्री किसी भी पद में घातांक का उच्चतम योग है:

$$\underbrace{x^2y}_{2+1=3} + \underbrace{2xy^3}_{1+3=4} + \underbrace{y}_{1}$$

अतः समीकरण की घात 4 है।

Ex. $7x^8 - 9x^5 + 13x^4 + 12x^2 - 37 \rightarrow$ डिग्री = 8

3. किसी स्थिरांक (जैसे 5 या -2) की घात 0 होती है, तथा शून्य बहुपद (केवल 0) की घात अपरिभाषित होती है, या कभी-कभी संदर्भ के आधार पर ऋणात्मक अनंत के रूप में परिभाषित होती है।

- यदि चर गुणज में है तो घात जोड़ी जाएगी।

Ex. $a^1b^1 + bc + ca \Rightarrow$ डिग्री $(a^1b^1) = 1+ 1 = 2$
- यदि चर भाग में है तो घात घटा दी जाएगी

Ex. $\frac{b^2}{a^1} \Rightarrow$ डिग्री = 2 – 1 = 10

Ex. $\frac{ab+bc+ca}{a-b-c} \Rightarrow \frac{a^1b^1}{a^1}=\frac{2}{1}=2-1=1$

- किसी भी समरूप व्यंजक में प्रश्न की डिग्री उत्तर की डिग्री के बराबर होनी चाहिए।

Ex. $\frac{a(b-c)^2}{(c-a)(a-b)}+\frac{b(c-a)^2}{(a-b)(b-c)}+\frac{c(a-b)^2}{(b-c)(c-a)}$ में डिग्री है____.

HINTS यहाँ,

$(b - c)^2$ डिग्री है = 2

$a (b - c)^2$ डिग्री है = 2 + 1 = 3

तथा,

$(c - a)$ डिग्री है = 1

$(a - b)$ डिग्री है = 1

इसलिए, $(c - a) (a - b)$ डिग्री है = 1 + 1 = 2

इसलिए,

$\frac{a(b-c)^2}{(c-a)(a-b)}$ डिग्री है = 3 – 2 = 1

Ex. $\frac{\{(m^2+n^2)(m-n)-(m-n)^3\}}{(m^2n-mn^2)}$ का मान ज्ञात करें।

(a) $m + n$ (b) $m - n$

(c) 2 (d) mn

HINTS यहाँ, बहुपद की डिग्री = $\frac{2+1}{2+1}=\frac{3}{3}=3-3=0$

अतः बहुपद का मान भी 0 डिग्री का होगा अर्थात् मान स्थिर रहेगा।

चूँकि केवल विकल्प (c) में स्थिर मान है।

∴ विकल्प (c) सही उत्तर है।

योगान्तरानुपात (कंपोनेंडो और डिविडेंडो नियम)

यदि $\frac{a}{b}=\frac{x}{y}$ तब $\frac{a+b}{a-b}=\frac{x+y}{x-y}$

☞ यदि $x=\frac{2ab}{a+b}$ तब $\frac{x+2a}{x-2a}+\frac{x+2b}{x-2b}=2$

जहाँ, $\frac{2ab}{2a}=b$ और $\frac{2ab}{2b}=a$

Ex. यदि $x=\frac{4\sqrt{15}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ है, तब $\frac{x+\sqrt{20}}{x-\sqrt{20}}+\frac{x+\sqrt{12}}{x-\sqrt{12}}$ का मान ज्ञात करें।

HINTS ऊपर बताई गई अवधारणा का उपयोग करके, हम व्यंजक का परिणाम 2 प्राप्त करेंगे।

$$\therefore \frac{x+\sqrt{20}}{x-\sqrt{20}}+\frac{x+\sqrt{12}}{x-\sqrt{12}}=2$$

☞ यदि $\frac{1}{(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}+1)}=A\sqrt[3]{a^2}+B\sqrt[3]{a}+C,$ तब

$A = 0;\ B=\frac{1}{a-1};\ C=\frac{-1}{a-1}$

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram @yct_publication

Ex. यदि $\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1} = a\sqrt[3]{4} + b\sqrt[3]{2} + c$ और a, b, c एक अभाज्य संख्या है, तब a + b + c का मान ज्ञात करें।

HINTS उपरोक्त परिणाम का उपयोग करते हुए, a = 0, b = 1, c = –1

अतः , a + b + c = 0 + 1 – 1 = 0

सर्वसमिका आधारित बीजगणितीय रूपांतरण

Ex. यदि $a^3 + 3a^2 + 9a = 1$ है, तब $a^3 + \frac{3}{a}$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $a^3 + 3a^2 + 9a = 1$ ......(i) × 3

$3a^3 + 9a^2 + 27a = 3$ ......(ii)

समीकरण (i) में 'a' से गुणा करें,

$a^4 + 3a^3 + 9a^2 = a$ .....(iii)

(ii) को (iii) से घटाएँ,

$a^4 - 27a = a - 3$

$\Rightarrow a^4 + 3 = 28a$

$\Rightarrow a^3 + \frac{3}{a} = 28$

Ex. यदि $a^2 + 3a + 3 = 0$ है, तब $a^3 + 6a^2 + 12a + 10$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $a^2 + 3a + 3 = 0$ .....(i) × a

$a^3 + 3a^2 + 3a = 0$ ....(ii)

समीकरण (i) में '3' से गुणा करें

$3a^2 + 9a + 9 = 3$ ... (iii)

समीकरण (ii) और (ii) को जोड़ें,

$a^3 + 6a^2 + 12a + 9 = 0$

$\therefore a^3 + 6a^2 + 12a + 10 = 1$

Ex. यदि $x^2 + 2 = 2x$, है, तो $x^4 - x^3 + x^2 + 2$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $x^2 - 2x + 2 = 0$ ...... (i) × x

$x^3 - 2x^2 + 2x = 0$ ...... (ii) × x

$x^4 - 2x^3 + 2x^2 = 0$ ...... (iii)

समीकरण (ii) और (iii) को जोड़ने पर,

$x^4 - x^3 + 2x = 0$

$\Rightarrow x^4 - x^3 + x^2 + 2 = 0$

कुछ महत्वपूर्ण सूत्र और परिणाम

सूत्र 1:-

- $1 + A + B + AB = (1 + A)(1 + B)$
- $(a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2) = a^4 + a^2b^2 + b^4$
- $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2$

सूत्र 2:-

$ab + bc + ca$ =

- $\frac{a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)}{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}$
- $\frac{a^3(b+c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3(c+a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^3(a+b)}{(c-a)(c-b)}$

सूत्र 3:-

- $\frac{a\times(b-c)^2}{(c-a)(a-b)} + \frac{b\times(c-a)^2}{(a-b)(b-c)} + \frac{c\times(a-b)^2}{(b-c)(c-a)} = a + b + c$
- $(a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2a(b + c + d) + 2b(c + d) + 2cd$
- $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b) = -(b - c)(c - a)(a - b)$
- $a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b) = (a + b + c)(ab + bc + ca) - 3abc$
- $a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2) = (b - c)(c - a)(a - b)$
- $ab(a - b) + bc(b - c) + ca(c - a) = (b - a)(b - c)(c - a)$
- $(b + c)(c + a)(a + b) + abc = (a + b + c)(ab + bc + ca)$
- $(x + a)(x + b)(x + c) = x^3 + x^2(a + b + c) + x(ab + bc + ca) + abc$

Ex. यदि $a^4 + a^2b^2 + b^4 = 24$ और $a^2 + ab + b^2 = 8$ है, तब ab का मान ज्ञात करें।

HINTS $a^2 + ab + b^2 = 8$

$a^4 + a^2b^2 + b^4 = 24$

$\Rightarrow a^2 - ab + b^2 = \frac{24}{8} = 3$

$a^2 - ab + b^2 = 3$ ...(i)

$a^2 + ab + b^2 = 8$ ...(ii)

समीकरण (i) और (ii) घटाने पर

$\Rightarrow -2ab = -5 \Rightarrow ab = 2.5$

Ex. यदि $ax + by = 8$, $ay - bx = 6$ और $a^2 + b^2 + x^2 + y^2 = 29$ है, तब $\frac{a^2+b^2}{x^2+y^2}$; $a^2 + b^2 > x^2 + y^2$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2 = 8^2 + 6^2$

$= 100$ (25, 4)

$\therefore \frac{a^2+b^2}{x^2+y^2} = \frac{25}{4}$

परिणाम 1:-

यदि $xy + yz + zx = 0$, तो

- $\frac{1}{x^2-yz} + \frac{1}{y^2-zx} + \frac{1}{z^2-xy} = 0$ $(x, y, z) \neq 0$
- $\frac{x^2}{x^2-yz} + \frac{y^2}{y^2-zx} + \frac{z^2}{z^2-xy} = 1$

परिणाम 2:-

- यदि $xy = 1$ या $x = \frac{1}{y}$ तो $\frac{1}{1+x^n} + \frac{1}{1+y^n} = 1$
- यदि $x = a + \frac{1}{a}$ और $y = a - \frac{1}{a}$ तो $\sqrt{x^4 + y^4 - 2x^2y^2} = 4$
- यदि $x \pm \frac{1}{y} = a$, $y \pm \frac{1}{z} = b$, $z \pm \frac{1}{x} = c$ तो, $xyz \pm \frac{1}{xyz} = abc \mp (a + b + c)$
- यदि $(a^2 + 1)(b^2 + 1) + N^2 = 2N(a + b)$ तो $a + \frac{1}{a} = N$
- यदि $a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}$ ($a \neq b \neq c$) तो abc बराबर है ±1
- यदि $bc + ca + ab = abc$, तो $\frac{b+c}{bc(a-1)} + \frac{c+a}{ca(b-1)} + \frac{a+b}{ab(c-1)} = 1$
- यदि $x^2 + y^2 = z + 1$, $y^2 + z^2 = x + 1$, $z^2 + x^2 = y + 1$, तो $xyz = 1$ or $-\frac{1}{8}$
- यदि $a + b + c = 2s$, तो $\frac{(s-a)^2 + (s-b)^2 + (s-c)^2 + s^2}{a^2 + b^2 + c^2} = 1$
- यदि $\left[\sqrt{(a^2 + b^2 + ab)} + \sqrt{(a^2 + b^2 - ab)}\right] = 1$ तो $(1 - a^2)(1 - b^2) = \frac{3}{4}$

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram @yct_publication

Ex. यदि $x = \frac{\sqrt{87}-\sqrt{71}}{\sqrt{55}+\sqrt{39}}$ और $y = \frac{\sqrt{87}+\sqrt{71}}{\sqrt{55}-\sqrt{39}}$ तो $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y} = ?$

HINTS यहाँ, $xy = \frac{\sqrt{87}-\sqrt{71}}{\sqrt{55}+\sqrt{39}} \times \frac{\sqrt{87}+\sqrt{71}}{\sqrt{55}-\sqrt{39}} = \frac{87-71}{55-39} = \frac{16}{16} = 1$

$\therefore \frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y} = 1$

Ex. यदि $x(x + y + z) = 9$, $y(x + y + z) = 16$ और $z(x + y + z) = 144$ है, तो x का मान ज्ञात करें।

HINTS $x(x+y+z) + y(x+y+z) + z(x+y+z) = 9 + 16 + 144$

$\Rightarrow (x + y + z)(x + y + z) = 169 \Rightarrow (x + y + z) = 13$

$\therefore x(x + y + z) = 9$

$\Rightarrow x = \frac{9}{13}$

द्विघात समीकरण

द्विघात समीकरण घात 2 का एक बहुपद समीकरण है।

इसका मानक रूप है:

$ax^2 + bx + c = 0$

जहाँ a, b, c, वास्तविक संख्याएँ हैं, और $a \neq 0$

- चर x के वे मान जो द्विघात समीकरण को संतुष्ट करते हैं, द्विघात समीकरण के मूल कहलाते हैं।

मूलों और गुणांकों के बीच संबंध

☞ यदि α और β समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल हैं

(i) मूलों का योग = $(\alpha+\beta) = \frac{-b}{a} = \frac{-x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

(ii) मूलों का गुणनफल = $(\alpha.\beta) = \frac{c}{a} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

☞ यदि मूल α और β ज्ञात हैं तो समीकरण इस प्रकार दिया गया है $x^2 - (\alpha + \beta)x + (\alpha.\beta) = 0$

☞ यदि α और β परिमेय संख्याएँ हैं और द्विघात समीकरण का एक मूल है $a + \sqrt{b}$ तो अन्य मूल है $(a - \sqrt{b})$ अर्थात (और इसके विपरीत)

Ex. द्विघात समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका एक मूल है $2 + \sqrt{3}$.

HINTS जैसे $\alpha = 2 +$, $\beta = 2 - \sqrt{3}$

मूलों का योग $(\alpha + \beta) = (2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) = 4$

मूलों का गुणनफल $(\alpha . \beta) = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$

सूत्र का उपयोग करने पर

$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha.\beta = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$

द्विघात समीकरण को हल करने की विधियाँ

गुणनखण्ड
- सबसे सरल विधि
- पारंपरिक रूप से सभी द्विघात समीकरणों पर लागू नहीं होता

पूर्ण वर्ग
- नियतांक को दूसरी ओर ले जाएं
- $x^2 = 1$ का गुणांक बनाएं
- x के गुणांक का आधा लें, उसका वर्ग करें और दोनों पक्षों में जोड़ें
- वर्गमूल निकालें

द्विघात सूत्र
- सूत्र:- $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- सभी समीकरणों के लिए लागू

@apna_channels

(1) गुणनखंडन विधि

Ex. $x^2 - 15x + 56 = 0$

चरण 1: गुणनखंड निकालिए

56 के दो गुणनखंड ज्ञात कीजिए जिनका योग 15 हो। गुणनखंड 8 और 7 हैं क्योंकि $8 \times 7 = 56$ और $8 + 7 = 15$

चरण 2: चिन्ह बदलना

द्विघात समीकरण	धनात्मक/ऋणात्मक मूल
• $ax^2 + bx + c = 0$	x के दोनों मान ऋणात्मक हैं
• $ax^2 - bx + c = 0$	x के दोनों मान धनात्मक हैं
• $ax^2 + bx - c = 0$	x का एक मान –ve है और एक +ve है
• $ax^2 - bx - c = 0$	x का एक मान +ve है और एक –ve है

गुणनखंडों के चिह्न बदलें। अत:, गुणनखंड = 8, 7

चरण 3 : x^2 के गुणांक से विभाजित करें

चूँकि x^2 का गुणांक 1 है, इसलिए 1 से भाग देने पर मान नहीं बदलता।

चरण 4: मूल

द्विघात समीकरण के मूल 8 और 7 हैं।

(2) पूर्ण वर्ग

Ex. $x^2 - 15x + 56 = 0$

HINTS $x^2 - 15x = -56$

$\Rightarrow x^2 - 15x + \left(\frac{15}{2}\right)^2 = -56 + \left(\frac{15}{2}\right)^2$

$\Rightarrow \left(x - \frac{15}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow x - \frac{15}{2} = \pm\frac{1}{2}$

$\Rightarrow x = 8, 7$

(3) द्विघात सूत्र (श्रीधराचार्य सूत्र)

☞ समीकरण के दो मूल $ax^2 + bx + c = 0$ हैं

$= \alpha = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$

$= \beta = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$

Ex. $x^2 - 15x + 56 = 0$

HINTS $D = b^2 - 4ac = 15^2 - 4 \times 1 \times 56 = 1$

$\alpha = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{15+1}{2} = 8$

$= \beta = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{15-1}{2} = 7$

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram @yct_publication

मूलों की प्रकृति

द्विघात समीकरण के मूलों की प्रकृति विभेदक पर निर्भर करती है, जो द्विघात सूत्र में वर्गमूल के अंतर्गत व्यंजक है।

$ax^2 + bx + c = 0$

विभेदक (D) = $b^2 - 4ac$

मूल की प्रकृति

- यदि D = 0 → मूल वास्तविक और समान हैं
- यदि D > 0
  - D = पूर्ण वर्ग → मूल, वास्तविक, असमान और परिमेय हैं
  - D = पूर्ण वर्ग नहीं → मूल, वास्तविक, असमान और अपरिमेय हैं
- यदि D < 0 → मूल काल्पनिक हैं

Ex. m के किस मान के लिए समीकरण $4x^2 + 6mx + 9 = 0$ के मूल समान हैं।

HINTS द्विघात समीकरण का मानक रूप

$ax^2 + bx + c = 0$ और $4x^2 + 6mx + 9 = 0$

मानक समीकरण की तुलना करने पर हमें मिलता है।

a = 4, b = 6m और c = 9

यदि मूल समान हैं ⇒ $b^2 - 4ac = 0$

⇒ $36m^2 = 144 \Rightarrow m = \pm 2$

Ex. यदि $x^2 - 5x + 6 = 0$, मूलों की प्रकृति का पता लगाएं।

HINTS a = 1, b = –5, c = 6

$D = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6$

= 25 – 24 = 1 (पूर्ण वर्ग)

अतः, मूल वास्तविक, परिमेय और भिन्न हैं।

Ex. यदि $\sqrt{2}\,t^2 - 3t + 3\sqrt{2} = 0$, मूलों की प्रकृति का पता लगाएं।

HINTS यहाँ, a = $\sqrt{2}$, b = – 3, c = 3

$D = b^2 - 4ac = 9 - 24 = -15$

D < 0

∴ मूल काल्पनिक हैं।

समान मूलों के लिए शर्तें

दो द्विघात समीकरणों पर विचार करें: $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$

$a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$

(i) दोनों समान मूल होने की शर्त :

(ii) एक समान मूल होने की शर्त :

$(a_1b_2 - a_2b_1)(b_1c_2 - b_2c_1) = (c_1a_2 - c_2a_1)^2$

Ex. यदि समीकरण $x^2 + 2x - 3 = 0$ तथा $x^2 + 3x - m = 0$ एक समान मूल है, तो m का गैर-शून्य मान है।

HINTS $(a_1b_2 - a_2b_1)(b_1c_2 - b_2c_1) = (c_1a_2 - c_2a_1)^2$

$\Rightarrow [1 \times 3 - 1 \times 2][2 \times (-m) - 3 \times (-3)] = [(-3) \times 1 - (-m) \times 1]^2$

$\Rightarrow (3 - 2)(-2m + 9) = (-3 + m)^2$

$\Rightarrow -2m + 9 = 9 + m^2 - 6m$

$\Rightarrow m^2 - 4m = 0$

$\Rightarrow m(m - 4) = 0$

$\Rightarrow m = 4 \ (\because m \neq 0)$

त्रिघात समीकरण

- यदि α, β और γ घन समीकरण के मूल हैं।

  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

  तो,

  मूलों का योग $(\alpha + \beta + \gamma) = -\frac{b}{a} = -\frac{x^2 \text{ का गुणांक}}{x^3 \text{ का गुणांक}}$

  दो मूलों के गुणनफल का योग $(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = \frac{c}{a} = \frac{x \text{ का गुणांक}}{x^3 \text{ का गुणांक}}$

  मूलों का गुणनफल $(\alpha\beta\gamma) = -\frac{d}{a} = -\frac{\text{अचर पद}}{x^3 \text{ का गुणांक}}$

- यदि α, β और γ घन समीकरण के मूल हैं, तो समीकरण है:

  $x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma = 0$

गुणनखंड सूत्र

- $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$
- $(x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab$
- $(x - a)(x + b) = x^2 - (a - b)x - ab$
- $(x + a)(x - b) = x^2 + (a - b)x - ab$

द्विघात समीकरण गुणनखंड और शेषफल प्रमेय

☞ $(x + k)$ एक बहुपद $f(x)$ का गुणनखंड है तो $f(-k) = 0$

☞ $(ax + k)$ एक बहुपद $f(x)$ का गुणनखंड है तो $f\left(-\frac{k}{a}\right) = 0$

☞ $(ax - k)$ एक बहुपद $f(x)$ का गुणनखंड है तो $f\left(\frac{k}{a}\right) = 0$

☞ $(x - a)(x - b)$ एक बहुपद $f(x)$ का गुणनखंड है तो $f(a) = 0$ और $f(b) = 0$

☞ यदि एक बहुपद $f(x)$ को $(x + k)$ से विभाजित किया जाता है, तो शेषफल $x = -k$ पर $f(x)$ का मान होता है अर्थात $f(-k)$

☞ यदि एक बहुपद $f(x)$ को $(k - ax)$ से विभाजित किया जाता है तो शेषफल $x = \frac{k}{a}$ पर $f(x)$ का मान होता है अर्थात $f\left(\frac{k}{a}\right)$

Ex. यदि $2x^2 + kx + 8$ को $(x + 2)$ से विभाजित किया जाता है तो शेषफल 3k आता है, तो k का मान ज्ञात करें।

HINTS $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

$R = 2(-2)^2 + (-2)k + 8 = 8 - 2k + 8 = 16 - 2k$

$\Rightarrow 3k = 16 - 2k \Rightarrow 5k = 16 \Rightarrow k = \frac{16}{5}$

Ex. जब $3x^4 - 2x^2 + 4x - 1$ को $2x - 1$ से विभाजित करते हैं, तो शेषफल ज्ञात कीजिए।

HINTS शेषफल ज्ञात करने के लिए $2x - 1$ रखने पर $= 2x - 1 = 0$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$

शेषफल $= 3\left(\frac{1}{2}\right)^4 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{2}\right) - 1$

$= \frac{3}{16} - \frac{1}{2} + 2 - 1 = \frac{3}{16} + \frac{1}{2} = \frac{11}{16}$

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram @yct_publication

Ex. जब $f(x) = 15x^3 - 14x^2 - 4x + 10$ को $(3x + 2)$ से विभाजित किया जाता है, तो शेषफल है:

HINTS $f(x) = 15x^3 - 14x^2 - 4x + 10$

$3x + 2 = 0 \Rightarrow 3x = -2$

$R = 3x \times 5x^2 - 14x^2 - 4x + 10$

$= -2 \times 5x^2 - 14x^2 - 4x + 10$

$= -24x^2 - 4x + 10$

$= -3x \times 8x - 4x + 10$

$= 16x - 4x + 10 = 12x + 10$

$= 3x \times 4 + 10 = -2 \times 4 + 10 = 2$

बीजगणित में अधिकतम और न्यूनतम मानों की अवधारणा

अवधारणा-01

	अधिकतम मान	न्यूनतम मान
विषम घात (x)	$+\infty$	$-\infty$
सम घात (x^2)	$+\infty$	0

Ex. (i)

$18 + (x^2)$ → अधिकतम $\to +\infty$; न्यूनतम $\to 0$

$(18 + x^2)$ का न्यूनतम मान $= 18 + 0 = 18$

$(18 + x^2)$ का अधिकतम मान $= 18 + \infty = \infty$

(ii)

$18 + (x^3)$ → अधिकतम $\to +\infty$; न्यूनतम $\to -\infty$

$(18 + x^3)$ का न्यूनतम मान $= 18 - \infty = -\infty$

$(18 + x^3)$ का अधिकतम मान $= 18 + \infty = \infty$

अवधारणा-02

द्विघात समीकरण में $ax^2 + bx + c = 0$

- यदि $a > 0$, तो द्विघात समीकरण का मान $x = \frac{-b}{2a}$ पर न्यूनतम होगा। यह न्यूनतम मान द्वारा $\frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{-D}{4a}$ दिया गया है लेकिन सबसे बड़ा मान नहीं है।
- यदि $a < 0$, तो द्विघात समीकरण का मान $x = \frac{-b}{2a}$ पर अधिकतम होगा। यह अधिकतम मान द्वारा $\frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{-D}{4a}$ दिया गया है लेकिन इसका कोई न्यूनतम मान नहीं है।

Ex. $f(x) = x^2 - 4x + 3$

HINTS यहाँ, $a > 0$,

$a = 1, b = -4, c = 3$

न्यूनतम मान $= \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 \times 3 \times 1 - (-4)^2}{4 \times 1} = -1$

Ex. $f(x) = -2x^2 + 8x + 1$

HINTS यहाँ, $a < 0$,

$a = -2, b = 8, c = 1$

अधिकतम मान $= \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 \times (-2) \times 1 - 8^2}{4 \times (-2)} = 9$

अवधारणा-03

यदि a, b +ve संख्याएँ हैं तो,

AM ≥ GM

$\Rightarrow \frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}$, $(a, b > 0) \Rightarrow (a + b) \geq 2\sqrt{ab}$

Ex. यदि x एक वास्तविक संख्या है, तो $x^2 + \frac{1}{x^2} = ?$ का न्यूनतम मान क्या होगा?

HINTS माना, $a = x^2, b = \frac{1}{x^2}$

AM ≥ GM $\Rightarrow \frac{x^2 + \frac{1}{x^2}}{2} \geq \sqrt{x^2 \times \frac{1}{x^2}} \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2$

समानता तब होती है जब, $x^2 = \frac{1}{x^2} \Rightarrow x^4 = 1$

चूँकि x वास्तविक है, $x = 1$ या $x = -1$

इन मानों के लिए, $x^2 + \frac{1}{x^2} = (1)^2 + \frac{1}{(1)^2} = 2$

$x^2 + \frac{1}{x^2} = (-1)^2 + \frac{1}{(1)^2} = 2$

यदि a +ve संख्या है, तो $a + \frac{1}{a} \geq 2 \to$ न्यूनतम

यदि a वास्तविक संख्या है तो , तो $a^2 + \frac{1}{a^2} \geq 2 \to$ न्यूनतम

अधिकतम मान $\to \infty$

अवधारणा-04

यदि $x + y = a$, तो $x \times y$ का मान $x = y$ पर अधिकतम होगा, **'या'**

यदि $a + b + c$ ......(n संख्या) $= k$

तो, अधिकतम मान $(abc) = \left(\frac{k}{n}\right)^n$

Ex. यदि $x + y = 100$, xy का अधिकतम मान क्या है ?

HINTS $x + y = 100$

$\Rightarrow x = y = 50$

$\therefore xy = 50 \times 50 = 2500$

अवधारणा - 05

यदि abc = k, तो a + b + c का न्यूनतम मान तभी संभव है जब a = b = c, 'या'

यदि abc ......(n संख्या) = k

तो न्यूनतम (a + b + c + ...)

$= n\sqrt[n]{k}$

Ex. यदि a, b, c +ve हैं और abc = 125 है, तब a + b + c का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए।

HINTS abc = 125

$\Rightarrow a = b = c = 5$

$\therefore a + b + c = 5 + 5 + 5 = 15$

Ex. यदि x, y और z धनात्मक हैं और $x + y + z = 1$ है, तो $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए।

HINTS $x + y + z = 1$

$\Rightarrow x = y = z = \frac{1}{3}$

$\therefore$ न्यूनतम मान $= \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{\frac{1}{3}} + \frac{1}{\frac{1}{3}} + \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3 + 3 + 3 = 9$

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

अध्याय 10

त्रिकोणमिति

त्रिकोणमिति शब्द दो ग्रीक शब्दों से लिया गया है:

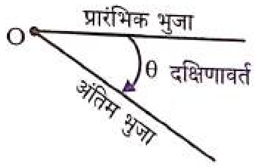
त्रिकोणमिति

- **ट्रिगोनोन** (इसका अर्थ है त्रिभुज)
- **मेट्रॉन** (इसका अर्थ है माप)

अतः त्रिकोणमिति का अर्थ है त्रिभुज की भुजाओं और कोण को मापना

कोण:- यह किसी किरण के प्रारंभिक भुजा से अंतिम भुजा तक के घुमाव का माप होता है।

सकारात्मक कोण



ऋणात्मक कोण

मूलभूत कोणीय पद्धति

कोणों के मापन के लिए दो पद्धतियों का उपयोग किया जाता है

1. षाष्टिक (सेक्सेजिमल) पद्धति
2. वृत्तीय पद्धति

(1) सेक्सेजिमल पद्धति:

एक डिग्री:- प्रारंभिक पक्ष से टर्मिनल पक्ष तक का घुमाव यदि एक चक्कर का $\left(\frac{1}{360}\right)^{\text{वां}}$ भाग हो तो, उस कोण को एक डिग्री का माप कहा जाता है, जिसे 1° के रूप में लिखा जाता है।

- 1° = 60 मिनट (60' के रूप में लिखा जाता है)
- 1 मिनट (1') = 60 सेकंड (60" के रूप में लिखा जाता है)

Ex: डिग्री, मिनट और सेकंड को दशमलव डिग्री में बदलें।

941° 27' 8"

HINTS $941°\ 27'\ 8" = 941° + \frac{27}{60} + \frac{8}{60\times60}$

$= 941° + \frac{9°}{20} + \frac{1°}{450} = 941° + 0.45° + 0.0022° = 941.452°$

Ex. दशमलव डिग्री को डिग्री, मिनट और सेकंड में बदलें।

48.63°.

HINTS $48.63° \rightarrow D°M'S" \Rightarrow D° = 48°$

$M' = 0.63° \times 60 = 37.8 \Rightarrow M' = 37'$

$S" = 0.8 \times 60 = 48"$

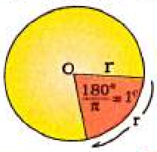
$D°M'S" = 48.63° = 48°37'48"$

(2) वृत्तीय पद्धति:

एक रेडियन: किसी वृत्त के केंद्र पर उस चाप द्वारा अंतरित कोण, जिसकी लंबाई वृत्त की त्रिज्या के बराबर होती है, उसे एक रेडियन कहा जाता है। जिसे 1^c के रूप में लिखा जाता है

$2\pi r \rightarrow 360°$

$r \rightarrow \frac{360°}{2\pi} = \frac{180°}{\pi} = 1$ रेडियन (1^c)



परिधि और व्यास का अनुपात सदैव निश्चित तथा π के बराबर होता है।

$\frac{\text{परिधि}}{\text{व्यास}} = \pi$

कोणों का माप/मापन	
x डिग्री	$\left(\frac{\pi}{180°}\times x\right)$ रेडियन
x रेडियन	$\left(\frac{180°}{\pi}\times x\right)$ डिग्री
$1^c\left(\pi\times\frac{22}{7}\right)$	57°16'22"
1^c (π = 3.141592...)	57°17'21"
1^c	0.01746 रेडियन

Ex: $\frac{-53\pi}{10}$ को डिग्री माप में बदलें।

HINTS हम जानते है कि, 1 रेडियन $= \frac{180°}{\pi}$

$\frac{-53\pi}{10}\times\frac{180°}{\pi} = 18\times(-53) = -954°$

पाइथागोरस त्रिक

तीन पूर्णांकों, a, b, और C का एक समूह, जो पाइथागोरस प्रमेय $(a^2 + b^2 = c^2)$ को संतुष्ट करता है, पाइथागोरस त्रिक कहलाता है। ये पूर्णांक समकोण त्रिभुज की भुजाओं को दर्शाते हैं।

सबसे छोटा पाइथागोरस त्रिक (3, 4, 5) है।

कुछ महत्वपूर्ण पाइथागोरस त्रिक

मूल त्रिक	गुणक	प्राप्त त्रिक	
3 4 5	×1/2	1.5, 2, 2.5	1, 1, $\sqrt{2}$
	×2	6, 8, 10	9, 40, 41
	×3	9, 12, 15	11, 60, 61
	×4	12, 16, 20	12, 35, 37
	×5	15, 20, 25	16, 63, 65
			13, 84, 85
5, 12, 13,	×2	10, 24, 26	20, 21, 29
7, 24, 25,	×1/2	3.5 12, 12.5	39, 80, 89
	×2	14, 48, 50	36, 77, 85
	×3	21, 72, 75	65, 72, 97
			20, 99, 101

$(2n, n^2-1, n^2+1)\ \left(\frac{n^2+1}{2}, \frac{n^2-1}{2}, n\right)$

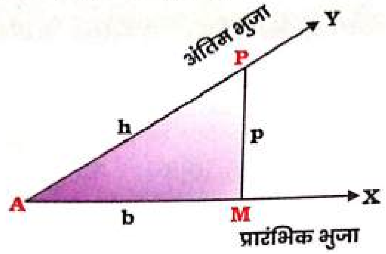
त्रिक के दो छोटे मानों का गुणनफल हमेशा 4 और 6 का गुणज होता है।

@apna_channels
Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

मूलभूत त्रिकोणमितीय अनुपात

माना, ∠YAX = θ एक न्यून कोण है।



चित्र में,

p = लम्ब, b = आधार, h = कर्ण

पाइथागोरस प्रमेय से

$\Rightarrow p^2 + b^2 = h^2$

h सदैव p और b से बड़ा होता है

(i) $\sin\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{p}{h}$

(ii) $\cos\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{b}{h}$

(iii) $\tan\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{p}{b} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

(iv) $\text{cosec}\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}} = \frac{h}{p}$

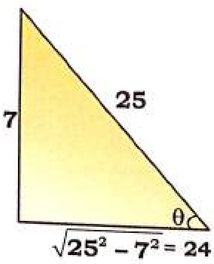
(v) $\sec\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} = \frac{h}{b}$

(vi) $\cot\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}} = \frac{b}{p} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

sin	cos	tan	
↓	↓	↓	
p	b	p	pandit badri prasad
h	h	b	har har bol
↑	↑	↑	
cosec	sec	cot	

Ex: यदि $\sin\theta = \frac{7}{25}$, तो cosθ और tanθ क्रमशः: _____ हैं।

(जहाँ θ प्रथम चतुर्थांश में है)

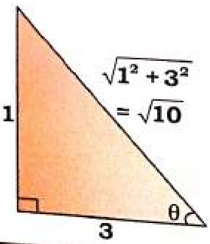


HINTS $\sin\theta = \frac{7}{25}$ → p, → h

$\cos\theta = \frac{b}{h} = \frac{24}{25}$,

$\tan\theta = \frac{p}{b} = \frac{7}{24}$

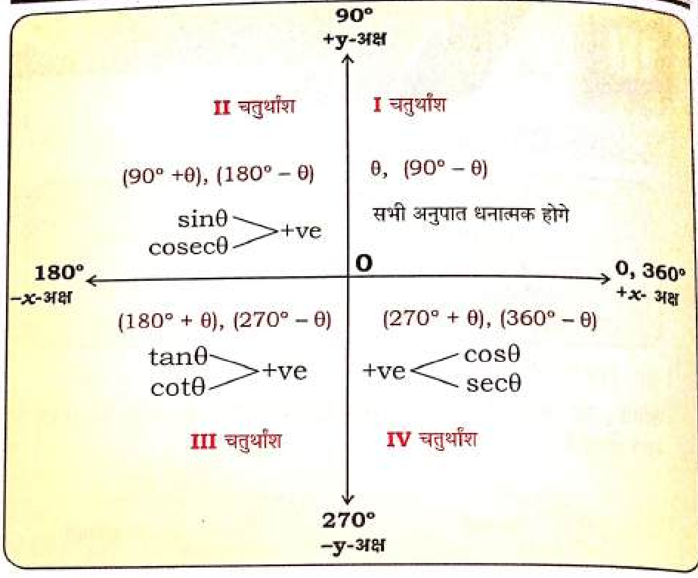
Ex: यदि $\tan\theta = \frac{1}{3}$ हो तो secθ का मान क्या है?

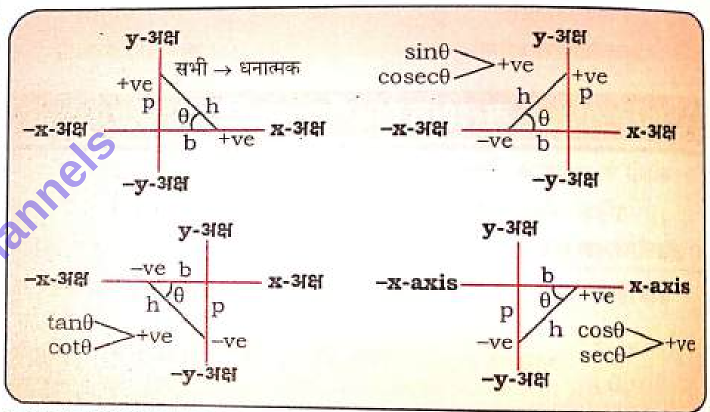


HINTS $\tan\theta = \frac{1}{3}$ → p, → b

$\sec\theta = \frac{h}{b} = \frac{\sqrt{10}}{3}$

त्रिकोणमितीय अनुपातों के चिह्न





रूपांतरण नियम

☞ नियम 01: 90° ± θ के लिए, 90° ± θ के विषम गुणज

$\sin(90° \pm \theta) = \cos\theta$	$\text{cosec}(90° \pm \theta) = \sec\theta$
$\cos(90° \pm \theta) = \mp\sin\theta$	$\sec(90° \pm \theta) = \mp\text{cosec}\theta$
$\tan(90° \pm \theta) = \mp\cot\theta$	$\cot(90° \pm \theta) = \mp\tan\theta$
$\sin(270° \pm \theta) = -\cos\theta$	$\text{cosec}(270° \pm \theta) = -\sec\theta$
$\cos(270° \pm \theta) = \pm\sin\theta$	$\sec(270° \pm \theta) = \pm\text{cosec}\theta$
$\tan(270° \pm \theta) = \mp\cot\theta$	$\cot(270° \pm \theta) = \mp\tan\theta$

☞ नियम 02: 0° ± θ के लिए, 90° ± θ के सम गुणज

त्रिकोणमितीय अनुपातों में कोई परिवर्तन नहीं होता, केवल चिह्न में परिवर्तन होता है।

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$	$\text{cosec}(-\theta) = -\text{cosec}\theta$
$\cos(-\theta) = \cos\theta$	$\sec(-\theta) = \sec\theta$
$\tan(-\theta) = -\tan\theta$	$\cot(-\theta) = -\cot\theta$
$\sin(180° \pm \theta) = \mp\sin\theta$	$\text{cosec}(180° \pm \theta) = \mp\text{cosec}\theta$
$\cos(180° \pm \theta) = -\cos\theta$	$\sec(180° \pm \theta) = -\sec\theta$
$\tan(180° \pm \theta) = \pm\tan\theta$	$\cot(180° \pm \theta) = \pm\cot\theta$

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

मानक कोणों का मान

डिग्री	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
रेडियन	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
sinθ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	−1	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0
cosθ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	−1	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tanθ	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	(ND) ∞	$-\sqrt{3}$	−1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	(ND) ∞	$-\sqrt{3}$	−1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
cotθ	(ND) ∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	−1	$-\sqrt{3}$	(ND) ∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	−1	$-\sqrt{3}$	(ND) ∞
secθ	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	(ND) ∞	−2	$-\sqrt{2}$	$\frac{-2}{\sqrt{3}}$	−1	$\frac{-2}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{2}$	−2	(ND) ∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
cosecθ	(ND) ∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	(ND) ∞	−2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	−1	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{2}$	−2	(ND) ∞

Ex. $\frac{\sin(270°+\theta).\cos(360°+\theta).\tan(170°+\theta).\ \sin 60°}{\cos(180°+\theta).\sin(270°-\theta).\cot(260°+\theta).\ \cos 30°}$

HINTS $\frac{\sin(270°+\theta).\cos(360°+\theta).\tan(170°+\theta).\ \sin 60°}{\cos(180°+\theta).\sin(270°-\theta).\cot(260°+\theta).\ \cos 30°}$

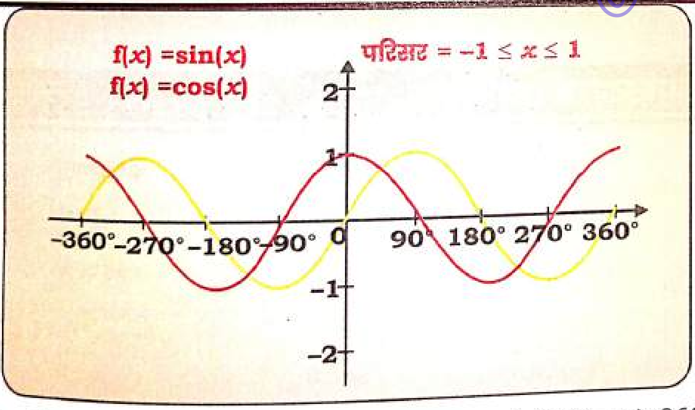
$$= \frac{-\cos\theta\cos\theta\tan(180°+\theta-10°)\frac{\sqrt{3}}{2}}{\cos\theta(-\cos\theta)\cot(270°+\theta-10°)\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-1\times\tan(\theta-10°)}{-\tan(\theta-10°)} = 1$$

Ex. cosec (1020°) का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS cosec (1020°) = cosec(3 × 360° – 60°)

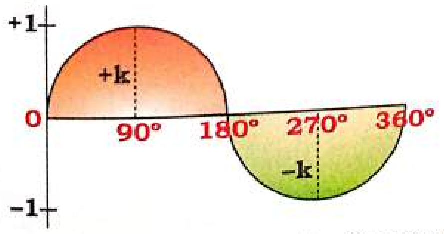
$= -\ \text{cosec}60° = \frac{-2}{\sqrt{3}}$

SINE और COSINE ग्राफ



Ex. sin0° + sin10° + sin20° + sin30° ..... + sin350° + sin360° मान ज्ञात कीजिए।

HINTS



चूँकि 0° से शुरू करके 360° तक समान अंतर के साथ बढ़ने पर sine अनुपात का योग 0 हो जाता है।

∴ sin0° + sin10° + sin20° + sin30° ..... + sin350° + sin360° = 0

त्रिकोणमितीय फलनों का डोमेन और परिसर

फलन	डोमेन	परिसर
sine	R	[−1, 1]
cosine	R	[−1, 1]
tan	$R-\left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}:n\in Z\right\}$	R
cot	$R-\{n\pi:n\in Z\}$	R
sec	$R-\left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}:n\in Z\right\}$	R−(−1, 1)
cosec	$R-\{n\pi:n\in Z\}$	R−(−1, 1)

	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0

0° से 90° तक sinθ का मान 0 से 1 तक बढ़ता है और cosθ का मान 1 से 0 तक घटता है।

जब θ किसी विशेष सीमा में है तो त्रिकोणमितीय फलनों के बीच का संबंध

θ	sinθ vs cosθ	tanθ vs cotθ	secθ vs cosecθ
0° < θ < 45°	sinθ < cosθ	tanθ < 1 cotθ > 1	secθ < cosecθ
θ = 45°	sinθ = cosθ	tanθ = cotθ	secθ = cosecθ
45° < θ < 90°	sinθ > cosθ	tanθ > 1 cotθ < 1	secθ > cosecθ

Ex. निम्न में कौन बड़ा है: sin61° or cos32°

HINTS sin61° > cos (90 – 58)°

∴ sin61° > sin58°

यह सत्य है क्योंकि sine फंक्शन 0° से 90° तक बढ़ता है।

@apna_channels
Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. cos23° या sin 57° में से कौन अधिक है?

HINTS sin57° = sin(90° – 33°) = cos33°

cos23° > cos33°

यह सत्य है क्योंकि cosine फंक्शन 0° से 90° तक घटता है।

Ex. 0° < θ < 90° के लिए निम्नलिखित में से कौन सा सत्य है?

(a) $\cos\theta \le \cos^2\theta$ (b) $\cos\theta > \cos^2\theta$

(c) $\cos\theta < \cos 2\theta$ (d) $\cos\theta \ge \cos^2\theta$

HINTS

(b) 0° (cos0° = 1) से 90° (cos90° = 0) के लिए

माना θ = 60°

$\cos 60° = 0.5 \Rightarrow \cos^2 60° = (0.5)^2 = 0.25$

इसलिए $\cos\theta > \cos^2\theta$

∴ यह सत्य है क्योंकि cosine फंक्शन 0° से 90° तक घटता है।

Ex. निम्नलिखित में से कौन सा संबंध 0° < θ < 90° के लिए सही है?

(a) $\sin\theta = \sin^2\theta$

(b) $\sin\theta < \sin^2\theta$

(c) $\sin\theta > \sin^2\theta$

(d) $\sin\theta = \text{cosec}\theta$

HINTS

(c) 0° < θ < 90° के लिए, 0 < sinθ < 1

0° और 90° के बीच का कोई भी मान रखें।

θ = 30° पर, $\sin\theta = \frac{1}{2}$

$\sin^2\theta = \frac{1}{4}$

स्पष्ट रूप से, $\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$

∴ $\sin\theta > \sin^2\theta$

0° < θ < 90° के लिए, sinθ और cosθ हमेशा 0 से बड़ा और 1 से छोटा होता है (यानी, 0 < sinθ < 1 और 0 < cosθ < 1) जब भी हम किसी संख्या का वर्ग करते हैं जैसे कि 0 < संख्या < 1 (जैसे, 0.1, 0.25, 0.45), तो प्राप्त वर्ग हमेशा मूल संख्या से छोटा होता है।

Ex. cos25° – sin25° का मान है

(a) धनात्मक लेकिन 1 से कम

(b) धनात्मक लेकिन 1 से अधिक

(c) ऋणात्मक

(d) 0

HINTS

(a) 0° < θ < 45°, cosθ > sinθ

इसलिए, cos 25° - sin 25° का मान सदैव धनात्मक होता है, लेकिन 1 से कम होता है।

Ex. निम्नलिखित में से कौन सा सही है?

(a) sin 35° > cos 55°

(b) $\cos 61° > \frac{1}{2}$

(c) $\sin 32° > \frac{1}{2}$

(d) tan 44° > 1

@apna_channels

HINTS

(c) sinθ, 0° से 90° तक बढ़ता है

∴ $\sin 30° = \frac{1}{2}$

∴ $\sin 32° > \frac{1}{2}$

त्रिकोणमितीय अनुपात के रूपांतरण की तालिका

	sinθ	cosθ	tanθ	cotθ	secθ	cosecθ
sinθ	–	$\sqrt{1-\cos^2\theta}$	$\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{\sec^2\theta-1}}{\sec\theta}$	$\frac{1}{\text{cosec}\,\theta}$
cosθ	$\sqrt{1-\sin^2\theta}$	–	$\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$	$\frac{\cot\theta}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$	$\frac{1}{\sec\theta}$	$\frac{\sqrt{\text{cosec}^2\theta-1}}{\text{cosec}\,\theta}$
tanθ	$\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta}$	–	$\frac{1}{\cot\theta}$	$\sqrt{\sec^2\theta-1}$	$\frac{1}{\sqrt{\text{cosec}^2\theta-1}}$
cotθ	$\frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta}$	$\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$	$\frac{1}{\tan\theta}$	–	$\frac{1}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}$	$\sqrt{\text{cosec}^2\theta-1}$
secθ	$\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$	$\frac{1}{\cos\theta}$	$\sqrt{1+\tan^2\theta}$	$\frac{\sqrt{1+\cot^2\theta}}{\cot\theta}$	–	$\frac{\text{cosec}\,\theta}{\sqrt{\text{cosec}^2\theta-1}}$
cosecθ	$\frac{1}{\sin\theta}$	$\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\tan\theta}$	$\sqrt{1+\cot^2\theta}$	$\frac{\sec\theta}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}$	–

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

कोणों के योग की अवधारणा

1. यदि A + B = 90°
- $\sin^2A + \sin^2B = 1$
- $\cos^2A + \cos^2B = 1$
- sinA secB = 1
- cosA cosecB = 1
- tanA tanB = 1
- cotA cotB = 1

यहाँ, A और B पूरक कोण है।

Ex. निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए।

tan 11°tan41°tan45°tan49°tan79°

HINTS यदि A + B = 90° तो tanA tanB = 1

tan11° tan41°tan45° tan49° tan79° = 1

Ex. $\sin^2 5° + \sin^2 10° + \sin^2 80° + \sin^2 85°$ मान क्या है?

HINTS यदि A + B = 90° तो $\sin^2A + \sin^2B = 1$

$\therefore \sin^2 5° + \sin^2 10° + \sin^2 80° + \sin^2 85°$

$= \sin^2 5° + \sin^2 85° + \sin^2 10° + \sin^2 80° = 1 + 1 = 2$

Ex. यदि tan2θ. tan7θ = 1 तो sin3θ + cos12θ का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS 2θ + 7θ = 90°

⇒ θ = 10°

∴ sin3θ + cos12θ = sin30° + cos120°

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

2. यदि A + B = 45° or 225°
- (1+ tanA)(1+ tanB)= 2
- (1– cotA)(1 – cotB) = 2

Ex. $\left[1+\tan\left(22\frac{1}{2}^\circ + x - y\right)\right]\left[1+\tan\left(22\frac{1}{2}^\circ + y - x\right)\right]$

HINTS यहाँ, $22\frac{1}{2}^\circ + x - y + 22\frac{1}{2}^\circ + y - x = 45°$

$\therefore \left[1+\tan\left(22\frac{1}{2}^\circ + x - y\right)\right]\left[1+\tan\left(22\frac{1}{2}^\circ + y - x\right)\right] = 2$

Ex. (1 + tan11°) (1 + tan 21°) (1 + tan 24°) (1 + tan 34°) (1 + tan 45°) का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS

(1 + tan11°) (1 + tan21°) (1 + tan24°) (1 + tan34°) (1 + tan45°)

= 2 × 2 × 2 = 8

3. यदि A + B = 135°
- (1 – tanA)(1 – tanB)= 2
- (1 + cotA)(1 + cotB) = 2

Ex. यदि x + y = 405° तो $\left(1-\tan\frac{x}{3}\right)\left(1-\tan\frac{y}{3}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS प्रश्नानुसार, x + y = 405°

दोनों पक्षों को 3 से विभाजित करने पर, हमें प्राप्त होता है-

$\frac{x}{3}+\frac{y}{3} = \frac{405°}{3} \Rightarrow \frac{x}{3}+\frac{y}{3} = 135°$

$\therefore \left(1-\tan\frac{x}{3}\right)\left(1-\tan\frac{y}{3}\right) = 2$

4. यदि A + B=30°
- $\sqrt{3}\tan A + \sqrt{3}\tan B + \tan A.\tan B = 1$
- $\cot A.\cot B - \sqrt{3}\cot A - \sqrt{3}\cot B = 1$
- $(\sqrt{3}+\tan A)(\sqrt{3}+\tan B) = 4$
- $(\sqrt{3}-\cot A)(\sqrt{3}-\cot B) = 4$

Ex. यदि A + B = 30° तो cotA.cotB – $\sqrt{3}$ cotA – $\sqrt{3}$ cotB का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS हम जानते हैं, A + B = 30°

तो cotA.cotB – $\sqrt{3}$ cotA – $\sqrt{3}$ cotB =1

त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ

(I) मूलभूत त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ

- $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
  - $\sin^4\theta + \cos^4\theta = 1 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta$
  - $\sin^6\theta + \cos^6\theta = 1 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta$
  - $\sec^2\theta + \csc^2\theta = \sec^2\theta \csc^2\theta$

Ex. व्यंजक $4(\sin^6A + \cos^6A) - 6(\sin^4A + \cos^4A) + 8$ का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS $4(\sin^6A + \cos^6A) - 6(\sin^4A + \cos^4A) + 8$

$= 4(1 - 3\sin^2A\cos^2A) - 6(1 - 2\sin^2A\cos^2A) + 8$

$= 4 - 12\sin^2A\cos^2A - 6 + 12\sin^2A\cos^2A + 8 = 6$

Ex. यदि $\sin A + \cos A = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, तो $\sin^4A + \cos^4A$ का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS $1 + 2\sin A\cos A = \frac{1}{8} \Rightarrow \sin A\cos A = -\frac{7}{16}$

$\therefore \sin^4A + \cos^4A = 1 - 2\sin^2A\cos^2A = 1 - 2 \times \left(-\frac{7}{16}\right)^2$

$= 1 - 2 \times \frac{49}{256} = 1 - \frac{49}{128} = \frac{79}{128}$

- $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$
  - $\sec^4\theta + \tan^4\theta = 1 + 2\sec^2\theta\tan^2\theta$
  - $\sec^4\theta - \tan^4\theta = \sec^2\theta + \tan^2\theta$
  - $\sec^6\theta - \tan^6\theta = 1 + 3\sec^2\theta\tan^2\theta$

Ex. व्यंजक $1 - \frac{\tan^2\theta}{\sec^2\theta}$ का मान ज्ञात कीजिए:

HINTS $1 - \frac{\tan^2\theta}{\sec^2\theta} = \frac{\sec^2\theta - \tan^2\theta}{\sec^2\theta} = \frac{1}{\sec^2\theta} = \cos^2\theta$

@apna_channels
Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

- $\csc^2\theta - \cot^2\theta = 1$ →
  - $\csc^4\theta + \cot^4\theta = 1 + 2\csc^2\theta\cot^2\theta$
  - $\csc^4\theta - \cot^4\theta = \csc^2\theta + \cot^2\theta$
  - $\csc^6\theta - \cot^6\theta = 1 + 3\csc^2\theta\cot^2\theta$

Ex. व्यंजक $2(\csc^6\theta - \cot^6\theta) - 3(\csc^4\theta + \cot^4\theta)$ का मान ज्ञात कीजिए

HINTS $2(\csc^6\theta - \cot^6\theta) - 3(\csc^4\theta + \cot^4\theta)$

$= 2(1 + 3\csc^2\theta\cot^2\theta) - 3(1 + 2\csc^2\theta\cot^2\theta)$

$= 2 + 6\csc^2\theta\cot^2\theta - 3 - 6\csc^2\theta\cot^2\theta = -1$

क्या आप जानते हैं ?

- $\tan\theta + \cot\theta = \dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta} = \csc\theta\sec\theta$
- $(1 + \cot A - \csc A)(1 + \tan A + \sec A) = 2$
- $\tan^2\theta - \sin^2\theta = \tan^2\theta\sin^2\theta$
- $\cot^2\theta - \cos^2\theta = \cot^2\theta\cos^2\theta$
- यदि $\sec\theta + \tan\theta = \dfrac{a}{b}$, तो $\csc\theta + \cot\theta = \dfrac{a+b}{a-b}$
- $\tan^2\theta + \cot^2\theta + 2 = \sec^2\theta + \csc^2\theta = \sec^2\theta\csc^2\theta$

Ex. व्यंजक $3 + \tan^2\theta + \cot^2\theta - \sec^2\theta\csc^2\theta$ का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$, $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$,

$\sec^2\theta + \csc^2\theta = \sec^2\theta\csc^2\theta$

$\therefore 3 + \tan^2\theta + \cot^2\theta - \sec^2\theta\csc^2\theta$

$= 1 + \sec^2\theta + \csc^2\theta - \sec^2\theta\csc^2\theta$

$= 1 + \sec^2\theta\csc^2\theta - \sec^2\theta\csc^2\theta = 1$

Ex. $(1 + \cot A - \csc A)(1 + \tan A + \sec A) - 3(\sin^2 A + \cos^2 A)$ का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS $\because (1 + \cot A - \csc A)(1 + \tan A + \sec A) = 2$

और $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

$\therefore (1 + \cot A - \csc A)(1 + \tan A + \sec A) - 3(\sin^2 A + \cos^2 A)$

$= 2 - 3 = -1$

- यदि $(\sec\theta + \tan\theta) = k$, तो $(\sec\theta - \tan\theta) = 1/k$
  - योग के पश्चात् → $\sec\theta = \dfrac{k^2+1}{2k}$
  - घटाव के पश्चात् → $\tan\theta = \dfrac{k^2-1}{2k}$

Ex. यदि $\tan\theta + \sec\theta = 2$, तो $\tan\theta$ का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS $\sec\theta + \tan\theta = 2$

$\tan\theta = \dfrac{2^2-1}{2\times 2} = \dfrac{3}{4}$

- यदि $(\csc\theta - \cot\theta) = k$, तो $(\csc\theta + \cot\theta) = 1/k$
  - योग के पश्चात् → $\csc\theta = \dfrac{k^2+1}{2k}$
  - घटाव के पश्चात् → $\cot\theta = \dfrac{k^2-1}{2k}$

Ex. यदि $\csc\theta + \cot\theta = m$, $\cos\theta$ का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS $\csc\theta = \dfrac{m^2+1}{2m}$, $\cot\theta = \dfrac{m^2-1}{2m}$

$\cos\theta = \dfrac{\cot\theta}{\csc\theta} = \dfrac{m^2-1}{2m} \times \dfrac{2m}{m^2+1} = \dfrac{m^2-1}{m^2+1}$

(II) बीजगणितीय सूत्र

- यदि $\tan\theta + \cot\theta = 2$, तो $\tan^m\theta + \cot^n\theta = 2$
- यदि $\sin\theta + \csc\theta = 2$, तो $\sin^m\theta + \csc^n\theta = 2$
- यदि $\cos\theta + \sec\theta = 2$, तो $\cos^m\theta + \sec^n\theta = 2$

Ex. यदि $\tan\theta + \cot\theta = 2$, तो $\tan^{53}\theta + \cot^{38}\theta$ का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS $\tan\theta + \cot\theta = 2$

$\tan^{53}\theta + \cot^{38}\theta = 2$

- यदि $\tan\theta + \cot\theta = k$, तो $\tan^2\theta + \cot^2\theta = k^2 - 2$
- यदि $\sin\theta + \csc\theta = k$, तो $\sin^2\theta + \csc^2\theta = k^2 - 2$
- यदि $\cos\theta + \sec\theta = k$, तो $\cos^2\theta + \sec^2\theta = k^2 - 2$

Ex. यदि $\sec\theta + \cos\theta = 32$, तो $\sec^2\theta + \cos^2\theta$ ____.

HINTS $\sec\theta + \cos\theta = 32$

$\therefore \sec^2\theta + \cos^2\theta = 1024 - 2 = 1022$

(III) द्विघात समीकरण

Ex. यदि $2\sin^2\theta + 3\sin\theta - 2 = 0$, $(0 < \theta < 90°)$ तो θ का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS $2\sin^2\theta + 3\sin\theta - 2 = 0$

$\Rightarrow 2\sin^2\theta + 4\sin\theta - \sin\theta - 2 = 0$

$\Rightarrow 2\sin\theta(\sin\theta + 2) - 1(\sin\theta + 2) = 0$

$\Rightarrow (2\sin\theta - 1)(\sin\theta + 2) = 0$

$\Rightarrow \sin\theta = -2$ (असंभव)

इसलिए, $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$

अतः $\theta = 30°$

Ex. यदि $6\cos^2\theta + \cos\theta = 2, 0° < \theta < 90°$ तो $(\csc\theta + \cot\theta + \tan\theta)$ का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS $6\cos^2\theta + \cos\theta - 2 = 0$

$\Rightarrow 6\cos^2\theta + 4\cos\theta - 3\cos\theta - 2 = 0$

$\Rightarrow 2\cos\theta(3\cos\theta + 2) - 1(3\cos\theta + 2) = 0$

$2\cos\theta = 1$	$3\cos\theta = -2$
$\cos\theta = \dfrac{1}{2}$	$\cos\theta = \dfrac{-2}{3}$

$\theta = 60°$ $(\because 0° < \theta < 90°)$

$\therefore (\csc\theta + \cot\theta + \tan\theta) = \dfrac{2}{\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}$

$= \dfrac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$

(IV) बाहुबली कॉन्सेप्ट

- यदि $\sin\theta + \sin^2\theta = 1$, तब
  - $\cos^2\theta + \cos^4\theta = 1$
  - $\cos^4\theta + \cos^8\theta + 2\cos^6\theta = 1$
  - $\cos^{12}\theta + 3\cos^{10}\theta + 3\cos^8\theta + \cos^6\theta = 1$

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

- यदि $\cos\theta + \cos^2\theta = 1$, तो
  - $\sin^2\theta + \sin^4\theta = 1$
  - $\sin^4\theta + \sin^8\theta + 2\sin^6\theta = 1$
  - $\sin^{12}\theta + 3\sin^{10}\theta + 3\sin^8\theta + \sin^6\theta = 1$
- यदि $\tan^4\theta + \tan^2\theta = 1$, तो
  - $\cos^4\theta + \cos^2\theta = 1$

Ex. यदि $\sin A + \sin^2 A = 1$, तो $\cos^4A + \cos^6A$ का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS $\sin A + \sin^2A = 1$

$\Rightarrow \sin A = 1 - \sin^2A \Rightarrow \sin A = \cos^2A$

और $\cos^6A = \sin^3A$

$\cos^4A = \sin^2A$

$\therefore \cos^4A + \cos^6A = \sin^2A + \sin^3A = \sin A\,(\sin A + \sin^2A)$

$= \sin A \times 1 = \sin A$

(V) कुछ महत्वपूर्ण सूत्र

- $\sin^2\alpha + \sin^2\beta = 2$ 'या' $\sin\alpha + \sin\beta = 2$ → $\alpha = \beta = 90^\circ$
- $\sin^2\alpha + \cos^2\beta = 2$ 'या' $\sin\alpha + \cos\beta = 2$ → $\alpha = 90^\circ$ & $\beta = 0^\circ$
- $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 2$ 'या' $\cos\alpha + \cos\beta = 2$ → $\alpha = \beta = 0^\circ$
- $\sin^2\alpha + \sin^2\beta = 0$ जब $\alpha = \beta = 0$
- $\sin^2\alpha + \cos^2\beta = 0$ जब $\alpha = 0$ & $\beta = 90^\circ$
- $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 0$ जब $\alpha = \beta = 90^\circ$

NCERT पर आधारित त्रिकोणमितीय परिणाम

- यदि $\frac{x}{a}\cos\theta + \frac{y}{b}\sin\theta = 1$ और $\frac{x}{a}\sin\theta - \frac{y}{b}\cos\theta = 1$, तो $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2$
- यदि $\text{cosec}\theta - \sin\theta = m$ और $\sec\theta - \cos\theta = n$, तो $(m^2n)^{2/3} + (mn^2)^{2/3} = 1$ 'या' $m^2n^2(m^2 + n^2 + 3) = 1$
- यदि $\cot\theta + \tan\theta = x$ और $\sec\theta - \cos\theta = y$, तो $(x^2y)^{2/3} - (xy^2)^{2/3} = 1$
- यदि $x = a\sin\theta$ और $y = b\tan\theta$, तो $\frac{a^2}{x^2} - \frac{b^2}{y^2} = 1$
- यदि $\tan\theta = 1 - a^2$, तो $\sec\theta + \tan^3\theta\,\text{cosec}\theta = (2 - a^2)^{3/2}$
- यदि $x = r\sin A\cos C$, $y = r\sin A\sin C$ और $z = r\cos A$, तो $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

कुछ विशेष अवधारणाएँ

अवधारणा: 01

- $\sqrt{\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}} = \sqrt{\frac{\text{cosec}\,\theta+1}{\text{cosec}\,\theta-1}} = \sec\theta + \tan\theta = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$
- $\sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = \sqrt{\frac{\text{cosec}\,\theta-1}{\text{cosec}\,\theta+1}} = \sec\theta - \tan\theta = \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$
- $\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} = \sqrt{\frac{\sec\theta+1}{\sec\theta-1}} = \text{cosec}\,\theta + \cot\theta = \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$
- $\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \sqrt{\frac{\sec\theta-1}{\sec\theta+1}} = \text{cosec}\,\theta - \cot\theta = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$

Ex. यदि A न्यूनकोण है, तो $\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} + \sqrt{\frac{1+\cos A}{1-\cos A}}$?

HINTS $\because \sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} = \text{cosec}A - \cot A$ .... (i)

और,

$\because \sqrt{\frac{1+\cos A}{1-\cos A}} = \text{cosec}A + \cot A$ .... (ii)

समीकरण (i) और (ii) को जोड़ने पर,

$\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} + \sqrt{\frac{1+\cos A}{1-\cos A}} = 2\text{cosec}A$

अवधारणा: 02

1. $\frac{\tan\theta+\sec\theta-1}{\tan\theta-\sec\theta+1} = \frac{\sin\theta-\cos\theta+1}{\sin\theta+\cos\theta-1} = \sec\theta+\tan\theta = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$
2. $\frac{\tan\theta-\sec\theta+1}{\tan\theta+\sec\theta-1} = \frac{\sin\theta+\cos\theta-1}{\sin\theta-\cos\theta+1} = \sec\theta-\tan\theta = \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$
3. $\frac{\cot\theta+\text{cosec}\,\theta-1}{\cot\theta-\text{cosec}\,\theta+1} = \frac{\cos\theta-\sin\theta+1}{\cos\theta+\sin\theta-1} = \text{cosec}\,\theta+\cot\theta = \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$
4. $\frac{\cot\theta-\text{cosec}\,\theta+1}{\cot\theta+\text{cosec}\,\theta-1} = \frac{\cos\theta+\sin\theta-1}{\cos\theta-\sin\theta+1} = \text{cosec}\,\theta-\cot\theta = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$.

सूत्र संख्या 1 और 2 से हम पाते है

- $\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} = 2\sec\theta$
- $\frac{1}{1+\sin\theta} + \frac{1}{1-\sin\theta} = 2\sec^2\theta$

Ex. सरल करें: $\frac{\sin\theta+\cos\theta-1}{\sin\theta-\cos\theta+1} \times \sqrt{\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}}$

HINTS सूत्र से,

$\frac{\sin\theta+\cos\theta-1}{\sin\theta-\cos\theta+1} = \sec\theta-\tan\theta$ और $\sqrt{\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}} = \sec\theta + \tan\theta$

$\therefore = \frac{\sin\theta+\cos\theta-1}{\sin\theta-\cos\theta+1} \times \sqrt{\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}} = (\sec\theta - \tan\theta)(\sec\theta + \tan\theta)$

$= \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

Ex. यदि $\frac{\cos\theta}{(1+\sin\theta)} + \frac{\cos\theta}{(1-\sin\theta)} = 4$ और θ न्यून कोण है, तो θ का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS हम जानते है,

$\frac{\cos\theta}{(1+\sin\theta)} + \frac{\cos\theta}{(1-\sin\theta)} = 2\sec\theta$

$\Rightarrow 2\sec\theta = 4 \Rightarrow \sec\theta = 2 \Rightarrow \sec\theta = \sec 60^\circ$

$\therefore \theta = 60^\circ$

अवधारणा: 03

त्रिकोणमिति में AP की अवधारणा:

☞ $\sin^2\theta + \sin^2(\theta + x) + \dots\dots + \sin^2[90^\circ - (\theta + x)] + \sin^2(90^\circ - \theta) = \frac{\text{कुल पद}}{2}$

☞ $\cos^2\theta + \cos^2(\theta + x) + \dots\dots + \cos^2[90^\circ - (\theta + x)] + \cos^2(90^\circ - \theta) = \frac{\text{कुल पद}}{2}$

☞ $\tan\theta.\ \tan(\theta + x).\ \tan(\theta + 2x)\ \dots\dots\ \tan(90^\circ - (\theta + x)).\ \tan(90^\circ - \theta) = 1$

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

"कोणों की केवल पूरक जोड़ी ली जाती है।"

Ex. $\sin^2 5° + \sin^2 10° + \sin^2 15° + ... + \sin^2 85° + \sin^2 90°$

HINTS योग $= \frac{17}{2} + \sin^2 90° = \frac{17}{2} + 1 = 9\frac{1}{2}$

Ex. $\sin^2 5° + \sin^2 6° + ... + \sin^2 84° + \sin^2 85°$

HINTS कुल पद $= \frac{85-5}{1} + 1 = 81$

योग $= \frac{81}{2} = 40\frac{1}{2}$

अवधारणा: 04

वज्र गुणन

$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad a_1x + b_1y + c_1 = 0$

$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0 \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0$

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{a_2c_1 - a_1c_2} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Ex. यदि $a\sec\theta + b\tan\theta + c = 0$, $p\sec\theta + q\tan\theta + r = 0$, तो $(br - qc)^2 - (pc - ar)^2$ किसके बराबर है।

HINTS $a\sec\theta + b\tan\theta + c = 0$

$p\sec\theta + q\tan\theta + r = 0$

$$\frac{\sec\theta}{br - cq} = \frac{\tan\theta}{pc - ar} = \frac{1}{aq - pb}$$

$$\sec\theta = \frac{br - cq}{aq - pb}, \ \tan\theta = \frac{pc - ar}{aq - pb}$$

$$\therefore \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1 \Rightarrow \left(\frac{br - cq}{aq - pb}\right)^2 - \left(\frac{pc - ar}{aq - pb}\right)^2 = 1$$

$\therefore (br - qc)^2 - (pc - ar)^2 = (aq - pb)^2$

अवधारणा: 05

- $1 + 2\tan^2\theta + 2\sin\theta\sec^2\theta = \frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}$
- $(\text{cosec}\,\theta - \cot\theta)^2 = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}, 0°<\theta<90°$
- $\frac{\tan\theta_1 + \cot\theta_2}{\tan(90° - \theta_1) + \cot(90° - \theta_2)} = \tan\theta_1 . \cot\theta_2$
- $\left(\frac{1-\tan\theta}{1-\cot\theta}\right)^2 = \tan^2\theta$
- यदि $\frac{2\sin\theta}{1+\cos\theta+\sin\theta} = y$, तो $\frac{1-\cos\theta+\sin\theta}{1+\sin\theta} = y$
- यदि $\tan A + \sin A = x$, $\tan A - \sin A = y$, तो $x^2 - y^2 = 4\sqrt{xy}$
- यदि $\cot A + \cos A = a$, $\cot A - \cos A = b$, तो $a^2 - b^2 = 4\sqrt{ab}$

अवधारणा: 06

1. $a\sin\theta + b\cos\theta = c$ और
   $b\sin\theta - a\cos\theta = d$ 'या' $a\cos\theta - b\sin\theta = d$
   $\Rightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2$
2. $a\sec\theta \pm b\tan\theta = c$, $b\sec\theta \pm a\tan\theta = d$
   $\Rightarrow a^2 - b^2 = c^2 - d^2$
3. $a\,\text{cosec}\,\theta \pm b\cot\theta = c$, $b\,\text{cosec}\,\theta \pm a\cot\theta = d$
   $\Rightarrow a^2 - b^2 = c^2 - d^2$

Ex. यदि $p\sec\theta - q\tan\theta = 10$ और $p\tan\theta - q\sec\theta = 8$ तब $p^2 - q^2 + 2$ का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS सूत्र द्वारा, $\Rightarrow p^2 - q^2 = 10^2 - 8^2 = 36$

दोनों पक्षों में '2' जोड़ने पर,

$\therefore p^2 - q^2 + 2 = 38$

Ex. यदि $a\cot\theta + b\,\text{cosec}\theta = p$ और $b\cot\theta + a\,\text{cosec}\theta = q$ तब $p^2 - q^2$ का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS

गलत हल ✗	सही हल ✓
$a\cot\theta + b\,\text{cosec}\theta = p$	$b\,\text{cosec}\theta + a\cot\theta = p$
$b\cot\theta + a\,\text{cosec}\theta = q$	$a\,\text{cosec}\theta + b\cot\theta = q$
तो, $a^2 - b^2 = p^2 - q^2$	तो, $b^2 - a^2 = p^2 - q^2$

सामान्य गलतियों से बचें

(1) समीकरण में हमेशा $\sec\theta$ पद को पहले और उसके बाद $\tan\theta$ पद को लिखना चाहिए।

(2) समीकरण में हमेशा $\text{cosec}\theta$ पद को पहले और उसके बाद $\cot\theta$ पद को लिखना चाहिए।

मान रखने की अवधारणा

याद रखने योग्य महत्वपूर्ण बिंदुः

- यदि दिए गए विकल्पों का मान स्थिर हैं (e.g., –2, –1, 0, 1, 2, 3), तो पारंपरिक तरीके से हल करने से बचें। इसके बजाय, θ = 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, या 135° प्रतिस्थापित करके हल करें।
- प्रश्न में मान प्रतिस्थापित करते समय, सुनिश्चित करें कि अपरिभाषित रूप जैसे $\frac{1}{0}, \frac{0}{0}$ या $\frac{\infty}{\infty}$ उत्पन्न न हों।
- सुनिश्चित करें कि मान प्रतिस्थापित करते समय मूल अभिव्यक्ति में दी गई किसी शर्त या प्रतिबंध का उल्लंघन न हो।
- मानों को प्रतिस्थापित करते समय इस क्रम का पालन करें:
  - ❖ पहला प्रयास: 0° या 90°
  - ❖ यदि उपयुक्त न हो, तो प्रयास करें: 45° या 135°
  - ❖ यदि फिर भी उपयुक्त न हो, तो प्रयास करें: 30° या 60°
  - ❖ θ = 135° को तभी प्रतिस्थापित करना बेहतर होगा जब θ = 45° के परिणामस्वरूप अपरिभाषित रूप प्राप्त हो।

Ex. $\frac{(2\sin A)(1+\sin A)}{1+\sin A+\cos A}$ बराबर है:

HINTS θ = 0° रखने पर,

$$\frac{(2\sin 0°)(1+\sin 0°)}{1+\sin 0° + \cos 0°} = \frac{2\times 0(1+0)}{1+0+1} = \frac{0}{2} = 0$$

Ex. $\text{cosec}\theta\left[\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right] - 2\cot^2\theta$ का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS θ = 90° रखने पर

$$\text{cosec}90°\left[\frac{1+\cos 90°}{\sin 90°} + \frac{1+\sin 90°}{\cos 90°}\right] - 2\cot^2 90°$$

$$= 1\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1}\right) - 2\times 0 = 2$$

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. $(\cot\theta + \tan\theta)(\text{cosec}\theta - \sin\theta)(\cos\theta - \sec\theta) =$ ______.

HINTS $\theta = 45°$ रखने पर,

$(\cot 45° + \tan 45°)(\text{cosec} 45° - \sin 45°)(\cos 45° - \sec 45°)$

$= (1+1)\left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\right) = 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{-1}{\sqrt{2}} = -1$

Ex. व्यंजक $\frac{(1-2\sin^2\theta\cos^2\theta)(\cot\theta+1)\cos\theta}{(\sin^4\theta+\cos^4\theta)(1+\tan\theta)\text{cosec}\,\theta} - 1$ किसके बराबर है, यदि $0° < \theta < 90°$

HINTS $\theta = 45°$ रखने पर,

$\frac{(1-2\sin^2 45°\cos^2 45°)(\cot 45°+1)\cos 45°}{(\sin^4 45°+\cos^4 45°)(1+\tan 45°)\text{cosec}\,45°} - 1$

$= \frac{\left(1-2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)(2)\times\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)\times 2\times\sqrt{2}} - 1 = \frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}} - 1 = \frac{1}{2} - 1 = \frac{-1}{2}$

Ex. यदि $a\sin^3 x + b\cos^3 x = \sin x\cos x$ और $a\sin x = b\cos x$, तो $a^2 + b^2$ का मान ज्ञात कीजिए जहाँ x न तो $0°$ है, और न ही $90°$ है।

HINTS $a\sin x = b\cos x$

$x = 45°$ रखने पर,

$\Rightarrow a = b$

$a\sin^3 x + b\cos^3 x = \sin x\cos x$

$\Rightarrow a\times\frac{1}{2\sqrt{2}} + b\times\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow a + b = \sqrt{2}$

$\Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2}},\ b = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore a^2 + b^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

यदि $a\sin x = b\cos x$ और

$a\sin^3 x + b\cos^3 x =$ (स्थिरांक) $\sin x\cos x$

↓

तो, $a^2 + b^2 =$ (स्थिरांक)^2

$\therefore a^2 + b^2 = (1)^2 = 1$

Ex. यदि $\frac{\tan\theta}{1-\cot\theta} + \frac{\cot\theta}{1-\tan\theta} = 1 + k$ तो $k = ?$

HINTS $\theta = 135°$ रखने पर,

$\frac{\tan 135°}{1-\cot 135°} + \frac{\cot 135°}{1-\tan 135°} = 1 + k$

$\Rightarrow \frac{-1}{2} + \frac{-1}{2} = 1 + k \Rightarrow k = -2$

Ex. $(1+\cot A+\tan A)(\sin A-\cos A)\left(\frac{\sin A\cos A}{\sin^3 A - \cos^3 A}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS $A = 135°$ रखने पर,

$(1 + \cot 135° + \tan 135°)(\sin 135° - \cos 135°)$

$\left(\frac{\sin 135°\cos 135°}{\sin^3 135° - \cos^3 135°}\right)$

$= (1-1-1)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\frac{-1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) = 1$

Ex. $\frac{\cot^3\theta}{\text{cosec}^2\theta} + \frac{\tan^3\theta}{\sec^2\theta} + 2\sin\theta\cos\theta = ?$

HINTS $\theta = 30°$ रखने पर,

$\frac{\cot^3 30°}{\text{cosec}^2 30°} + \frac{\tan^3 30°}{\sec^2 30°} + 2\sin 30°\cos 30°$

$= \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{1\times 3}{3\sqrt{3}\times 4} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9+1+6}{4\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$

Ex. $\left(\cot\frac{\theta}{2}\tan\theta - 1\right)(2 - \tan\theta\sin 2\theta)$ का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS $\theta = 60°$ रखने पर,

$\left(\cot\frac{60°}{2}\tan 60° - 1\right)(2 - \tan 60°\sin 2\times 60°)$

$= (\sqrt{3}\times\sqrt{3} - 1)\left(2 - \sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\times\frac{1}{2} = 1$

@apna_channels

2A, 3A और 4A के त्रिकोणमितीय फलन

2A के त्रिकोणमितीय फलन

sin2A

- $\sin 2A = 2\sin A.\cos A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$
- $\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = \frac{2\tan\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}$
- $\text{cosec}2A = \frac{\sec A\times\text{cosec}A}{2}$

cos2A

- $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1$
  $= 1 - 2\sin^2 A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$
- $\cos A = \cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2} = 2\cos^2\frac{A}{2} - 1$
  $= 1 - 2\sin^2\frac{A}{2} = \frac{1-\tan^2\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}$
- $1 - \cos A = 2\sin^2\frac{A}{2} \Rightarrow \sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$
- $1 + \cos A = 2\cos^2\frac{A}{2} \Rightarrow \cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$

tan2A

- $\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$
- $\tan A = \frac{2\tan\frac{A}{2}}{1-\tan^2\frac{A}{2}}$
- $\tan\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} = \frac{1-\cos A}{\sin A} = \frac{\sin A}{1+\cos A}$
- $\cot 2A = \frac{\cot^2 A - 1}{2\cot A}$

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. यदि $\sin\theta = \frac{6}{10}$ और $\cos\theta = \frac{8}{10}$, तो $\sin 2\theta$ = ________.

HINTS दिया है, $\sin\theta = \frac{6}{10}$, $\cos\theta = \frac{8}{10}$

$\because \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$= 2\times\frac{6}{10}\times\frac{8}{10} = \frac{24}{25}$

Ex. θ के लिए हल करें : $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \frac{1}{2}$, $0 < \theta < 90°$.

HINTS $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \frac{1}{2}$

$[\because \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta]$

इसलिए, $\cos 2\theta = \cos 60°$

$\Rightarrow 2\theta = 60°$

$\Rightarrow \theta = 30°$

3A के त्रिकोणमितीय फलन

- $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$
- $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$
- $\tan 3A = \left(\frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}\right)$
- $\cot 3A = \left(\frac{\cot^3 A - 3\cot A}{3\cot^2 A - 1}\right)$

Ex. $3\sin 15° - 4\sin^3 15°$ का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$

$\therefore 3\sin 15° - 4\sin^3 15°$

$= \sin(3\times 15°)$

$= \sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

4A के त्रिकोणमितीय फलन

- $\sin 4A = 4\sin A\cos^3 A - 4\cos A\sin^3 A$
- $\cos 4A = 8\sin^4 A - 8\sin^2 A + 1$
- $\tan 4A = \frac{4\tan A(1-\tan^2 A)}{1 - 6\tan^2 A + \tan^4 A}$

Ex. $\left[\frac{4\cos(90°-\theta)\sin^3(90°+\theta) - 4\sin(90°+\theta)\cos^3(90°-\theta)}{\cos\left(\frac{180°+8\theta}{2}\right)}\right]$

का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS $\left[\frac{4\sin\theta\cos^3\theta - 4\cos\theta\sin^3\theta}{-\sin 4\theta}\right]$

$= \frac{\sin 4\theta}{-\sin 4\theta} = -1$

त्रिकोणमितीय अनुपातों के कोणों का योग और अंतर

(a) $\sin(A\pm B) = \sin A\cos B \pm \cos A\sin B$

(b) $\cos(A\pm B) = \cos A\cos B \mp \sin A\sin B$

(c) $\tan(A\pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A\tan B}$

- $\tan(45°\pm\theta) = \frac{1\pm\tan\theta}{1\mp\tan\theta} = \frac{\cos\theta\pm\sin\theta}{\cos\theta\mp\sin\theta}$

(d) $\cot(A\pm B) = \frac{\cot A\cot B \mp 1}{\cot B \pm \cot A}$

(e) $\tan(A+B+C) = \frac{\tan A + \tan B + \tan C - \tan A\tan B\tan C}{1 - \tan A\tan B - \tan B\tan C - \tan C\tan A}$

- If $A + B + C = 90°$

(i) $\tan A \tan B + \tan B \tan C + \tan C \tan A = 1$

(ii) $\cot A + \cot B + \cot C = \cot A.\cot B.\cot C$.

Ex. $\frac{\sin(A+B) - \sin(A-B)}{\cos A\sin B}$ का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS $\frac{\sin(A+B) - \sin(A-B)}{\cos A\sin B}$

$= \frac{(\sin A\cos B + \cos A\sin B) - (\sin A\cos B - \cos A\sin B)}{\cos A\sin B}$

$= \frac{2\cos A\sin B}{\cos A\sin B} = 2$

Ex. $\tan 105°$ का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS यहाँ, $105° = 45° + 60°$

$\tan(45° + \theta) = \frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta} = \frac{1+\tan 60°}{1-\tan 60°} = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$

योग या अंतर का गुणनफल में रूपांतरण

1. $\sin C + \sin D = 2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right)\cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$
2. $\sin C - \sin D = 2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right)\sin\left(\frac{C-D}{2}\right)$
3. $\cos C + \cos D = 2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right)\cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$
4. $\cos C - \cos D = 2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right)\sin\left(\frac{D-C}{2}\right)$

- सूत्र संख्या 1, 2, और 3 से प्राप्त हुआ:

$\frac{\sin C \pm \sin D}{\cos C + \cos D} = \tan\left(\frac{C\pm D}{2}\right)$

Ex. 'θ' का मान ज्ञात कीजिए यदि $\sin 2\theta + \sin 4\theta = \sqrt{3}\sin 3\theta$.

HINTS $\therefore \sin C + \sin D = 2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right)\cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$

$\therefore \sin 4\theta + \sin 2\theta = 2\sin\left(\frac{4\theta+2\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{4\theta-2\theta}{2}\right) = 2\sin 3\theta\cos\theta$

प्रश्नानुसार,

$2\sin 3\theta\cos\theta = \sqrt{3}\sin 3\theta$

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = 30°$

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. $\dfrac{\sin A + \sin 3A}{\cos A + \cos 3A} = ?$

HINTS $\dfrac{\sin A + \sin 3A}{\cos A + \cos 3A} = \tan\left(\dfrac{A+3A}{2}\right) = \tan 2A.$

Ex. $\dfrac{\sin 5A - \sin 3A}{\cos 5A + \cos 3B} = ?$

HINTS $\dfrac{\sin 5A - \sin 3A}{\cos 5A + \cos 3B} = \tan\left(\dfrac{5A-3A}{2}\right) = \tan A.$

गुणनफल का योग या अंतर में रूपांतरण

- $\sin(A + B)\sin(A - B) = \sin^2A - \sin^2B = \cos^2B - \cos^2A$
- $\cos(A + B)\cos(A - B) = \cos^2A - \sin^2B = \cos^2B - \sin^2A$
- $2\sin A\cos B = \sin(A + B) + \sin(A - B)$ } तुलना करें
- $2\cos A\sin B = \sin(A + B) - \sin(A - B)$
- $2\cos A\cos B = \cos(A + B) + \cos(A - B)$ } तुलना करें
- $2\sin A\sin B = \cos(A - B) - \cos(A + B)$

Ex. निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए:

$\cos(36° + A).\cos(36° - A) + \cos(54° + A).\cos(54° - A)$

HINTS हम जानते है,

$\cos(A + B)\cos(A - B) = \cos^2A - \sin^2B$

$\cos^2 36° - \sin^2A + \cos^2 54° - \sin^2A$

$= \cos^2 36° - \sin^2A + \sin^2 36° - \sin^2A$

$= 1 - \sin^2A - \sin^2A$

$= \cos^2A - \sin^2A = \cos 2A$

Ex. निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए:

$\cos(3x) + \cos(5x)$

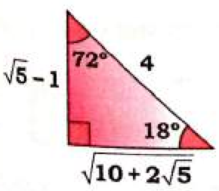
HINTS हम जानते है,

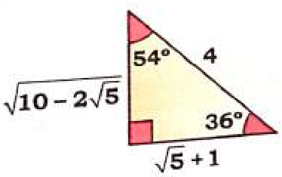
$\cos(A + B) + \cos(A - B) = 2\cos A\cos B$

$\cos(3x) + \cos(5x) = 2\cos\dfrac{(3x+5x)}{2} + \dfrac{\cos(5x-3x)}{2}$

$\cos(3x) + \cos(5x) = 2\cos(4x)\cos(x)$

कुछ महत्त्वपूर्ण कोणों के मान



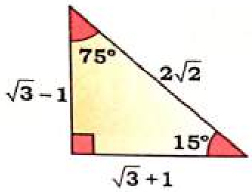


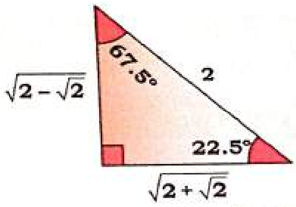
(i) $\sin 18° = \dfrac{\sqrt5 - 1}{4} = \cos 72°$

(ii) $\cos 18° = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt5}}{4} = \sin 72°$

(i) $\sin 36° = \dfrac{\sqrt{10-2\sqrt5}}{4} = \cos 54°$

(ii) $\cos 36° = \dfrac{\sqrt5 + 1}{4} = \sin 54°$





(i) $\sin 15° = \dfrac{\sqrt3 - 1}{2\sqrt2} = \cos 75°$

(ii) $\cos 15° = \dfrac{\sqrt3 + 1}{2\sqrt2} = \sin 75°$

(iii) $\tan 15° = \dfrac{\sqrt3 - 1}{\sqrt3 + 1} = 2 - \sqrt3 = \cot 75°$

(iv) $\cot 15° = \dfrac{\sqrt3 + 1}{\sqrt3 - 1} = 2 + \sqrt3 = \tan 75°$

(i) $\sin 22\dfrac{1°}{2} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt2}}{2}$

(ii) $\cos 22\dfrac{1°}{2} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt2}}{2}$

(iii) $\tan 22\dfrac{1°}{2} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt2}}{\sqrt{2+\sqrt2}}$

(iv) $\cot 22\dfrac{1°}{2} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt2}}{\sqrt{2-\sqrt2}}$

कुछ महत्त्वपूर्ण परिणाम

- $\sin(60° - A).\sin A.\sin(60° + A) = \dfrac{1}{4}\sin 3A$
- $\cos(60° - A).\cos A.\cos(60° + A) = \dfrac{1}{4}\cos 3A$
- $\tan(60° - A).\tan A.\tan(60° + A) = \tan 3A$
- $\cot(60° - A)\cot A\cot(60° + A) = \cot 3A$
- $\sin^2(60° - A) + \sin^2 A + \sin^2(60° + A) = \dfrac{3}{2}$
- $\cos^2(60° - A) + \cos^2 A + \cos^2(60° + A) = \dfrac{3}{2}$
- $\cos^2 A + \cos^2(120° - A) + \cos^2(120° + A) = \dfrac{3}{2}$
- $\cos A + \cos(120° - A) + \cos(120° + A) = 0$
- $\cos^3 A + \cos^3(120° - A) + \cos^3(120° + A) = \dfrac{3}{4}\cos 3A$
- $\sin^3 A + \sin^3(120° + A) + \sin^3(240° + A) = -\dfrac{3}{4}\sin 3A$

Ex. $\cos 70° \cos 50° \cos 10°$ का मान ज्ञात कीजिए:

HINTS $\cos(60° + 10°)\cos(60° - 10°)\cos 10° = \dfrac{1}{4}\cos(3 \times 10°)$

$= \dfrac{1}{4}\cos 30° = \dfrac{\sqrt3}{8}$

त्रिभुज की कुछ मानक सर्वसमिकाएँ

यदि $A + B + C = 180°$ 'या' π, तो

- $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A\tan B\tan C$
- $\cot A.\cot B + \cot B.\cot C + \cot C.\cot A = 1$
- $\tan\dfrac{A}{2}.\tan\dfrac{B}{2} + \tan\dfrac{B}{2}.\tan\dfrac{C}{2} + \tan\dfrac{C}{2}.\tan\dfrac{A}{2} = 1$
- $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$
- $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\dfrac{A}{2}.\sin\dfrac{B}{2}.\sin\dfrac{C}{2}$
- $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A\sin B\sin C$
- $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -(1 + 4\cos A\cos B\cos C)$

@apna_channels
Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. यदि A + B + C = 540°, तो $\tan\left(\frac{A}{3}\right)\tan\left(\frac{B}{3}\right)\tan\left(\frac{C}{3}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए

HINTS प्रश्नानुसार,

$A + B + C = 540° \Rightarrow \frac{A}{3}+\frac{B}{3}+\frac{C}{3} = 180°$

$\therefore \tan\left(\frac{A}{3}\right)\tan\left(\frac{B}{3}\right)\tan\left(\frac{C}{3}\right) = \tan\left(\frac{A}{3}\right)+\tan\left(\frac{B}{3}\right)+\tan\left(\frac{C}{3}\right)$

कुछ अन्य महत्त्वपूर्ण परिणाम

परिणाम 01:

यदि A ± B = 60°
- $\cos^2A + \cos^2B \mp \cos A.\cos B = \frac{3}{4}$
- $\sin^2A + \sin^2B \pm \sin A.\sin B = \frac{3}{4}$

परिणाम 02:

- sin1°.sin2°......sin180° or (sin180° से अधिक) = 0
- cos1°.cos2°......cos90° or (cos90° से अधिक) = 0

परिणाम 03:

- यदि $m\sin\theta = n\sin(\theta+2\alpha)$, तो $\tan(\theta+\alpha)\cot\alpha = \frac{m+n}{m-n}$
- यदि $\cos\alpha+\cos\beta = \sin\alpha+\sin\beta = 0$, तो $\cos2\alpha+\cos2\beta = 2\cos(\alpha+\beta)$
- $\tan\theta(1+\sec2\theta)(1+\sec4\theta)(1+\sec8\theta) = \tan8\theta$
- यदि $x = a\cos^3\theta$ और $y = b\sin^3\theta$, तो $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1$
- यदि $\operatorname{cosec}x - \sin x = a^3$ और $\sec x - \cos x = b^3$, तो $a^2b^2(a^2+b^2) = 1$
- $\frac{\cot A + \tan B}{\cot B + \tan A} = \tan B \cot A$
- यदि $\sin\theta+\cos\theta = \sqrt{3}$ तो $\sin2\theta = 2$
- यदि $\sin\theta+2\cos\theta = 1$ तो $2\sin\theta-\cos\theta = 2$
- यदि $\tan\theta = \frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$ तो, $\sin\alpha+\cos\alpha = \sqrt{2}\cos\theta$

त्रिकोणमितीय फलनों का अधिकतम/न्यूनतम मान

क्र. सं.	त्रिकोणमितिय अनुपात	न्यूनतम	अधिकतम
1.	sinθ.cosθ (विषम घात)	−1	+1
2.	$\sin^2\theta.\cos^2\theta$ (सम घात)	0	+1
3.	tanθ.cotθ (विषम घात)	−∞	+∞
4.	$\tan^2\theta.\cot^2\theta$ (सम घात)	0	∞
5.	secθ.cosecθ (विषम घात)	−∞	+∞
6.	$\sec^2\theta.\operatorname{cosec}^2\theta$ (सम घात)	1	∞

A. $m\sin\theta \pm n\cos\theta$
- अधिकतम मान = $\sqrt{m^2+n^2}$
- न्यूनतम मान = $-\sqrt{m^2+n^2}$

Ex. 9 sinθ + 40cosθ का अधिकतम और न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए।

HINTS अधिकतम मान = $\sqrt{(9)^2+(40)^2} = \sqrt{81+1600} = 41$

न्यूनतम मान = $-\sqrt{(9)^2+(40)^2} = -\sqrt{1681} = -41$

B. $a\sin^2\theta + b\cos^2\theta$
- यदि a > b: अधिकतम मान = a, न्यूनतम मान = b
- यदि a < b: अधिकतम मान = b, न्यूनतम मान = a

Ex. 12sin²θ + 23cos²θ का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए।

HINTS अधिकतम मान = 23

न्यूनतम मान = 12

C. $a\sin^2\theta + b\operatorname{cosec}^2\theta$, $a\tan^2\theta + b\cot^2\theta$, $a\cos^2\theta + b\sec^2\theta$
- यदि a > b: अधिकतम मान = $2\sqrt{ab}$
- यदि a < b: न्यूनतम मान = (a + b)

Ex. 16tan²θ + 4cot²θ का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए।

HINTS ∵ a > b

न्यूनतम मान = $2\sqrt{ab} = 2\sqrt{16\times4} = 16$

Ex. 5 cos²θ + 8 sec²θ का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए।

HINTS अधिकतम मान = a + b जब a < b

न्यूनतम मान = 5 + 8 = 13

D. $\sin^n\theta \times \cos^n\theta$
- जब n विषम हो, अधिकतम मान = $+\frac{1}{2^n}$, न्यूनतम मान = $-\frac{1}{2^n}$
- जब n सम हो, अधिकतम मान = $+\frac{1}{2^n}$, न्यूनतम मान = 0

Ex. sin⁶θ. cos⁶θ का अधिकतम और न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए।

HINTS $\sin^6\theta.\cos^6\theta$ का अधिकतम मान = $\frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$

न्यूनतम मान = 0

Ex. sin⁵θ. cos⁵θ का अधिकतम और न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए।

HINTS $\sin^5\theta.\cos^5\theta$ का अधिकतम मान = $\frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$

न्यूनतम मान = $-\frac{1}{2^5} = -\frac{1}{32}$

E. $a\sec^2\theta + b\operatorname{cosec}^2\theta$
- अधिकतम मान = ∞
- न्यूनतम मान = $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

Ex. 9sec²θ + 16cosec²θ का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए।

HINTS न्यूनतम मान = $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = (\sqrt{9}+\sqrt{16})^2$

$= (3+4)^2 = 49$

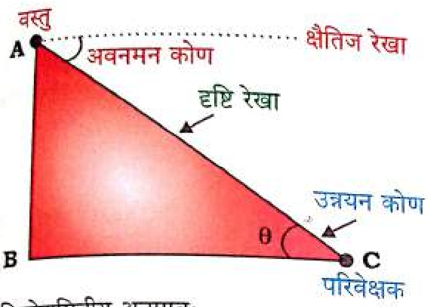
@apna_channels
Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

अध्याय 11

ऊँचाई और दूरी

समकोण त्रिभुज में उन्नयन कोण के त्रिकोणमितीय अनुपातों की सहायता से ऊँचाई और दूरी की समस्याओं को हल किया जाता है।



त्रिकोणमितीय अनुपात:

$\sin\theta = \frac{AB}{AC}$, $\cos\theta = \frac{BC}{AC}$,

$\tan\theta = \frac{AB}{BC}$, $\sec\theta = \frac{AC}{BC}$

$\operatorname{cosec}\theta = \frac{AC}{AB}$, $\cot\theta = \frac{BC}{AB}$

दृष्टि रेखा: पर्यवेक्षक की आंख से देखी जा रही वस्तु तक की सीधी रेखा।

उन्नयन कोण: पर्यवेक्षक की आंख से क्षैतिज रेखा और दृष्टि रेखा के बीच का कोण जब वस्तु पर्यवेक्षक की आंख के स्तर से ऊपर होती है।

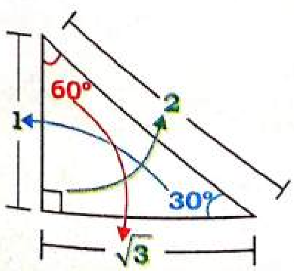
अवनमन कोण: पर्यवेक्षक की आंख से क्षैतिज रेखा और दृष्टि रेखा के बीच का कोण जब वस्तु पर्यवेक्षक की आंख के स्तर से नीचे होती है।

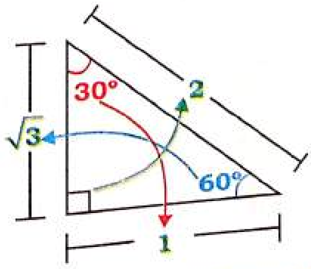
कोण भुजा अनुपात

कोण	भुजाओं का अनुपात
30° : 60° : 90°	$1 : \sqrt{3} : 2$
45° : 45° : 90°	$1 : 1 : \sqrt{2}$
15° : 75° : 90°	$(\sqrt{3}-1) : (\sqrt{3}+1) : 2\sqrt{2}$
30° : 30° : 120°	$1 : 1 : \sqrt{3}$

☞ अधिकांश समस्याओं में, हम दो विशेष समकोण त्रिभुजों इस प्रकार मिलते हैं:

(i) उन्नयन कोण 30° या 60° है





Ex. क्षैतिज तल पर एक इमारत के पाद से 70 मीटर की दूरी पर स्थित उसके शिखर का उन्नयन कोण 60° है। इमारत की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

HINTS ΔABC में

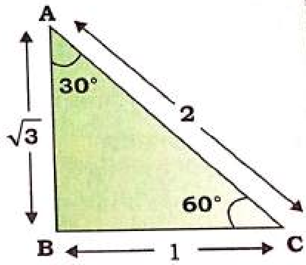
दिया है,

कोण → 30° : 60° : 90°

भुजा → 1 : $\sqrt{3}$: 2

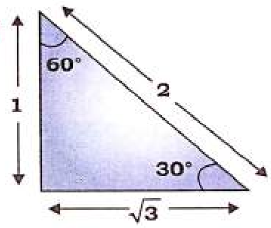
↓×70 ↓×70

70मी. $70\sqrt{3}$मी.



Ex. कुछ दूरी पर खड़ा एक व्यक्ति 1000 मीटर ऊँची एक इमारत को देख रहा है। इमारत के शिखर और ज़मीन के बीच का कोण 30° है। इमारत से लगभग कितनी दूरी (मीटर में) पर खड़ा व्यक्ति है?

HINTS



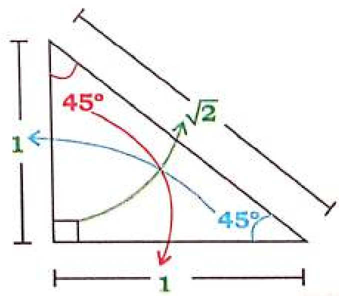
कोण → 30° : 60° : 90°

भुजा → 1 : $\sqrt{3}$: 2

↓×1000 ↓×1000

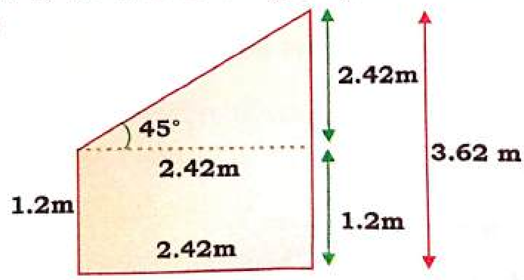
1000मी. $1000\sqrt{3}$मी.= 1732मी.

(ii) उन्नयन कोण 45° है



Ex. 1.2 मीटर लंबी एक लड़की 3.62 मीटर ऊंची दीवार के ऊपर से सूरज को देख सकती है, जो उससे 2.42 मीटर दूर है। सूर्य का उन्नयन कोण है:

HINTS

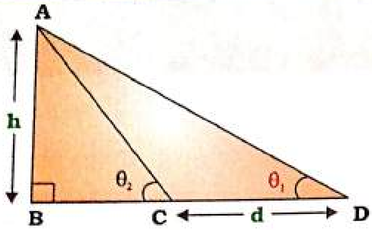


∴ θ = 45°

@apna_channels
Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

जब दो कोण दिए गए हों

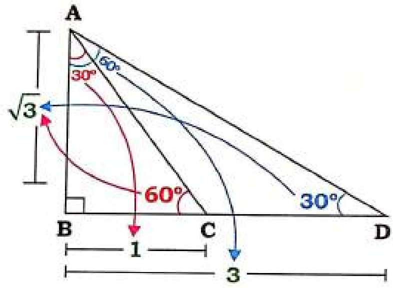


$d = h(\cot\theta_1 - \cot\theta_2)$

या

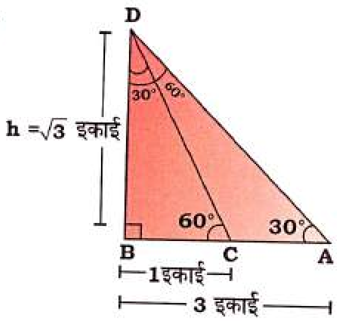
इसके लिए हम विभिन्न स्थितियों में AB, BC और CD के बीच संबंध देखेंगे।

(i) 30° - 60° संबंध



Ex. A और C एक मैदान के एक ही ओर स्थित दो बिंदु हैं, जो 50 मीटर की दूरी पर हैं। एक पेड़ के शीर्ष से इन बिंदुओं के उन्नयन कोण क्रमशः 60° और 30° हैं। पेड़ की ऊँचाई का 40% (मीटर में) क्या है?

HINTS



AC = 2 इकाई → 50मी.

DB = $\sqrt{3}$ इकाई → 25 $\sqrt{3}$

∴ पेड़ की ऊँचाई का 40% = $25\sqrt{3} \times \frac{2}{5} = 10\sqrt{3}$ मी.

वैकल्पिक विधि

$d = h(\cot\theta_1 - \cot\theta_2)$

$\Rightarrow 50 = (\cot 30° - \cot 60°)$

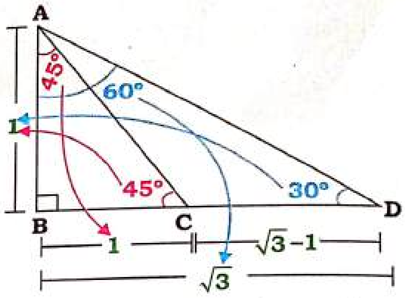
$\Rightarrow 50 = h\left(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$\Rightarrow 50 = h \times \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow h = 25\sqrt{3}$ मी.

∴ पेड़ की ऊँचाई का 40% $= 25\sqrt{3} \times \frac{2}{5} = 10\sqrt{3}$ मी.

(ii) 30° - 45° संबंध



Ex. समतल ज़मीन पर एक ऊर्ध्वाधर मीनार की छाया की लंबाई सूर्य की ऊँचाई 45° से 30° होने पर 8.4 मीटर बढ़ जाती है। मीनार की ऊँचाई (मीटर में) क्या है?

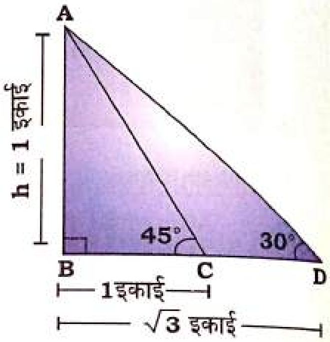
HINTS

दिया है, DC = 8.4 मी.

$(\sqrt{3} - 1)$ इकाई = 8.4 मी.

AB (1 इकाई) $= \frac{8.4}{\sqrt{3}-1} \times \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}$

$= \frac{8.4(\sqrt{3}+1)}{2} = 4.2(\sqrt{3}+1)$ मी.



वैकल्पिक विधि

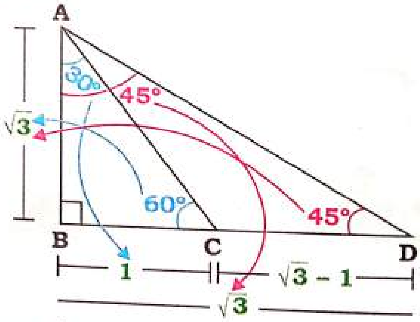
$d = h(\cot\theta_1 - \cot\theta_2)$

$\Rightarrow 8.4 = h(\cot 30° - \cot 45°)$

$\Rightarrow 8.4 = h(\sqrt{3}-1)$

$\Rightarrow h = \frac{8.4}{\sqrt{3}-1} \times \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{8.4(\sqrt{3}+1)}{2} = 4.2(\sqrt{3}+1)$ मी.

(iii) 45° - 60° संबंध



Ex. एक सीधी सड़क के अंत में एक मीनार खड़ी है। सड़क पर 500 मीटर की दूरी पर स्थित दो बिंदुओं से मीनार के शीर्ष का उन्नयन कोण क्रमशः 45° और 60° है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

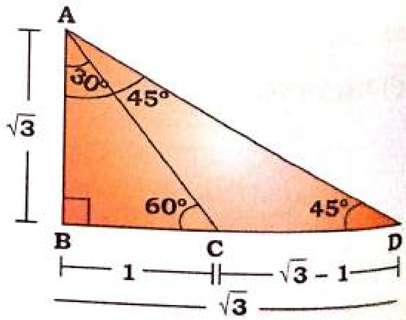
HINTS

$\sqrt{3} - 1$ इकाई = 500 मी.

1 इकाई $= \frac{500}{\sqrt{3}-1}$

AB ($\sqrt{3}$ इकाई)

$= \frac{500\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$ मी.

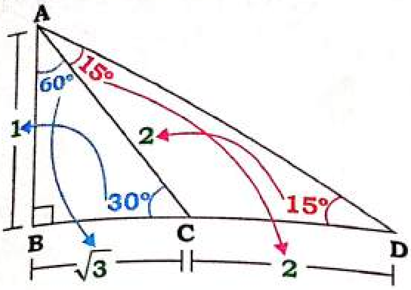


@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

(iv) 15° - 30° संबंध



Ex. एक मीनार के शीर्ष के क्षैतिज पर स्थित दो बिंदुओं A और B से मीनार के पाद से होकर जाने वाले उन्नयन कोण क्रमशः 15° और 30° हैं। यदि A और B मीनार के एक ही ओर हों और AB = 48 मीटर हो, तो मीनार की ऊँचाई क्या है? ($\tan 15° = 2 - \sqrt{3}$)

HINTS

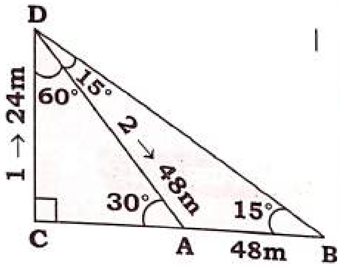
ΔDCA में,

∠DAC, ΔDAB का एक बाह्य कोण है

2 इकाई → 48 मी.

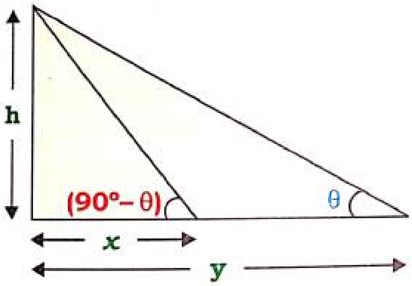
1 इकाई → 24 मी.

∴ मीनार की ऊँचाई = 24 मी.



जब दोनों उन्नयन कोण पूरक हों

(i) $h^2 = xy$ या $h = \sqrt{xy}$



Ex. एक मीनार के शीर्ष के दो बिंदुओं पर उन्नयन कोण पूरक हैं, जो मीनार के पाद से 8 मीटर और 18 मीटर की दूरी पर एक ही क्षैतिज रेखा में और एक ही ओर स्थित हैं। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

HINTS

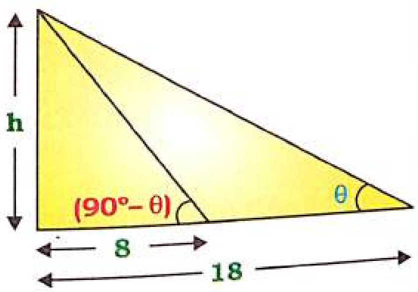
$h^2 = xy$

या

$h = \sqrt{xy}$

$\therefore h = \sqrt{8 \times 18} = \sqrt{144}$

$= 12$

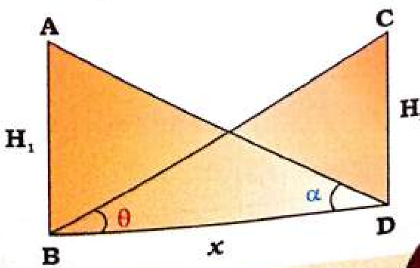


(ii) $\theta + \alpha = 90°$ या दोनों उन्नयन कोण पूरक हैं।

$x^2 = H_1H_2$

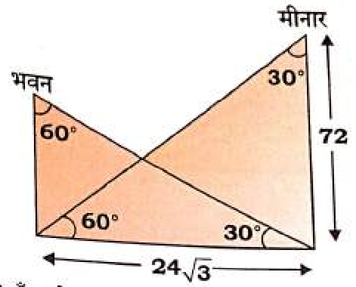
या

$x = \sqrt{H_1H_2}$



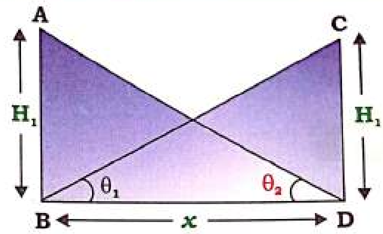
Ex. मीनार के पाद से भवन के शिखर का उन्नयन कोण 30° है और भवन के पाद से मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 60° है। यदि मीनार 72 मीटर ऊँची है, तो भवन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

HINTS

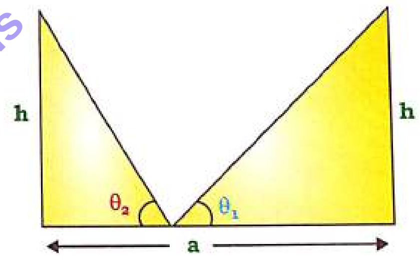


भवन की ऊँचाई = 24 मी.

यदि दोनों उन्नयन कोण पूरक नहीं हैं, तो हम समकोण त्रिभुज ABD और BCD का उपयोग करके इस समस्या को हल करेंगे।



(iii)



$a = h(\cot\theta_1 + \cot\theta_2)$

Ex. 60 मीटर चौड़ी सड़क के दोनों ओर समान ऊँचाई के दो खंभे लगे हैं। सड़क पर खंभों के बीच एक बिंदु पर, खंभों के शीर्ष की ऊँचाई 30° और 60° है। खंभों की ऊँचाई क्या होगी?

HINTS

DA = EB

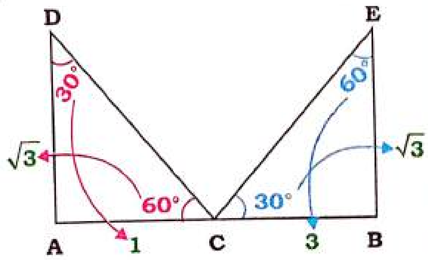
$= \sqrt{3}$ इकाई

दिया है,

AB (4 इकाई)= 60 मी.

AC (1 इकाई) = 15 मी.

$\sqrt{3}$ इकाई = $15\sqrt{3}$ मी.



वैकल्पिक विधि

$a = h(\cot\theta_1 + \cot\theta_2)$

$\Rightarrow 60 = h(\cot 30° + \cot 60°)$

$\Rightarrow 60 = h\left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

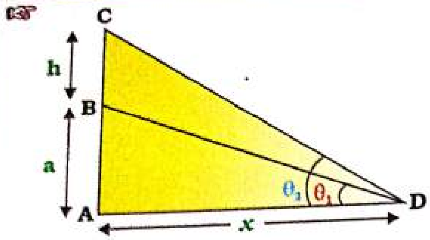
$\Rightarrow h = 60 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = 15\sqrt{3}$ मी.

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

कुछ महत्वपूर्ण अवधारणाएँ



इस प्रकार के प्रश्न को हल करने के लिए हम निम्नलिखित विधियों का उपयोग कर सकते हैं।

दिया है $\angle ADB = \theta_1$ और $\angle ADC = \theta_2$

इस प्रकार की अधिकांश समस्याओं में

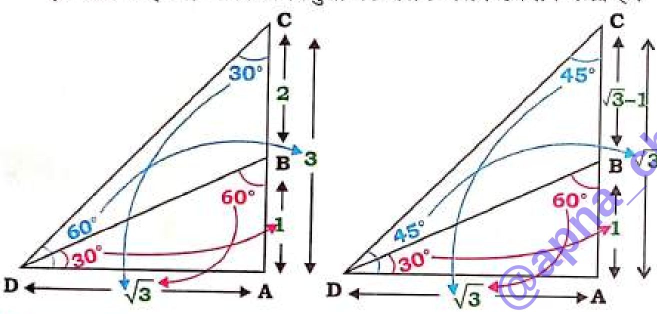
(i) यदि h दिया जाएगा, तो a पूछा जाएगा

(ii) यदि x दिया जाएगा, तो h पूछा जाएगा

$\frac{a}{h} = \frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}$ और $h = x(\tan\theta_2 - \tan\theta_1)$

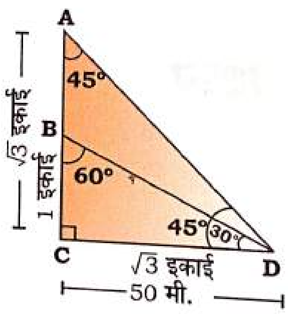
वैकल्पिक विधि

इस विधि में हम दो समकोण त्रिभुजों का अलग-अलग उपयोग करते हैं।



Ex. एक पोस्टर एक इमारत के ऊपर लगा है। एक व्यक्ति इमारत से 50 मीटर की दूरी पर ज़मीन पर खड़ा है। पोस्टर के ऊपर और नीचे के उन्नयन कोण क्रमशः 45° और 30° हैं। पोस्टर की ऊँचाई (मीटर में) का 200% क्या है?

HINTS



AB = ($\sqrt{3}$ – 1) इकाई

$\sqrt{3}$ इकाई = 50 मी.

($\sqrt{3}$ – 1) इकाई = $\frac{50}{\sqrt{3}} \times (\sqrt{3} - 1)$

$= \frac{50}{3} \times (3 - \sqrt{3})$

पोस्टर की ऊँचाई का 200% (AB)

$= \frac{100}{3}(3 - \sqrt{3})$

वैकल्पिक विधि

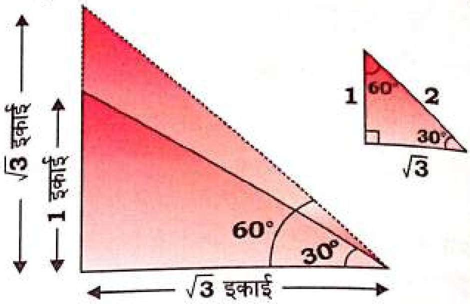
$AB = CD(\tan\theta_2 - \tan\theta_1) = 50(\tan 45° - \tan 30°)$

$= 50\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 50 \times \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{50(3-\sqrt{3})}{3}$

∴ पोस्टर की ऊँचाई का 200% (AB) = $\frac{100}{3}(3 - \sqrt{3})$

Ex. एक अधुरे टावर के शीर्ष का उसके आधार से 78 मीटर दूर एक बिंदु पर उन्नयन कोण 30° है। टावर को कितना ऊँचा (मीटर में) उठाया जाना चाहिए ताकि उसी बिंदु पर तैयार टावर के शीर्ष का उन्नयन कोण 60° हो जाए?

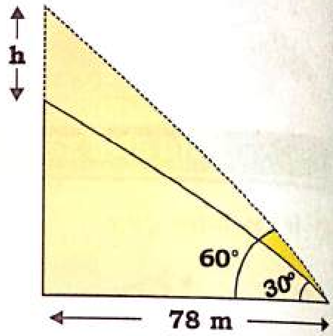
HINTS



$\sqrt{3}$ इकाई = 78 मी.

(3 – 1 = 2 इकाई) = $\frac{78}{\sqrt{3}} \times 2 = \frac{156\sqrt{3}}{3} = 52\sqrt{3}$

वैकल्पिक विधि



$h = D(\tan\theta_2 - \tan\theta_1)$

$= 78(\tan 60° - \tan 30°)$

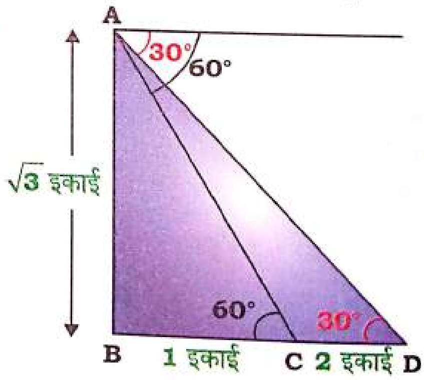
$= 78\left(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$= 78 \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{156\sqrt{3}}{3}$

$= 52\sqrt{3}$

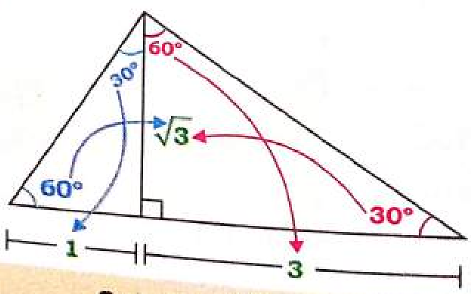
Ex. 200 मीटर ऊँचे एक टावर के शिखर पर खड़ा एक व्यक्ति एक कार को 60° के अवनमन कोण पर देखता है। कुछ समय बाद अवनमन कोण 30° हो जाता है। इस अवधि में कार द्वारा तय की गई दूरी है:

HINTS



दिया है, AB ($\sqrt{3}$ इकाई) = 200 मी.

CD (2 इकाई) = $\frac{400\sqrt{3}}{3}$ मी.



Selected हैं Selection दिलाएंगे

Join Telegram: @apna_rwa

Ex. दो जहाज एक लाइट हाउस के विपरीत दिशा में इस प्रकार खड़े हैं कि तीनों एकरेखीय हैं। लाइट हाउस के शीर्ष से दोनों जहाजों के अवनमन कोण 30° और 60° हैं। यदि जहाज एक दूसरे से $230\sqrt{3}$ m की दूरी पर हैं, तो लाइट हाउस की ऊँचाई (m में) ज्ञात कीजिए।

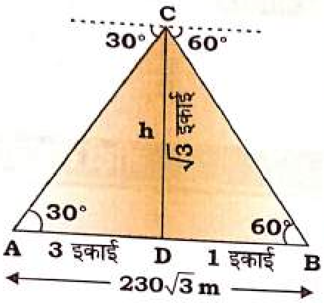
HINTS

4 इकाई → $230\sqrt{3}$ मी.

$\sqrt{3}$ इकाई $= \frac{230\sqrt{3}}{4} \times \sqrt{3}$

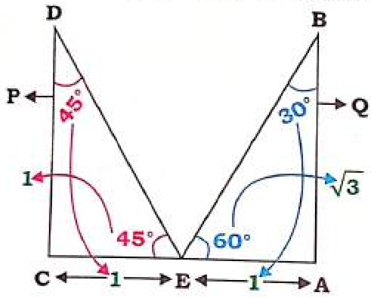
= 172.5

∴ CD = 172.5 मी.



Ex. दो मीनारों P और Q के पादों के ठीक बीच में, उनके शीर्षों के उन्नयन कोण क्रमशः 45° और 60° हैं। P और Q की ऊँचाई का अनुपात क्या है?

HINTS

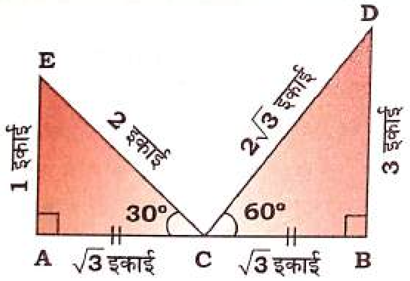


CE = AE = 1

P : Q के बीच अनुपात = 1 : $\sqrt{3}$

Ex. मान लीजिए A और B एक ही आधार वाली दो मीनारें हैं। उनके आधारों को मिलाने वाली रेखा के मध्य बिंदु से, A और B के शीर्षों के उन्नयन कोण क्रमशः 30° और 60° हैं। B और A की ऊँचाइयों का अनुपात क्या है?

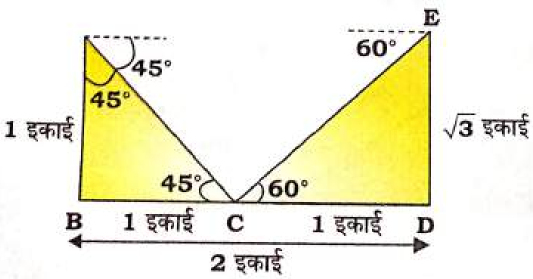
HINTS



B: A की ऊँचाई का अनुपात = 3 : 1

Ex. एक सड़क के विपरीत किनारों पर दो पेड़ हैं। दोनों पेड़ों के बीच की दूरी 400 मीटर है। पेड़ों के बीच सड़क पर एक बिंदु है। पेड़ों के शीर्ष से इस बिंदु का अवनमन कोण 45° और 60° है। यदि 45° का कोण बनाने वाले पेड़ की ऊँचाई 200 मीटर है, तो अन्य पेड़ों की ऊँचाई क्या होगी?

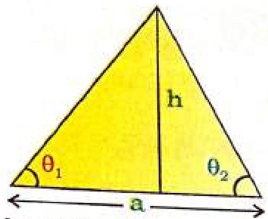
HINTS प्रश्नानुसार,



1 इकाई = 200 ⇒ 2 इकाई = 400

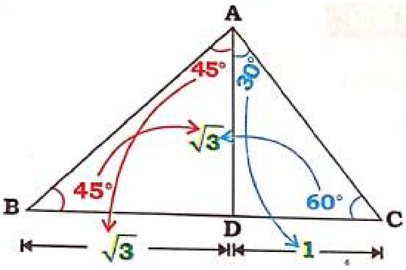
अन्य पेड़ों की ऊँचाई = $200\sqrt{3}$

☞ $a = h(\cot\theta_1 + \cot\theta_2)$



Ex. एक हवाई जहाज़ में 200 मीटर की ऊँचाई पर एक पायलट नदी के दोनों ओर स्थित दो बिंदुओं का अवलोकन करता है। यदि दोनों बिंदुओं के अवनमन कोण 45° और 60° हैं, तो नदी की चौड़ाई है:

HINTS



दिया है,

AD ($\sqrt{3}$ इकाई) = 200 मी.

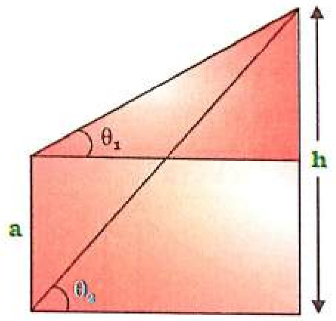
BC ($\sqrt{3}$ + 1) इकाई = $200\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}\right)$ मी.

वैकल्पिक विधि

$a = h(\cot\theta_1 + \cot\theta_2) \Rightarrow a = 200(\cot 45° + \cot 60°)$

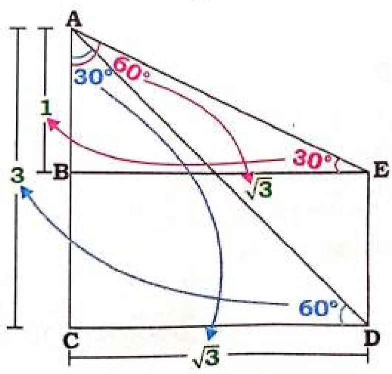
$\Rightarrow a = 200\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \Rightarrow a = 200\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}\right)$ मी.

☞



$$h = \frac{a\cot\theta_1}{\cot\theta_1 - \cot\theta_2}$$

'या'



Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. 195 मीटर ऊँची चट्टान के शीर्ष से एक मीनार के शीर्ष और तल के अवनमन कोण क्रमशः 30° और 60° हैं। मीनार की ऊँचाई (मीटर में) ज्ञात कीजिए।

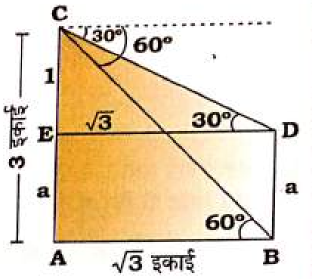
HINTS

AC (3 इकाई) = 195 m

AE (2 इकाई) = $\frac{195}{3} \times 2$

= 130 मी.

∴ मीनार की ऊँचाई = 130 मी.



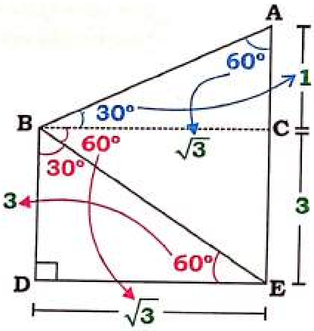
वैकल्पिक विधि

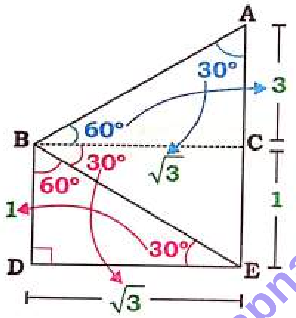
$$h = \frac{a\cot\theta_1}{\cot\theta_1 - \cot\theta_2} \Rightarrow 195 = \frac{a\cot 30^\circ}{\cot 30^\circ - \cot 60^\circ}$$

$$\Rightarrow 195 = \frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}} \Rightarrow 195 = \frac{3a}{2} \Rightarrow a = 130\text{मी.}$$

∴ मीनार की ऊँचाई = 130 मी.

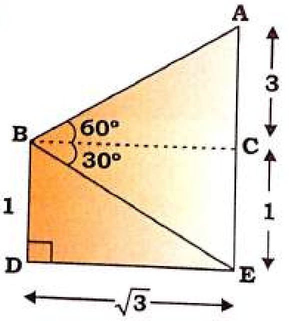
☞





Ex. एक ऊर्ध्वाधर खंभा और एक ऊर्ध्वाधर मीनार समतल ज़मीन पर इस प्रकार रखे गए हैं कि खंभे के शीर्ष से मीनार का उन्नयन कोण 60° है और खंभे के शीर्ष से मीनार के आधार का अवनमन कोण 30° है। यदि मीनार की ऊँचाई 76 मीटर है, तो खंभे की ऊँचाई (मीटर में) ज्ञात कीजिए।

HINTS

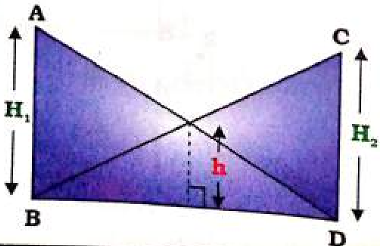


AB(4 इकाई) = 76 मी.

AC(1 इकाई) = 19 मी.

☞ क्षैतिज रेखा से एक के पाद से दूसरे के शीर्ष तक मिलने वाली रेखाओं के प्रतिच्छेद बिंदु की ऊँचाई h है।

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{H_1} + \frac{1}{H_2}$$



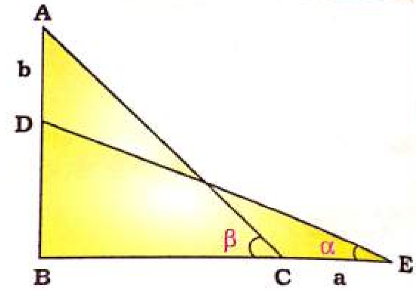
Ex. 20 मीटर और 80 मीटर ऊँचे दो ऊर्ध्वाधर खंभे एक क्षैतिज तल पर एक दूसरे से अलग खड़े हैं। प्रत्येक खंभे के शीर्ष को दूसरे खंभे के पाद से मिलाने वाली रेखाओं के प्रतिच्छेद बिंदु की ऊँचाई है।

HINTS $H_1 = 20$, $H_2 = 80$

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{H_1} + \frac{1}{H_2} \Rightarrow \frac{1}{h} = \frac{1}{20} + \frac{1}{80} \Rightarrow \frac{1}{h} = \frac{4+1}{80} \Rightarrow h = 16 \text{ मी.}$$

सीढ़ी स्थानांतरण अवधारणा

☞ $a = b\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$



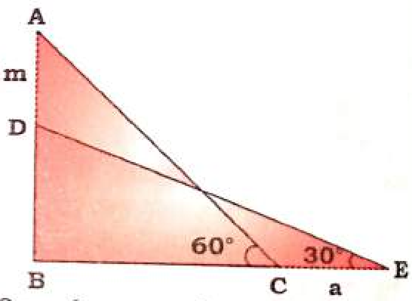
Ex. एक सीढ़ी एक दीवार के साथ 60° का उन्नयन कोण बनाती है। यदि सीढ़ी का शीर्ष 2 मीटर नीचे खिसक जाता है और अब उन्नयन कोण 30° है, तो सीढ़ी का पाद कितनी दूर पीछे खिसकेगा?

HINTS

$a = b\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

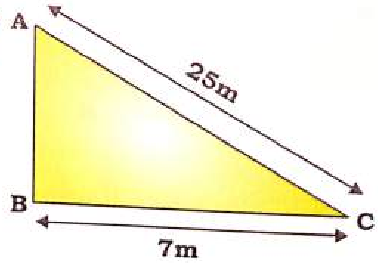
$= 2\tan\left(\frac{60^\circ+30^\circ}{2}\right)$

$= 2\tan 45^\circ = 2$मी.



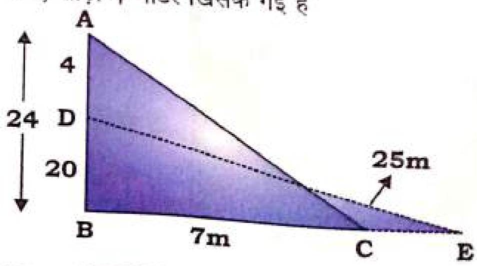
Ex. 25 मीटर लंबी एक सीढ़ी का निचला हिस्सा इमारत के आधार से 7 मीटर दूर है। यदि सीढ़ी का ऊपरी हिस्सा 4 मीटर खिसक जाए, तो सीढ़ी का निचला हिस्सा कितनी दूरी तक खिसकेगा?

HINTS



$AB = \sqrt{25^2 - 7^2} = \sqrt{625 - 49} = = \sqrt{576} = 24 = 24$

अब, सीढ़ी 4 मीटर खिसक गई है



$BE = \sqrt{(25)^2 - (20)^2} = \sqrt{625 - 400} = \sqrt{225} = 15 = 15$ मी

CE = (BE – BC) = (15 – 7) = 8 मी

Selected हैं Selection दिलाएंगे

@apna_channels

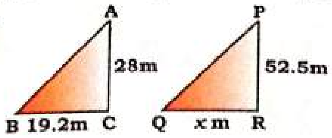
Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

छाया की अवधारणा

Ex. 28 मीटर ऊँचे एक ऊर्ध्वाधर खंभे की छाया 19.2 मीटर लंबी है। उसी समय, 52.5 मीटर ऊँचे एक अन्य खंभे की छाया की लंबाई ज्ञात कीजिए।

HINTS



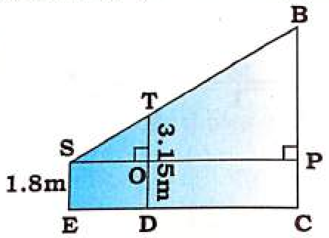
$\Delta ABC \sim \Delta PQR$

तो, $\frac{28}{19.2} = \frac{52.5}{x}$

$\Rightarrow x = \frac{52.5 \times 19.2}{28} = 36$मी

Ex. सुभाष का एक 3.15 मीटर ऊँचा पेड़ और एक इमारत इस प्रकार स्थित हैं कि उनके आधार (पैर) ज़मीन पर एक सीध में हैं और पेड़, इमारत और सुभाष के बीच स्थित है। पेड़ सुभाष से 7.5 मीटर की दूरी पर स्थित है और इमारत 45 मीटर की दूरी पर स्थित है। इसके अलावा, सुभाष की नज़र में, पेड़ की ऊँचाई और इमारत की ऊँचाई एक ही सीध में हैं, और सुभाष की आँखें ज़मीन से 1.8 मीटर ऊपर हैं। इमारत की ऊँचाई (मीटर में) ज्ञात कीजिए।

HINTS



TO = TD – OD = 3.15 – 1.8 = 1.35 मी

$\Delta SOT \sim \Delta SPB$

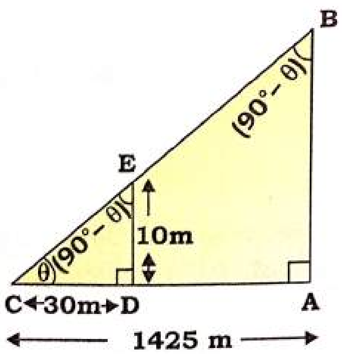
$\Rightarrow \frac{SO}{SP} = \frac{TO}{BP} \Rightarrow \frac{7.5}{45+7.5} = \frac{1.35}{BP}$

$\Rightarrow BP = \frac{1.35 \times 52.5}{7.5} = 9.45$ मी

इमारत की ऊँचाई = (BP + PC) = 9.45 + 1.8 = 11.25 मी

Ex. एक व्यक्ति एक मॉल के पास सड़क पर खड़ा था। वह मॉल से 1425 मीटर दूर था और सड़क से मॉल का ऊपरी हिस्सा इस तरह देख पा रहा था कि उसके और मॉल के बीच में एक पेड़ का ऊपरी हिस्सा मॉल के ऊपरी हिस्से के ठीक सामने था। पेड़ की ऊँचाई 10 मीटर है और वह उससे 30 मीटर दूर है। मॉल की ऊँचाई (मीटर में) कितनी है?

HINTS



$\Delta ABC \sim \Delta DEC$

$\frac{DE}{CD} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{10}{30} = \frac{AB}{1425}$

$\Rightarrow$ AB = 475 मी.

विविध प्रश्न

Ex. बिंदु P से एक मीनार का उन्नयन कोण इस प्रकार है कि उसकी स्पर्श रेखा $\frac{3}{4}$ है। मीनार की ओर 560 मीटर चलने पर मीनार के उन्नयन कोण की स्पर्श रेखा $\frac{4}{3}$ हो जाती है। मीनार की ऊँचाई क्या है?

HINTS

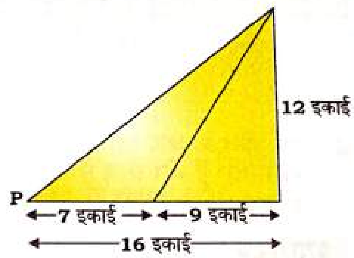
(3 : 4) × 4 = 12 : 16

(4 : 3) × 3 = 12 : 9

7 इकाई → 560 मी.

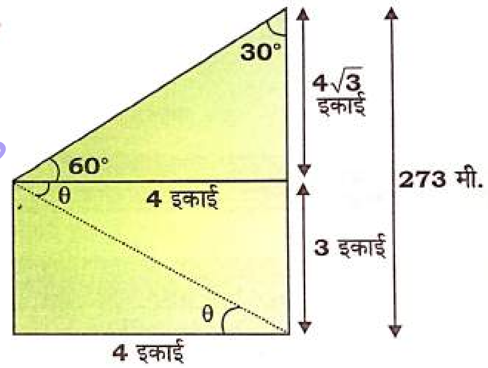
1 इकाई → 80 मी.

12 इकाई → 960 मी.



Ex. टावर के शीर्ष से, इमारत के शीर्ष का उन्नयन कोण 60° है और इमारत के पाद का अवनमन कोण θ इस प्रकार है कि tanθ = $\frac{3}{4}$ है। यदि इमारत 273 मीटर ऊंची है, तो टावर की निकटतम मीटर तक ऊँचाई क्या है?

HINTS



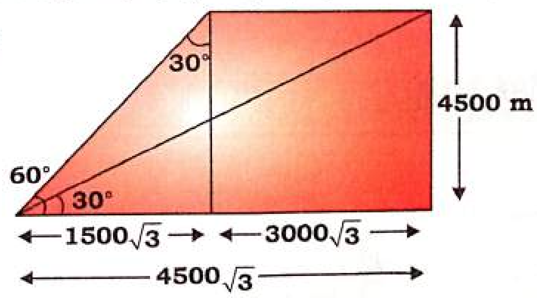
$\left(4\sqrt{3}+3\right)$ इकाई → 273 इकाई

3 इकाई → $\frac{273}{4\sqrt{3}+3} \times 3 = \frac{273 \times 3\left(4\sqrt{3}-3\right)}{39}$

$= 21\left(4\sqrt{3}-3\right) = 21 \times 3.92 = 82.48$ मी.

Ex. ज़मीन पर एक बिंदु से एक हवाई जहाज का उन्नयन कोण 60° है। 30 सेकंड तक उड़ने के बाद, उन्नयन कोण 30° हो जाता है। यदि हवाई जहाज 4500 मीटर की ऊँचाई पर उड़ रहा है, तो हवाई जहाज की गति क्या है?

HINTS



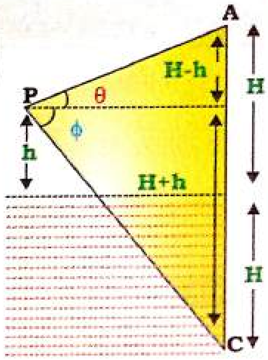
चाल = $\frac{\text{दूरी}}{\text{समय}} = \frac{3000\sqrt{3}}{30} = 100\sqrt{3}$ मी./से.

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

☞ एक झील में पानी के स्तर से h ऊँचाई पर एक बादल का उन्नयन कोण θ है और झील में उसके प्रतिबिंब का अवनमन कोण ϕ है। तो झील की सतह से बादल की ऊँचाई है:

$$H = h\left(\frac{\cot\theta + \cot\phi}{\cot\theta - \cot\phi}\right)$$



Ex. एक झील के जल स्तर से 20 मीटर की ऊँचाई पर एक बादल का उन्नयन कोण 30° है और झील में उसके प्रतिबिंब का अवनमन कोण 60° है। झील की सतह से बादल की ऊँचाई ज्ञात कीजिए:

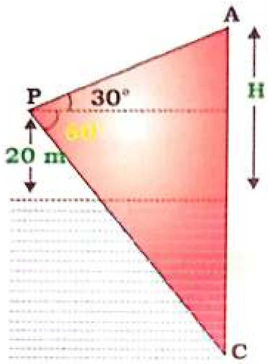
HINTS

$$H = h\left(\frac{\cot\theta + \cot\phi}{\cot\theta - \cot\phi}\right)$$

$$= 20\left(\frac{\cot 30° + \cot 60°}{\cot 30° - \cot 60°}\right)$$

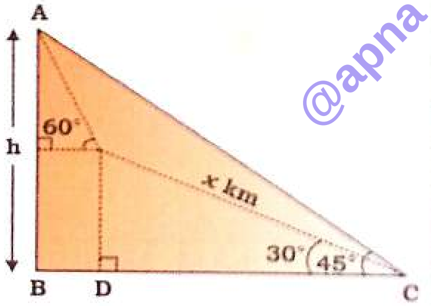
$$= 20\left(\frac{\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}}\right)$$

$$= \frac{20(3+1)}{3-1} = 40 \text{ मी.}$$



☞

$$h = \frac{x}{2}(\sqrt{3}+1)$$



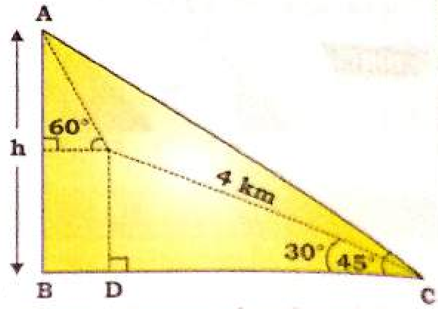
Ex. पर्वत के तल पर, इसके शिखर का उन्नयन कोण 45° है। पर्वत की ओर 4 किमी नीचे उतरने पर, पर्वत 30° ढलान पर चढ़ता है, और उन्नयन कोण 60° हो जाता है, तो पर्वत की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

HINTS

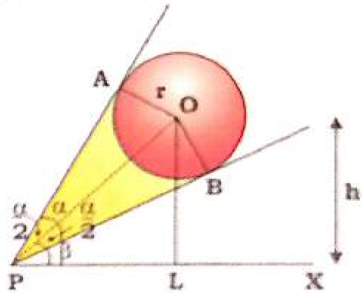
$$h = \frac{x}{2}(\sqrt{3}+1)$$

$$= \frac{4}{2}(\sqrt{3}+1)$$

$$= 2(\sqrt{3}+1)$$



☞ त्रिज्या r का एक गोल गुब्बारा किसी प्रेक्षक की आँख पर α कोण बनाता है जबकि उसके केंद्र का उन्नयन कोण β है। तो क्षैतिज से उसके केंद्र की ऊँचाई है:



$$h = r\sin\beta\,\text{cosec}\,\frac{\alpha}{2}$$

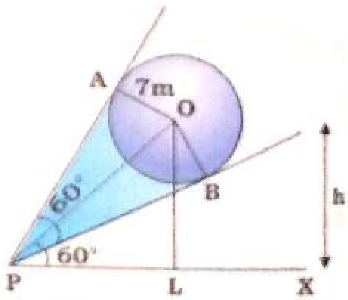
Ex. 7 मीटर त्रिज्या वाला एक गोलाकार गुब्बारा एक प्रेक्षक की आँख पर 60° का कोण बनाता है। यदि इसके केंद्र का उन्नयन कोण 60° है और h गुब्बारे के केंद्र की ऊँचाई है, तो h का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS

$$h = r\sin\beta\,\text{cosec}\,\frac{\alpha}{2}$$

$$= 7\sin 60°\,\text{cosec}\,\frac{60°}{2}$$

$$= 7 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = 7\sqrt{3} \text{ मी.}$$



Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

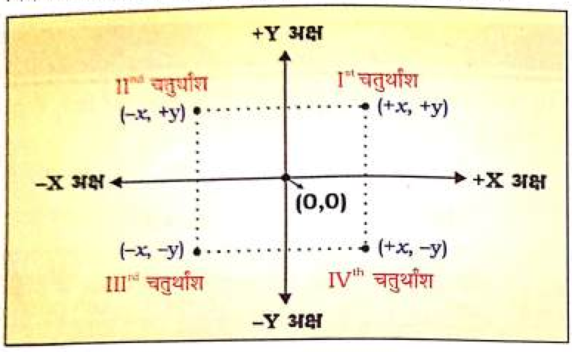
अध्याय 12

निर्देशांक ज्यामिति

निर्देशांक ज्यामिति गणित की वह शाखा है जो समतल पर बिंदुओं की स्थिति को परिभाषित करने के लिए निर्देशांकों का उपयोग करती है।

निर्देशांक तल

निर्देशांक तल के दो अक्ष क्षैतिज X-अक्ष और ऊर्ध्वाधर Y-अक्ष हैं। ये निर्देशांक अक्ष तल को चार चतुर्थांशों में विभाजित करते हैं।



Ex. बिंदु (–2, 4) किस चतुर्थांश में स्थित है?

HINTS (–2, 4) (–, +) → 2^{nd} चतुर्थांश

परिभाषाएँ और मौलिक गुण

1. भुज (X-निर्देशांक): Y-अक्ष से किसी बिंदु की लंबवत दूरी।
   - Y-अक्ष के दाईं ओर धनात्मक।
   - Y-अक्ष के बाईं ओर ऋणात्मक।
   - Y-अक्ष पर किसी भी बिंदु के लिए शून्य।
2. कोटि (Y-निर्देशांक): X-अक्ष से किसी बिंदु की लंबवत दूरी।
   - X-अक्ष के ऊपर धनात्मक।
   - X-अक्ष के नीचे ऋणात्मक।
   - X-अक्ष पर किसी भी बिंदु के लिए शून्य।
3. मूल बिंदु: वह बिंदु (0,0) जहाँ X-अक्ष और Y-अक्ष प्रतिच्छेद करते हैं। इसका भुज और कोटि दोनों शून्य हैं।

Ex. बिंदु A(2, 3) का भुज क्या है?

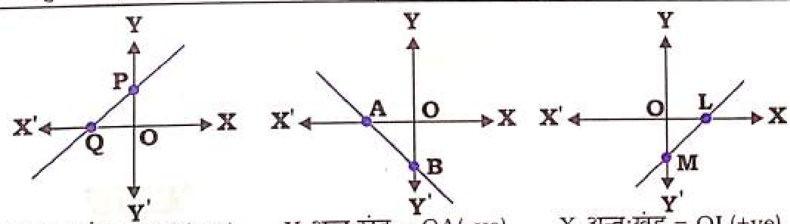
HINTS भुज = x निर्देशांक = 2

Ex. बिंदु A(5, 6) की कोटि क्या है?

HINTS कोटि = y निर्देशांक = 6

अन्तःखंड

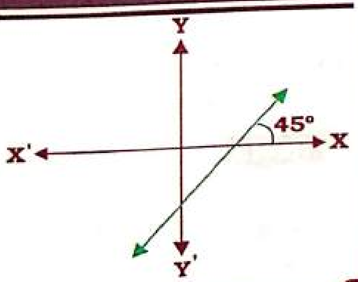
यह वह बिंदु है जहां एक रेखा या वक्र एक निर्देशांक अक्ष (या तो X-अक्ष या Y-अक्ष) को प्रतिच्छेद करता है।

गुण	X-अन्तःखंड	Y-अन्तःखंड
परिभाषा	वह बिंदु जहाँ एक रेखा X-अक्ष को पार करती है।	वह बिंदु जहाँ एक रेखा Y-अक्ष को पार करती है।
सामान्य रूप	निर्देशांक: (x, 0) X-अन्तःखंड पर, y = 0	निर्देशांक: (0, y) Y-अन्तःखंड पर, x = 0
समानांतर रेखा	X-अक्ष के समानांतर किसी भी रेखा के लिए X-अन्तःखंड = 0	Y-अक्ष के समानांतर किसी भी रेखा के लिए Y-अन्तःखंड = 0
संकेत नियम	1. +ve, यदि मूल बिंदु के दाईं मापा जाता है। 2. –ve, यदि मूल बिंदु के बाईं मापा जाता है।	1. +ve, यदि मूल बिंदु के ऊपर मापा जाता है। 2. –ve, यदि मूल बिंदु के नीचे मापा जाता है।
आरेखीय निरूपण	 X-अन्तःखंड = OQ(–ve) Y-अन्तःखंड = OP(+ve) X-अन्तःखंड = OA(–ve) Y-अन्तःखंड = OB(–ve) X-अन्तःखंड = OL(+ve) Y-अन्तःखंड = OM(–ve)	

झुकाव और प्रवणता

वह कोण जो एक सीधी रेखा X-अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ बनाती है (वामावर्त दिशा में मापा जाता है) रेखा का झुकाव कहलाता है।

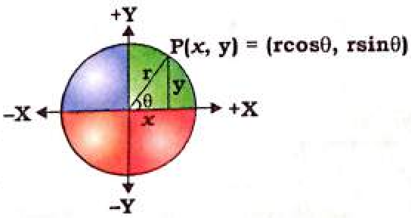
- रेखा का झुकाव आमतौर पर θ झुकाव द्वारा दर्शाया जाता है, θ = 45°



बिंदु के ध्रुवीय निर्देशांक

ध्रुवीय निर्देशांक एक 2D निर्देशांक प्रणाली है जहाँ समतल में प्रत्येक बिंदु निम्न द्वारा निर्धारित होता है:

(a) संदर्भ बिंदु (मूल या ध्रुव) से दूरी, जिसे त्रिज्य दूरी (r) कहा जाता है।



Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

(b) संदर्भ दिशा (आमतौर पर धनात्मक X-अक्ष) से कोण, जिसे ध्रुवीय कोण (θ) कहा जाता है।

$\sin\theta = \frac{y}{r}$, $\cos\theta = \frac{x}{r}$, $\tan\theta = \frac{y}{x}$, $r^2 = x^2 + y^2$

Ex. $(1, \sqrt{3})$ का ध्रुवीय निर्देशांक क्या है?

HINTS $(1, \sqrt{3}) = 2\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

ध्रुवीय निर्देशांक = 2cos60°, 2sin60°

दूरी सूत्र

दो बिंदुओं के बीच की दूरी उस रेखाखंड की लंबाई है जो एक समतल में दो बिंदुओं को जोड़ती है।

(a) मूल बिंदु से बिंदु (x, y) की दूरी = $\sqrt{x^2 + y^2}$

(b) दो बिन्दुओं $P(x_1, y_1)$ और $Q(x_2, y_2)$ के बीच की दूरी

$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Ex. बिंदुओं A(3, –7) और B(–5, 8) के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

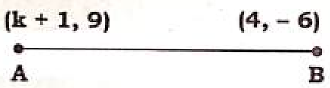
HINTS दिया है, $(x_1, y_1) = (3, -7)$ और $(x_2, y_2) = (-5, 8)$

दूरी = $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$= \sqrt{(-5-3)^2 + \{8-(-7)\}^2} = \sqrt{64+225} = \sqrt{289} = 17$

Ex. यदि दो बिंदुओं (k + 1, 9) और (4, -6) के बीच की दूरी 17 इकाई है, तो k का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS



दूरी सूत्र का उपयोग करते हुए,

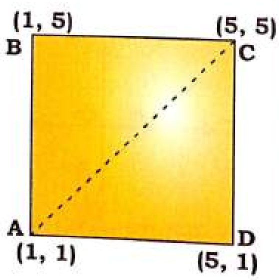
$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$\Rightarrow 17 = \sqrt{(4-k-1)^2 + (-6-9)^2}$

हल करने पर, k = (11, –5)

Ex. वर्ग के विकर्ण और भुजा की लम्बाई ज्ञात करें जिसके दिए गए शीर्ष (1,1), (1,5), (5,5), (5,1) है।

HINTS दिया हुआ है,



$(x_1, y_1) = (1,1)$ और $(x_2, y_2) = (1, 5)$

दूरी (AB)

$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$= \sqrt{(1-1)^2 + (5-1)^2}$

$= \sqrt{0+16}$

AB = 4 इकाई

विकर्ण के लिए $\Rightarrow (x_1, y_1) = (1, 1)$ और $(x_2, y_2) = (5, 5)$

दूरी (AC) = $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$= \sqrt{(5-1)^2 + (5-1)^2}$

$= \sqrt{4^2 + 4^2}$

AC = $4\sqrt{2}$ इकाई

वर्ग की भुजा = 2 और वर्ग का विकर्ण = $4\sqrt{2}$

Ex. A(–3,4) और B(5,0) से समान दूरी पर स्थित सभी बिंदु (x,0) ज्ञात कीजिए।

HINTS दूरी बराबर निर्धारित करें:

$\sqrt{(x+3)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + 0^2}$

$(x + 3)^2 + 16 = (x - 5)^2$

$x^2 + 6x + 9 + 16 = x^2 - 10x + 25$

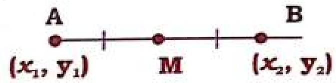
$6x + 25 = -10x + 25$

$\Rightarrow 16x = 0 \Rightarrow x = 0$

बिंदु: (0,0)

मध्य-बिंदु सूत्र

मध्यबिंदु किसी रेखाखंड का वह बिंदु होता है, जो दोनों अंत बिन्दुओं से समान दूरी पर होता है।



$A(x_1, y_1)$ और $B(x_2, y_2)$ के बीच रेखाखंड के मध्यबिंदु के निर्देशांक हैं

$= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

Ex. बिन्दुओं M(2, 6) और N(8, 4) के बीच MN का मध्य-बिन्दु क्या है?

HINTS

मध्य-बिंदु सूत्र का उपयोग करते हुए,

$P = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

$x = \frac{2+8}{2} = \frac{10}{2} = 5 \Rightarrow y = \frac{6+4}{2} = \frac{10}{2} = 5$

MN का मध्यबिंदु (5, 5) है।

Ex. A(2, a) और B(b, 10) का मध्यबिंदु M(5, 6) है। a, b ज्ञात कीजिए।

HINTS $\frac{2+b}{2} = 5 \Rightarrow b = 8$

$\frac{a+10}{2} = 6 \Rightarrow a = 2$

a = 2, b = 8

Ex. P(1, 4) और Q(x, 10) का मध्यबिंदु M (4, 7) है। x और PQ की लंबाई ज्ञात कीजिए।

HINTS मध्यबिंदु $\Rightarrow \frac{1+x}{2} = 4 \Rightarrow x = 7$

दूरी PQ $= \sqrt{(7-1)^2 + (10-4)^2}$

$= \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$

$x = 7$, PQ = $6\sqrt{2}$

Ex. (x, 2) और (6, y) को मिलाने वाली रेखा का मध्यबिंदु (4, 5) है। x और y ज्ञात कीजिए।

HINTS $\frac{x+6}{2} = 4 \Rightarrow x + 6 = 8 \Rightarrow x = 2$

$\frac{2+y}{2} = 5 \Rightarrow 2 + y = 10 \Rightarrow y = 8$

$x = 2$, $y = 8$

@apna_channels

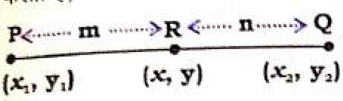
Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

विभाजन सूत्र

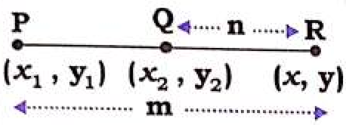
बिंदु द्वारा विभाजन

यदि कोई बिंदु (x_1, y_1) और (x_2, y_2) को मिलाने वाली रेखा को m : n के अनुपात में आंतरिक रूप से विभाजित करता है, तो उसके निर्देशांक हैं:



$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \; y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n}$$

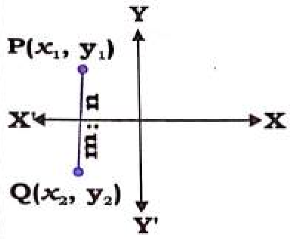
यदि कोई बिंदु (x_1, y_1) और (x_2, y_2) को मिलाने वाली रेखा को m : n के अनुपात में बाह्य रूप से विभाजित करता है, तो उसके निर्देशांक हैं:



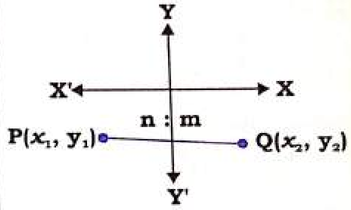
$$x = \frac{mx_2 - nx_1}{m-n}, \; y = \frac{my_2 - ny_1}{m-n}$$

अक्ष द्वारा विभाजन

X-अक्ष बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा को इस अनुपात में विभाजित करेगा $= -(y_1, y_2)$



Y-अक्ष बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा को इस अनुपात में विभाजित करेगा $= -(x_1, x_2)$



Ex. उस बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो (5, -2) और (9, 6) को मिलाने वाली रेखा को 1 : 3 के अनुपात में आंतरिक रूप से विभाजित करता है।

HINTS

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n} = \frac{1(9)+3(5)}{1+3} = 6$$

$$y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n} = \frac{1(6)+3(-2)}{1+3} = 0$$

$(x, y) = (6, 0)$

Ex. उस बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो बिंदुओं (2, 1) और (3, 5) को मिलाने वाली रेखा को 2 : 3 के अनुपात में बाह्य रूप से विभाजित करता है।

HINTS

$$x = \frac{mx_2 - nx_1}{m-n} = \frac{6-6}{-1} = 0$$

$$y = \frac{my_2 - ny_1}{m-n} = \frac{10-3}{-1} = -7$$

$(x, y) = (0, -7)$

Ex. X-अक्ष, बिन्दुओं (-4, 3) और (5, 2) को मिलाने वाली रेखा को किस अनुपात में विभाजित करता है?

HINTS

बाह्य विभाजन

m : n = –(3, 2) = 3 : 2

Ex. Y-अक्ष बिंदु (2, 3) और (5, 7) को मिलाने वाली रेखा को किस अनुपात में विभाजित करता है?

HINTS

बाह्य विभाजन

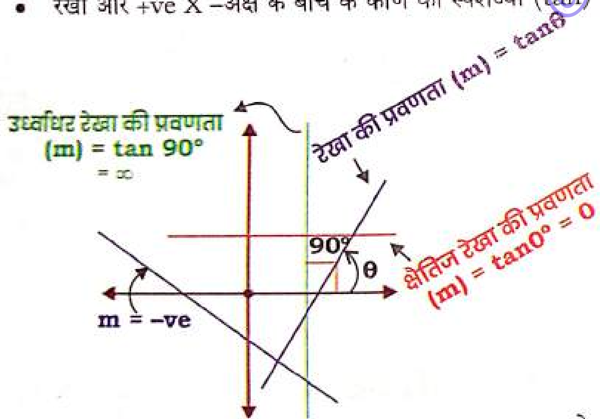
m : n = –(2, 5) = 2 : 5

@apna_channels

रेखा की प्रवणता (m)

किसी रेखा की प्रवणता उसके ढलान (slope) का माप है। यह x-निर्देशांक में परिवर्तन के सापेक्ष y-निर्देशांक में परिवर्तन है।

- रेखा और +ve X –अक्ष के बीच के कोण का स्पर्शज्या (tan)



(a) सामान्य रूप में रेखा की प्रवणता (slope) $ax + by + c = 0$, तो

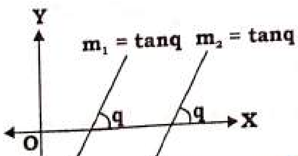
$$m = -\left(\frac{x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}\right) = -\left(\frac{a}{b}\right)$$

(b) (x_1 , y_1) और (x_2 , y_2) से गुजरने वाली रेखा की प्रवणता (slope) है–

$$\text{प्रवणता (slope) (m)} = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)$$

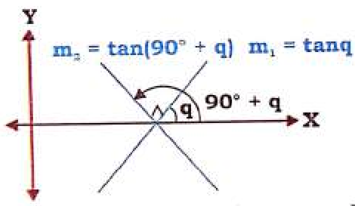
☞ यदि दो रेखाएँ समान्तर हैं तो उनकी प्रवणताएँ (slope) बराबर होंगी।

$\Rightarrow m_1 = m_2$



☞ यदि दो रेखाएँ लंबवत हैं तो उनकी प्रवणता (slope) का गुणनफल -1 है

$\Rightarrow m_1 \times m_2 = -1$



Ex. उस रेखा की प्रवणता (slope) ज्ञात कीजिए जो (4, 2) और (7, 6) से होकर गुजरती है।

HINTS दिया है, $(x_1, y_1) = (4, 2)$, $(x_2, y_2) = (7, 6)$

हम जानते हैं, प्रवणता (Slope) (m) $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-2}{7-4} = \frac{4}{3}$

Ex. सीधी रेखा $5x + 12y = 60$ के अक्षों के बीच अंत:खण्ड की लम्बाई है

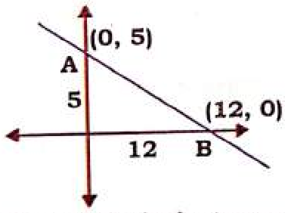
HINTS $5x + 12y = 60$

$x = 0$ रखने पर $\Rightarrow y = 5$

$y = 0$ रखने पर $\Rightarrow x = 12$

AB की लम्बाई = 13

(5, 12, 13 का त्रिक)



Ex. समीकरण $6x + 8y - 48 = 0$ के X-अक्ष और Y-अक्ष के बीच के अंत:खण्ड के बीच की लम्बाई है।

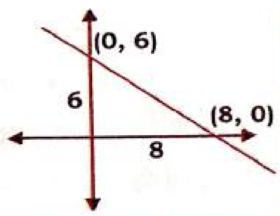
HINTS $6x + 8y - 48 = 0$

$x = 0$ रखने पर $\Rightarrow y = 6$

$y = 0$ रखने पर $\Rightarrow x = 8$

X-अक्ष और Y-अक्ष के बीच अंत:खण्ड के बीच की सबसे छोटी लम्बाई है।

$= \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ इकाई



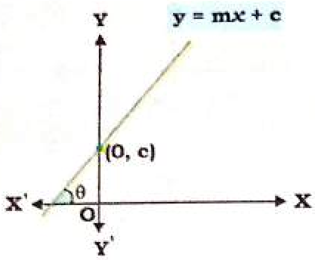
Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

एक सीधी रेखा का समीकरण

ढाल-अन्तःखंड रूप

इस प्रकार दिया गया है एक सीधी रेखा का समीकरण जिसकी प्रवणता (slope) m है और y-अन्तःखंड c है।



जहाँ $m = \tan\theta$

Ex. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी प्रवणता (slope) 5 है तथा y-अन्तःखण्ड 12 है।

HINTS $\because y = mx + c,$

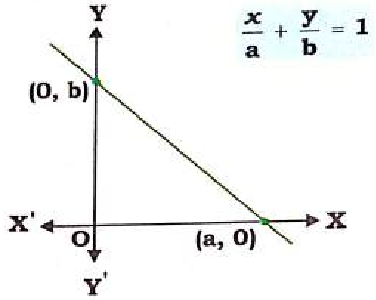
यहाँ c, Y-अन्तःखण्ड है

$\Rightarrow y = 5x + 12$

$\Rightarrow y - 5x - 12 = 0$

अन्तःखंड रूप

एक सीधी रेखा का समीकरण जिसका x-अन्तःखण्ड और y-अन्तःखण्ड क्रमशः a और b है।



Ex. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके x और y अंतःखंड 5 और 4 हैं।

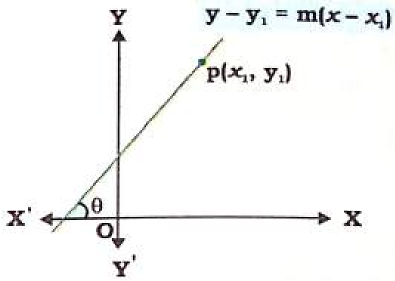
HINTS

$\because \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \Rightarrow \frac{x}{5} + \frac{y}{4} = 1$

$\Rightarrow 4x + 5y = 20 \Rightarrow 4x + 5y - 20 = 0$

बिंदु ढलान रूप

एक बिंदु (x_1, y_1) से गुजरने वाली एक सीधी रेखा का समीकरण और जिसकी प्रवणता (slope) m निम्न द्वारा दिया गया है।



जहाँ $m = \tan\theta$

Ex. बिंदु (3, -5) और प्रवणता 2 पर एक सीधी रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

HINTS रेखा का समीकरण

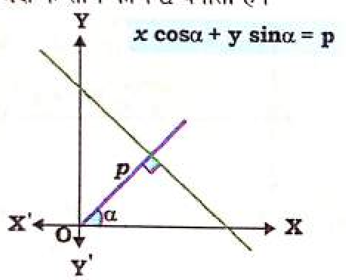
$y - y_1 = m(x - x_1)$

$\Rightarrow y - (-5) = 2(x - 3)$

$\Rightarrow 2x - y - 11 = 0$

लंबवत रूप में

एक सीधी रेखा का समीकरण जिस पर मूल बिंदु से डाले गए लंब की लंबाई p है और यह लंबवत रेखा X-अक्ष के साथ कोण α बनाता है।



Ex. एक रेखा जिसकी मूल बिंदु से लंबवत दूरी $p = 5\sqrt{2}$ इकाई है, तथा धनात्मक X-अक्ष के साथ कोण (α) 45° है, तो रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

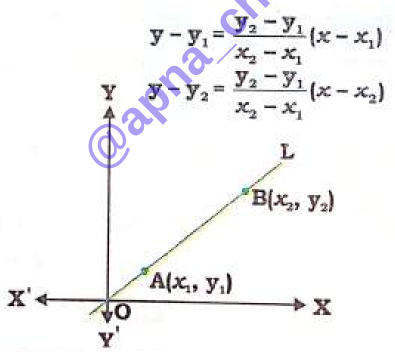
HINTS $\because x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$

$\Rightarrow x\cos45^\circ + y\sin45^\circ = 5\sqrt{2}$

$\therefore x + y = 10$

दो बिंदु के रूप में

बिंदु (x_1, y_1) और (x_2, y_2) से गुजरने वाली सीधी रेखा का समीकरण है।



Ex. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके बिंदु (3, 2) और (4, 5) हैं।

HINTS

रेखा की प्रवणता(Slope) $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-2}{4-3} = 3$

रेखा का समीकरण,

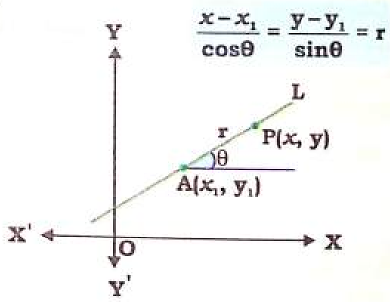
$y - y_1 = m(x - x_1)$

$\Rightarrow y - 2 = 3(x - 3)$

$\Rightarrow 3x - y = 7 \Rightarrow 3x - y - 7 = 0$

दूरी के रूप में

(x_1, y_1) से गुजरने वाली तथा x-अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ θ कोण बनाने वाली सीधी रेखा का समीकरण है।



Ex. एक रेखा बिंदु (5, 4) से होकर जाती है और धनात्मक x-अक्ष के साथ 45° का कोण बनाती है। इस रेखा पर उस बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो (5, 4) से $5\sqrt{2}$ इकाई की दूरी पर है।

HINTS जानते है, $\frac{x - x_1}{\cos\theta} = \frac{y - y_1}{\sin\theta} = r$

$\Rightarrow x = x_1 + r\cos\theta,\ y = y_1 + r\sin\theta$

$\Rightarrow x = 5 + 5\sqrt{2}\cos45^\circ = 10$ इकाई

$\Rightarrow y = 4 + 5\sqrt{2}\sin45^\circ = 9$ इकाई

अतः, P(10, 9)

- एक सरल रेखा का सामान्य रूप $ax + by + c = 0$ होता है।
- X-अक्ष के समांतर और X-अक्ष से a इकाई दूर स्थित सरल रेखा का समीकरण $y = \pm a$ होता है।
- Y-अक्ष के समांतर और Y-अक्ष से b इकाई दूर स्थित सरल रेखा का समीकरण $x = \pm b$ होता है।

@apna_channels
Join Telegram: @apna_rwa

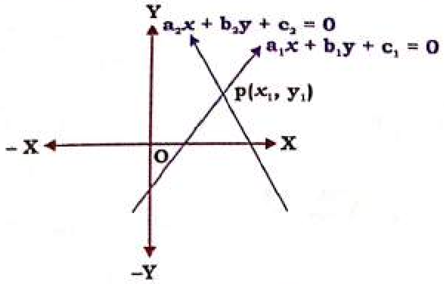
Join Telegram: @yct_publication

दो रेखाओं का प्रतिच्छेद बिंदु

माना, दो प्रतिच्छेदी सीधी रेखाओं के समीकरण हैं।

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ...... (i)

$a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ...... (ii)



माना, दो प्रतिच्छेदी रेखाओं के उपरोक्त समीकरण $P(x_1, y_1)$ पर प्रतिच्छेद करते हैं। तब (x_1, y_1) दोनों समीकरणों (i) और (ii) को संतुष्ट करेगा। इसलिए,

$a_1x_1 + b_1y_1 + c_1 = 0$ और $a_2x_1 + b_2y_1 + c_2 = 0$

☞ दो रेखाओं $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ और $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ के प्रतिच्छेद बिंदु का निर्देशांक है।

$$\left(\frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}\right)$$

Ex. यदि ग्राफ का समीकरणों $3x - 2y + 23 = 0$ और $-2x + y - 13 = 0$ का प्रतिच्छेद बिंदु (p, q) है, तो (3p + q) का मान बराबर है।

HINTS बिंदु (p, q) दोनों समीकरणों को संतुष्ट करेगा, अत:

$3p - 2q + 23 = 0$ ......(i)

$-2p + q - 13 = 0$ ......(ii)

समी. (ii) को 2 से गुणा करें और इसे समी. (i) से जोड़ें,

$p = -3 \Rightarrow q = 7$

$\therefore 3p + q = 3 \times (-3) + 7 = -2$

Ex. समीकरणों $3x + y - 5 = 0$ और $2x - y - 5 = 0$ के दो ग्राफ बिंदु P(a, b) पर प्रतिच्छेद करते हैं। (3a + b) का मान क्या है?

HINTS (a, b) प्रतिच्छेद बिन्दु है तो यह दोनों समीकरणों को संतुष्ट करता है।

$3x + y - 5 = 0 \Rightarrow 3a + b - 5 = 0 \Rightarrow 3a + b = 5$

$2x - y = 5 \Rightarrow 2a - b = 5 \Rightarrow a = 2, b = -1$

$3a + b = 3 \times 2 - 1 = 5$

वैकल्पिक विधि

दी गई रेखाओं का प्रतिच्छेद बिंदु ज्ञात करने के लिए

$3x + y = 5$

$+ 2x - y = 5$

$5x = 10 \quad \Rightarrow x = 2 = a \Rightarrow y = -1 = b$

$\therefore 3a + b = 6 - 1 = 5$

Ex. समीकरण $x - 7y = -42$ का ग्राफ y-अक्ष को P(a, b) पर प्रतिच्छेद करता है और $6x + y - 15 = 0$ का ग्राफ x-अक्ष को Q(g, d) पर प्रतिच्छेद करता है। a + b + g + d का मान क्या है?

HINTS $x - 7y = -42$, y-अक्ष को (a, b) पर प्रतिच्छेद करते हैं और y-अक्ष पर, x-निर्देशांक '0' है

तब, $0 - 7y = -42$

$y = 6$ तब (a, b) = (0, 6)

$6x + y - 15 = 0$ x-अक्ष को (g, d) पर प्रतिच्छेदित करता है।

at x-अक्ष $y = 0$

$6x = 15$

$x = \frac{5}{2} = 2.5$

तब (g, d) = (2.5, 0)

तब (a + b + g + d)

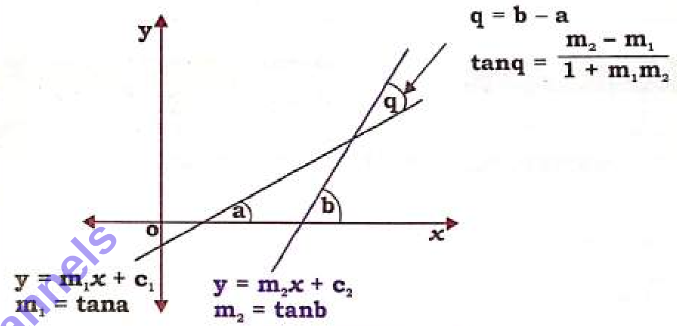
= 0 + 6 + 2.5 + 0 = 8.5

दो रेखाओं के बीच का कोण

यह दो रेखाओं के बीच झुकाव का माप है

- दो रेखाओं के बीच का कोण (θ) जिनके समीकरण $y = m_1x + c_1$ और $y = m_2x + c_2$ हैं, निम्न द्वारा दिया जाता है।

$$\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}\right|$$



$$\tan\theta = \pm\left(\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}\right)$$

|| रेखाओं के लिए, θ = 0°

$\therefore \tan 0° = 0 = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}$

$\therefore m_1 = m_2$

⊥ रेखाओं के लिए, θ = 90°

$\therefore \tan 90° = \infty = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}$

$\therefore m_1m_2 = -1$

☞ यदि θ दो सीधी रेखाओं $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ और $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ के बीच का कोण है, तो

$$\tan\theta = \left|\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_1a_2 + b_1b_2}\right|$$

Ex. रेखाओं $y = 2x + 5$ और $y + 3x + 2 = 0$ के बीच न्यून कोण ज्ञात कीजिए

HINTS दिया गया है, समीकरण $y = mx + c$

$y = 2x + 5, y = -3x - 2$

तुलना करने पर, हमें मिलता है

$m_1 = 2, m_2 = -3$

हम जानते हैं कि,

$$\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}\right| = \left|\frac{2 + 3}{1 - 2 \times 3}\right| = \left|\frac{5}{-5}\right| = 1$$

$\Rightarrow \tan\theta = 1$

$\Rightarrow \theta = 45°$

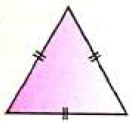
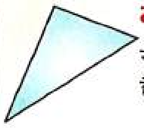
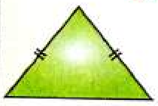
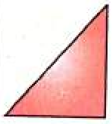
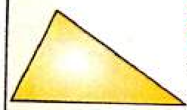
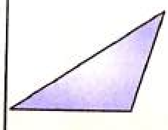
@apna_channels
Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

लंबवत दूरी

(एक बिंदु से लंबवत दूरी)	(मूल बिंदु से लंबवत दूरी)	(दो सामानांतर रेखाओं के बीच की दूरी)
एक बिंदु (x_1, y_1) से एक रेखा $ax + by + c = 0$ की लंबवत दूरी है दूरी $= \frac{\lvert ax_1 + by_1 + c \rvert}{\sqrt{a^2 + b^2}}$	मूल बिंदु (0, 0) से रेखा $ax + by + c = 0$ की लंबवत दूरी दूरी $= \left\lvert \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right\rvert$	दो समांतर रेखाओं $ax + by + c_1 = 0$ और $ax + by + c_2 = 0$ के बीच लंबवत दूरी दूरी $= \left\lvert \frac{c_1 - c_2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right\rvert$
Ex. बिंदु (3, 4) से रेखा $2x + y + 3 = 0$ पर लंबवत एक रेखा खींची गई है, तो लंबवत दूरी ज्ञात कीजिए। **HINTS** हम जानते हैं, दूरी $= \frac{\lvert ax_1 + by_1 + c \rvert}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ $\therefore$ दूरी $= \frac{2 \times 3 + 1 \times 4 + 3}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{13}{\sqrt{5}}$	***Ex.*** रेखा $3x + 4y + 7 = 0$ की मूल बिंदु से लंबवत दूरी ज्ञात कीजिए। **HINTS** हम जानते हैं, दूरी $= \left\lvert \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right\rvert$ $\therefore$ दूरी $= \frac{7}{\sqrt{9+16}} = \frac{7}{5}$	***Ex.*** रेखाओं $3x + 4y + 5 = 0$ और $3x + 4y + 1 = 0$ के बीच की दूरी है। **HINTS** हम जानते हैं, दूरी $= \left\lvert \frac{c_1 - c_2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right\rvert$ $\therefore$ दूरी $= \frac{5-1}{\sqrt{9+16}} = \frac{4}{5}$

त्रिभुज के प्रकार

भुजा के आधार पर	कोण के आधार पर
 **समबाहु त्रिभुज** तीनों भुजाएं समान होती हैं	 **न्यूनकोण त्रिभुज** सभी कोण < 90° होता है
 **समद्विबाहु त्रिभुज** दो भुजाएं समान होती है	 **समकोण त्रिभुज** एक कोण = 90° होता है
 **विषमबाहु त्रिभुज** कोई भी भुजाएं समान नहीं होती हैं	 **अधिककोण त्रिभुज** एक कोण > 90° होता है

Ex. यदि किसी त्रिभुज के तीन शीर्ष (6, 7), (1, 2) और (–5, 8) हैं, तो त्रिभुज है

HINTS A(6, 7), B(1, 2), C(–5, 8)

$AB = \sqrt{(6-1)^2 + (7-2)^2} = 5\sqrt{2}$

$BC = \sqrt{(1+5)^2 + (2-8)^2} = 6\sqrt{2}$

$AC = \sqrt{(6+5)^2 + (7-8)^2} = \sqrt{122}$

इसलिए,

$(\sqrt{122})^2 = (6\sqrt{2})^2 + (5\sqrt{2})^2$

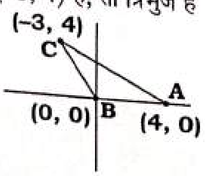
$\Rightarrow 122 = 72 + 50 \Rightarrow 122 = 122$

जो पाइथागोरस प्रमेय को संतुष्ट करता है। यह एक समकोण त्रिभुज है।

Ex. यदि किसी त्रिभुज के तीन शीर्ष (4, 0), (0, 0) और (–3, 4) हैं, तो त्रिभुज है

HINTS (4, 0), (0, 0), (–3, 4)

अधिककोण त्रिभुज



वैकल्पिक विधि

A = (4, 0), B = (0, 0), C = (–3, 4)

$AB = \sqrt{4^2 + 0^2} = 4 \rightarrow a$

$BC = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5 \rightarrow b$

$AC = \sqrt{(-3-4)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{49+16} = \sqrt{65} \rightarrow c$

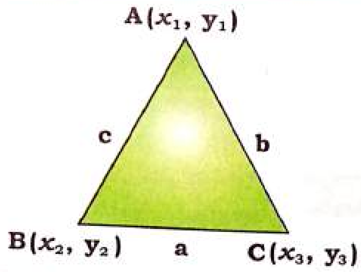
$a^2 = 16 \Rightarrow b^2 = 25 \Rightarrow c^2 = 65$

अब, त्रिभुज की भुजाओं का गुण

$a^2 + b^2 < c^2$

अतः यह अधिक कोण त्रिभुज है।

त्रिभुज का क्षेत्रफल



☞ ΔABC का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2} \lvert x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) \rvert$

क्या आप जानते हैं ?

यदि तीन बिन्दुओं (x_1, y_1), (x_2, y_2) और (x_3, y_3) से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल 0 हो तो तीनों बिन्दुएँ संरेख होंगे

$A = \frac{1}{2} \lvert x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) \rvert = 0$

$\therefore x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0$

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्षों A, B और C के निर्देशांक क्रमशः (3, 4) (–4, 3) और (8, 6) हैं।

HINTS $x_1 = 3, x_2 = -4, x_3 = 8$ और $y_1 = 4, y_2 = 3, y_3 = 6$

त्रिभुज का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$

$= \frac{1}{2}|3(3-6) - 4(6-4) + 8(4-3)|$

$= \left|\frac{-9}{2}\right| = \frac{9}{2}$ वर्ग इकाई

Ex. 'a' का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए बिंदु: (1, 2), (3, 4) और (5, – a) संरेख हैं।

HINTS यदि तीन बिंदु संरेख हों तो किसी भी दो बिंदुओं के साथ प्रवणता (Slope) बराबर होगी।

(1, 2) (3, 4) (5, – a)

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-2}{3-1} = \frac{-a-4}{5-3}$

$\Rightarrow \frac{4-2}{3-1} = \frac{-a-4}{5-3} \Rightarrow \frac{2}{2} = \frac{-a-4}{2} \Rightarrow a = -6$

Ex. समीकरण $x + y = 3$, $2x + 5y = 12$ और x-अक्ष के ग्राफ द्वारा संलग्न त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल (वर्ग इकाई में) क्या है?

HINTS $x + y = 3$, $2x + 5y = 12$ और x–अक्ष

त्रिभुज की भुजाओं के प्रतिच्छेद बिंदु

(I) $x + y = 3$

$\Rightarrow 2x + 5y = 12$

बिंदु = (1, 2)

(II) $x + y = 3$ और x-अक्ष

x-अक्ष पर ($y = 0$)

तब $x = 3$

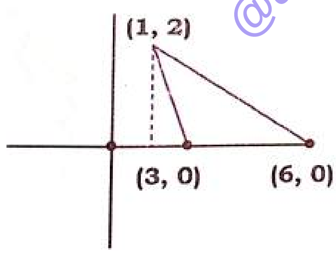
बिंदु = (3, 0)

(III) $2x + 5y = 12$ और x-अक्ष

$2x + 0 = 12$

$\Rightarrow x = 6$

बिंदु = (6, 0)



आधार = 6 – 3 = 3 इकाई

ऊँचाई = 2 इकाई

क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times 3 \times 2$

= 3 इकाई²

Ex. एक त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष A (2, 4), B (0, 0) और C (–3, 6) हैं।

HINTS A(2, 4), B(0, 0) C(–3, 6)

Δ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$

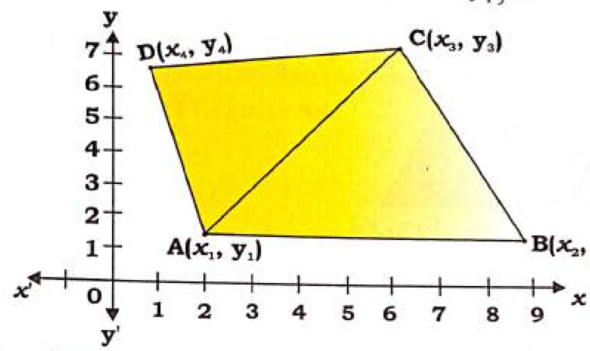
$= \frac{1}{2}|2(0-6) + 0(6-4) - 3(4-0)|$

$= \frac{1}{2}|-12 - 12| = 12$ इकाई²

∴ त्रिभुज का क्षेत्रफल = 12 इकाई²

n भुजाओं वाले बहुभुज का क्षेत्रफल

$\frac{1}{2}\left\{ \begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix} \times \begin{matrix} x_2 \\ y_2 \end{matrix} \times \begin{matrix} x_3 \\ y_3 \end{matrix} \times \begin{matrix} x_4 \\ y_4 \end{matrix} \times \begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix} \right\}$

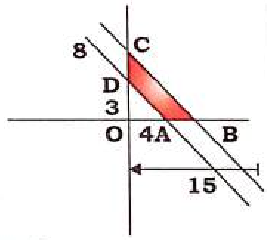


Ex. चार रेखाओं $8x + 15y = 120$, $3x + 4y = 12$, x-अक्ष और y-अक्ष द्वारा बने चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए

HINTS

$8x + 15y = 120 \Rightarrow \frac{x}{15} + \frac{y}{8} = 1$

उसी प्रकार, $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$



चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल

= ArΔOBC – ArΔOAD

$= \frac{1}{2} \times 15 \times 8 - \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 54$ वर्ग इकाई

Ex. चार रेखाओं से बने चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए

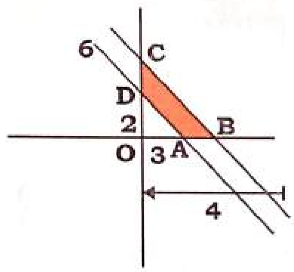
$6x + 4y = 24$, $2x + 3y = 6$, x-अक्ष और y-अक्ष।

HINTS

$6x + 4y = 24 \Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$

इसी प्रकार, $2x + 3y = 6$

$\Rightarrow \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$



चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल

= ΔOBC– ΔOAD

$= \frac{1}{2} \times 4 \times 6 - \frac{1}{2} \times 3 \times 2$

क्षेत्रफल = 9 वर्ग इकाई।

Ex. चार रेखाओं से बने चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

$x + y = 10$, $2x + y = 12$, x-अक्ष और y-अक्ष।

HINTS $x + y = 10 \Rightarrow \frac{x}{10} + \frac{y}{10} = 1$

$2x + y = 12 \Rightarrow \frac{x}{6} + \frac{y}{12} = 1$

चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = ΔOBC – ΔOAD

$= \frac{1}{2} \times 10 \times 12 - \frac{1}{2} \times 6 \times 12$

क्षेत्रफल = 24 वर्ग इकाई।

एक चतुर्भुज है:

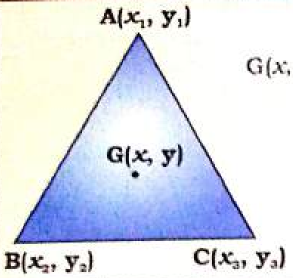
1. आयत, यदि इसकी सम्मुख भुजाएँ बराबर हों तथा विकर्ण बराबर हों।
2. समांतर चतुर्भुज, लेकिन आयत नहीं, यदि इसकी सम्मुख भुजाएँ बराबर हों, लेकिन विकर्ण बराबर न हों।
3. वर्ग, यदि सभी भुजाएँ बराबर हों और विकर्ण बराबर हों।
4. समचतुर्भुज तो है, परंतु वर्ग नहीं, यदि सभी भुजाएँ बराबर हों, परंतु विकर्ण बराबर न हों।

@apna_channels
Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

त्रिभुज के केंद्र

केंद्रक



$$G(x, y) = \left\{\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right\}$$

जहाँ, G(x, y) केन्द्रक का निर्देशांक है

Ex. त्रिभुज ABC के शीर्ष C के निर्देशांक ज्ञात कीजिए यदि अन्य दो शीर्ष A और B के निर्देशांक (-2, 5) और (4, -4) हैं और केन्द्रक के निर्देशांक (3, -2) हैं।

HINTS

माना, शीर्ष C के निर्देशांक (x, y) हैं

यहाँ, $x_1 = -2$, $x_2 = 4$, $y_1 = 5$, $y_2 = -4$ और X = 3, Y = −2

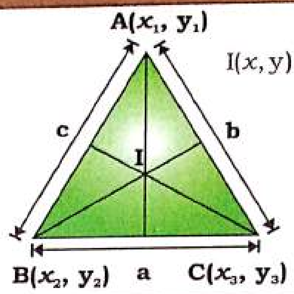
$$\text{केंद्रक } (X, Y) = \left\{\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right\}$$

$$\Rightarrow 3 = \frac{-2 + 4 + x}{3} \Rightarrow x = 7$$

$$\Rightarrow -2 = \frac{5 - 4 + y}{3} \Rightarrow y = -7$$

अत: शीर्ष C के निर्देशांक (7, − 7) हैं।

अंत:केंद्र

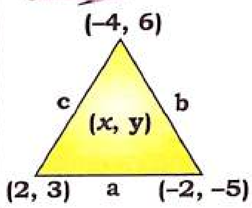


$$I(x, y) = \left[\frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a + b + c}, \frac{ay_1 + by_2 + cy_3}{a + b + c}\right]$$

जहाँ, I(x, y) अंत:केंद्र का निर्देशांक है

Ex. उस त्रिभुज का अंत:केन्द्र ज्ञात कीजिए जिसके शीर्षों के निर्देशांक क्रमश: (−4, 6), (2, 3) और (−2, −5) हैं।

HINTS



$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$a = \sqrt{(2 + 2)^2 + (3 + 5)^2} = 4\sqrt{5} \text{ इकाई}$$

$$b = \sqrt{(-2 + 4)^2 + (-5 - 6)^2} = 5\sqrt{5} \text{ इकाई}$$

$$c = \sqrt{(2 + 4)^2 + (3 - 6)^2} = 3\sqrt{5} \text{ इकाई}$$

माना, अंत:केंद्र के निर्देशांक = (x , y)

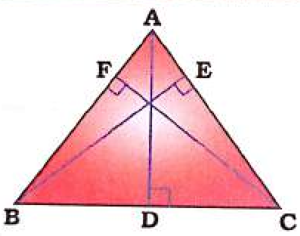
$$x = \frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a + b + c} = \frac{4\sqrt{5}(-4) + 5\sqrt{5}(2) + 3\sqrt{5}(-2)}{4\sqrt{5} + 5\sqrt{5} + 3\sqrt{5}} = -1$$

$$y = \frac{ay_1 + by_2 + cy_3}{a + b + c} = \frac{4\sqrt{5}(6) + 5\sqrt{5}(3) + 3\sqrt{5}(-5)}{4\sqrt{5} + 5\sqrt{5} + 3\sqrt{5}} = 2$$

अत: अंत:केंद्र के निर्देशांक (− 1, 2)

@apna_channels

लंबकेंद्र



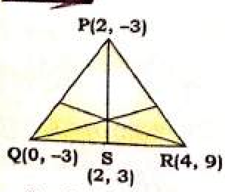
लंबकेंद्र का निर्देशांक =

$$\left(\frac{x_1 \tan A + x_2 \tan B + x_3 \tan C}{\tan A + \tan B + \tan C}, \frac{y_1 \tan A + y_2 \tan B + y_3 \tan C}{\tan A + \tan B + \tan C}\right)$$

- समकोण त्रिभुज के लंबकेंद्र का निर्देशांक = उस शीर्ष का निर्देशांक जिस पर कोण 90° है
- समबाहु त्रिभुज के लंबकेंद्र का निर्देशांक = त्रिभुज के केन्द्रक का निर्देशांक।

Ex. एक समबाहु ΔPQR,का लंबकेंद्र ज्ञात कीजिए, जिसके शीर्ष P(2, −3), Q(0, −3) और R(4, 9) हैं।

HINTS



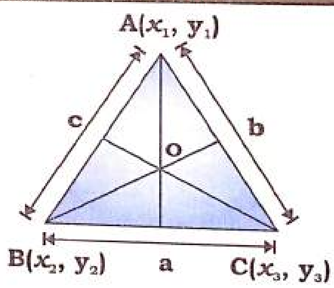
S, QR का मध्य-बिंदु है

S = (2, 3)

$$x = \frac{2 \times 2 + 1 \times 2}{2 + 1} = \frac{6}{3} = 2, y = \frac{1 \times -3 + 2 \times 3}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

O = (2, 1)

परिकेंद्र



परिकेन्द्र का निर्देशांक =

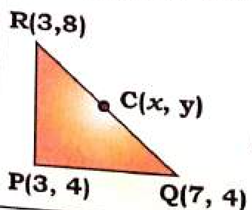
$$\left(\frac{x_1 \sin 2A + x_2 \sin 2B + x_3 \sin 2C}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}, \frac{y_1 \sin 2A + y_2 \sin 2B + y_3 \sin 2C}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}\right)$$

- यदि O परिकेन्द्र है तो OA = OB = OC

Ex. एक समकोण त्रिभुज के शीर्षों के निर्देशांक P(3, 4), Q(7, 4) और R(3, 8) हैं, जो P पर समकोण है। त्रिभुज PQR के परिकेंद्र के निर्देशांक।

HINTS

समकोण त्रिभुज का परिकेन्द्र कर्ण के मध्य बिंदु पर होता है।



$$C(x, y) = \left(\frac{7 + 3}{2}, \frac{8 + 4}{2}\right) = (5, 6)$$

Join Telegram: @apna_rwa

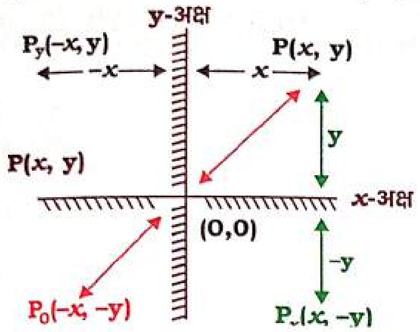
Join Telegram: @yct_publication

दर्पण प्रतिबिंब

(a) x-अक्ष के सापेक्ष (x, y) का दर्पण प्रतिबिंब $(x, -y)$ है

(b) y-अक्ष के सापेक्ष (x, y) का दर्पण प्रतिबिंब $(-x, y)$ है

(c) मूल बिंदु के सापेक्ष (x, y) का दर्पण प्रतिबिंब $(-x, -y)$ है

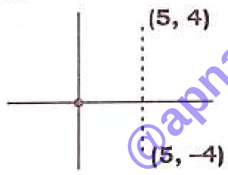


किसी बिंदु के प्रतिबिंब के निर्देशांक ज्ञात करने के लिए इस अवधारणा का उपयोग करें। बिंदु से दर्पण की लंबवत दूरी और प्रतिबिंब से दर्पण की लंबवत दूरी बराबर होती है और दोनों एक ही सीधी रेखा पर स्थित होती हैं।

☞ रेखा $ax + by = c$ पर (x_1, y_1) का परावर्तन बिंदु निम्न सूत्र से गणना किया जाता है।

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{-2(ax_1+by_1+c)}{a^2+b^2}$$

Ex. x-अक्ष पर बिंदु A(5, 4) का प्रतिबिंब ज्ञात कीजिए।

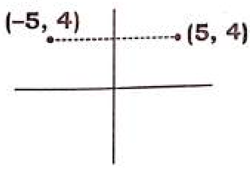


HINTS

बिंदु (x, y) का x-अक्ष पर परावर्तन $(x, -y)$ है

$\therefore$ बिंदु (5, 4) का परावर्तन (5, –4) है

Ex. y-अक्ष पर बिंदु A(5, 4) का प्रतिबिंब ज्ञात कीजिए।



HINTS

बिंदु (x, y) का y-अक्ष पर परावर्तन $(-x, y)$ है।

$\therefore$ बिंदु (5, 4) का परावर्तन (–5, 4) है।

Ex. रेखा $x = 1$ पर बिंदु G(5, +3) का प्रतिबिंब ज्ञात कीजिए।

HINTS हम जानते हैं कि,

परावर्तन = 2 × दर्पण बिंदु – दिया है बिंदु

$= 2 \times 1 - (5) = 2 - 5 = -3$

परावर्तन = (– 3, 3)

Ex. रेखा $x + y = 4$ पर (1, 2) का परावर्तन बिंदु बताइए

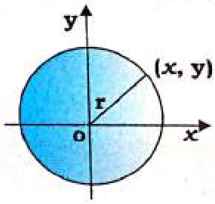
HINTS $\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{-2(ax_1+by_1+c)}{a^2+b^2}$

$$\Rightarrow \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{-2(1\times1+1\times2-4)}{1^2+1^2}$$

$$\Rightarrow x-1 = y-2 = -2\times\left(\frac{-1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow x = 2, y = 3$$

वृत्त



☞ जब केंद्र मूल बिंदु हो, तो वृत्त का समीकरण

$x^2 + y^2 = r^2$

जहाँ, r त्रिज्या है

☞ एक वृत्त का मानक समीकरण जहाँ केंद्र $(-g, -f)$ वाले वृत्त का समीकरण है।

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0,$

और त्रिज्या = $\sqrt{g^2+f^2-c}$

☞ बिंदु (x_1, y_1) पर वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ की स्पर्श रेखा का समीकरण $xx_1 + yy_1 = a^2$ है

☞ बिंदु (x_1, y_1) पर वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ के अभिलंब का समीकरण $xy_1 - x_1y = 0$ है

☞ एक वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ पर बिंदु P (x_1, y_1) से उसके बाहर स्पर्श रेखा की $\sqrt{x_1^2+y_1^2-a^2}$ लंबाई है।

☞ एक वृत्त $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ के बिंदु P (x_1, y_1) पर स्पर्श रेखा का समीकरण $xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$ है

☞ एक वृत्त $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ के बिंदु P (x_1, y_1) पर अभिलंब का समीकरण है:

$$\frac{x-x_1}{x_1+g}=\frac{y-y_1}{y_1+f}$$

☞ एक वृत्त $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ पर उसके बाहर स्थित बिंदु P (x_1, y_1) से स्पर्श रेखा की लंबाई $\sqrt{x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c}$ है।

☞ मान लीजिए $S_1 = x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$ और $S_2 = x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0$, दो प्रतिच्छेदित वृत्त हैं, तो उनकी उभयनिष्ठ जीवा का समीकरण $S_1 - S_2 = 0$ है

$\Rightarrow 2(g_1 - g_2) = 2(f_1 - f_2)y + (c_1 - c_2) = 0$

Ex. केंद्र (1, 2) और त्रिज्या 4 सेमी वाले वृत्त का समीकरण है:

HINTS C(1, 2), r = 4 सेंमी

वृत्त का समीकरण → $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

$\Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 16$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 4y = 11$

Ex. यदि $x^2 + y^2 + 6x + 8y + 11 = 0$ एक वृत्त का समीकरण है, तो इसका केंद्र और त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

HINTS $x^2 + y^2 + 6x + 8y + 11 = 0$

वृत्त का सामान्य समीकरण

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

जहाँ केंद्र $= (-g, -f)$, $r = \sqrt{g^2+f^2-c}$

केंद्र $= \left(\frac{-6}{2}, \frac{-8}{2}\right) = (-3, -4)$

त्रिज्या $= \sqrt{9+16-11} = \sqrt{14}$

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

गोला

गोले का समीकरण $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$ है जहाँ, (a, b, c) = गोले का केंद्र, r = गोले की त्रिज्या

Ex. केंद्र (-1, 2, -3) और 3 इकाई त्रिज्या वाले गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए।

HINTS गोले का समीकरण है:

$\Rightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$

$\Rightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 3^2$

$\Rightarrow x^2 + 1 + 2x + y^2 + 4 - 4y + z^2 + 9 + 6z = 9$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 6z + 5 = 0$

समीकरण प्रणाली

दो रेखाओं का प्रतिच्छेद बिंदु

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ और $a_2x + b_2y + c_2 = 0$

यदि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ रेखाएँ एक दूसरे को ओवरलैप कर रही हैं, इसका अर्थ है:
अनंत हल

Ex. m के किस मान के लिए समीकरणों $17x + my + 102 = 0$ और $23x + 299y + 138 = 0$ की प्रणाली के अनंत हल होंगे?

HINTS दिया है समीकरण,

$17x + my + 102 = 0$

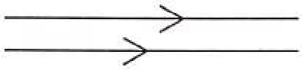
$23x + 299y + 138 = 0$

अनंत हल, प्राप्त करने की शर्तों का उपयोग करते हुए,

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \Rightarrow \frac{17}{23} = \frac{m}{299}$

$\Rightarrow m = \frac{299 \times 17}{23} = 221$

यदि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ रेखाएँ समांतर हैं, अर्थात् कोई हल नहीं



Ex. m के किस मान के लिए समीकरणों $18x - 72y + 13 = 0$ और $7x - my - 17 = 0$ की प्रणाली का कोई हल नहीं होगा?

HINTS दिया है समीकरण,

$18x - 72y + 13 = 0$

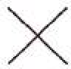
$7x - my - 17 = 0$

कोई हल नहीं, हल प्राप्त करने की शर्तों का उपयोग करते हुए,

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_2}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \Rightarrow \frac{18}{7} = \frac{-72}{-m}$

$\Rightarrow m = \frac{72 \times 7}{18} = 4 \times 7 = 28$

यदि $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ रेखाएँ प्रतिच्छेद कर रही हैं, इसका अर्थ है: अद्वितीय हल



Ex. यदि दो रेखाएँ $3x + 4y = 16$ और $6x + ky = 19$ का अद्वितीय हल है तो k का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS दिया है समीकरण,

$3x + 4y = 16$

$6x + ky = 19$

अद्वितीय हल, प्राप्त करने की शर्तों का उपयोग करते हुए,

$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

$\Rightarrow \frac{3}{6} \neq \frac{4}{k} = \frac{16}{19} \Rightarrow k = \frac{19}{4}$

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

अंकगणित

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

अध्याय 13

अंकीय योग

किसी संख्या के सभी अंकों को जोड़कर प्राप्त एकल अंक को अंकीय योग कहते हैं। यह विधि त्वरित गणना के लिए नहीं, बल्कि उत्तरों की त्वरित जाँच के लिए उपयोग की जाती है।

Ex. (i) 32 के अंको का योग = 3 + 2 = 5

(ii) 73245 के अंको का योग = 7 + 3 + 2 + 4 + 5 = 21

$\Rightarrow 2 + 1 = 3$

(iii) 45397 के अंको का योग = 4 + 5 + 3 + 9 + 7 = 28

$\Rightarrow 2 + 8 = 10 \Rightarrow 1 + 0 = 1$

'या'

किसी संख्या को 9 से भाग देने पर प्राप्त शेष को अंकीय योग कहते हैं।

$$\frac{xy}{9} = \frac{10x+y}{9} = \frac{9x+(x+y)}{9} = x+y$$

Ex. (i) $\frac{42}{9} = \frac{10\times4+2}{9} = \frac{9\times4+(4+2)}{9} = 4+2=6$

'या' $\frac{42}{9} = \frac{4+2}{9} = 6$ (शेषफल)

(ii) 34 का अंकों का योग = 3 + 4 = 7

'या' शेषफल जब 34 को 9 से विभाजित किया जाता है = 7

(iii) 58 का अंकों का योग = 5 + 8 = 13

= 1 + 3 = 4

58 को 9 से विभाजित करने पर शेष = 4

- अंकीय योग विधि का उपयोग विभिन्न अंकगणितीय संक्रियाओं जैसे गुणा, भाग, जोड़, घटाव, वर्ग, वर्गमूल, घनमूल आदि से संबंधित उत्तरों की जांच के लिए किया जा सकता है।

बाएँ पक्ष के अंकों का योग = दाएँ पक्ष के अंकों का योग

अंकों का योग, प्रतिशत या दशमलव पर भी लागू किया जा सकता है।

दशमलव के लिए, अंकों का योग बिल्कुल उसी तरह काम करता है, लेकिन हम दशमलव बिंदुओं पर ध्यान नहीं देते हैं, 6.256 का अंकों का योग (6 + 2 + 5 + 6) = 19 है, 9 को हटा दें, अंकों का योग 1 है

> अंकों का योग निम्नलिखित संख्याओं में से कोई भी हो सकता है 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 या 0.

- उपरोक्त किसी भी अंक में 9 जोड़ने पर अंकों का योग नहीं बदलता, यानी जोड़ते समय 9 को शून्य मानें। इसलिए, किसी संख्या का अंकों का योग निकालते समय, आप सभी 9 और उन सभी अंकों को हटा सकते हैं जिनका योग 9 होता है। ऐसा करने से आप किसी भी संख्या का अंकों का योग बहुत तेज़ी से निकाल पाएँगे। इस निष्कासन का अंतिम परिणाम पर कोई प्रभाव नहीं पड़ेगा।

याद रखें कि 9, 0 का समानार्थी है और इसे एक दूसरे के स्थान पर प्रयोग किया जा सकता है, क्योंकि 9, 9 से विभाज्य होने पर शेषफल 0 बचता है। (9 = 0, अंकों के योग में)

Ex. 2467539 का अंकीय योग ज्ञात कीजिए।

HINTS हम उन संख्याओं को हटा देंगे जिनका योग 9 आता है (2 और 7, 4 और 5, 6 और 3 तथा 9 को भी हटा देंगे)। हमें 0 या 9 प्राप्त होगा।

Ex. 6372819923 का अंकीय योग ज्ञात कीजिए।

HINTS

(i) हम उन संख्याओं को हटा देंगे जिनका योग 9 होता है (6 और 3, 7 और 2, 8 और 1 और दोनों 9 को भी हटा देंगे)। हमारे पास अंक 2 और 3 बचते हैं जिनका योग 5 है।

(ii) 9 के किसी भी गुणज का अंकीय योग 9 होता है।

उदाहरण के लिए

$9 \times 14 = 126 \Rightarrow 1 + 2 + 6 = 9$

$9 \times 43 = 387 \Rightarrow 3 + 8 + 7 = 18 \Rightarrow 1 + 8 = 9$

यह 9 का एक बहुत ही महत्वपूर्ण गुण है। यदि छात्र इसके अनुप्रयोग को अच्छी तरह से समझ लें, तो कई प्रश्नों में, पूरी गणना किए बिना विकल्पों को हटाकर सही उत्तर तक पहुंचा जा सकता है।

- यदि किसी गुणन प्रक्रिया में 9 दिखाई दे या 9 का कोई गुणज दिखाई दे और यह हर 9 द्वारा कट न रहा हो, तो गुणनफल का अंकीय योग सदैव 9 होगा।

@apna_channels

Ex. 2000 कर्मचारियों को एक परियोजना पूरी करने के लिए नियुक्त किया गया है। पहले वर्ष के अंत में, कर्मचारियों की संख्या में 15% की कमी की जाती है और दूसरे वर्ष के अंत में फिर से 10% की कमी की जाती है। हालाँकि, परियोजना को समय पर पूरा करने के लिए, तीसरे वर्ष के अंत में कर्मचारियों की संख्या में 10% की वृद्धि की जाती है। चौथे वर्ष के दौरान कार्यरत कर्मचारियों की संख्या कितनी थी?

(a) 1786 (b) 1685

(c) 1683 (d) 1783

HINTS चौथे वर्ष के दौरान कार्यरत कर्मचारियों की संख्या,

$= 2000 \times \frac{85}{100} \times \frac{90}{100} \times \frac{110}{100} = 1683$

चूँकि 90, 9 का गुणज है, इसलिए गुणनफल के अंकों का योग 9 होगा। दिए गए विकल्पों में से केवल (c) का अंकों का योग 9 है।

Ex. स्वाति ने अंकिता को एक बैग 15% लाभ पर बेचा। आशी ने अंकिता से यह बैग ₹24,840 में खरीदा। अंकिता को 20% लाभ हुआ। स्वाति ने यह बैग कितने में खरीदा होगा?

(a) ₹18,500 (b) ₹18,000

(c) ₹16,000 (d) ₹20,000

HINTS

क्रय मूल्य		विक्रय मूल्य
20	:	23
5	:	6
100	:	138

स्वाति के लिए क्रय मूल्य (CP) = $\frac{24840}{138} \times 100$ = ₹18000

चूँकि 24840 का अंकीय योग 9 है, अर्थात यह 9 का गुणज है और हर से कटेगा नहीं, इसलिए गुणनफल का अंकीय योग 9 होगा।

दिए गए विकल्पों में से केवल (b) के अंको का योग 9 है।

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. एक अर्धगोलाकार कटोरा जिसकी त्रिज्या 21 सेमी है, आइसक्रीम से भरा है। आइसक्रीम का आयतन ज्ञात कीजिए।

($\pi = \frac{22}{7}$)

(a) 20000 सेमी³ (b) 21000 सेमी³
(c) 22000 सेमी³ (d) 19404 सेमी³

HINTS गोलार्ध का आयतन = $\frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \times 21$

= 19404 सेमी³

चूँकि 21 × 21 × 21 में 3 × 3 × 3 होते हैं, जिनमें से एक 3, हर द्वारा कट जाएगा। शेष दो 3 का गुणनफल 9 होगा, अर्थात् अंतिम गुणनफल का अंकों का योग 9 होगा।

दिए गए विकल्पों में से केवल (d) का अंकीय योग 9 है।

Ex. ₹18,000 की एक राशि वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज पर 2 वर्ष बाद ₹21,780 हो जाती है। यदि ब्याज दर में 5% की वृद्धि होती है, तो समान अवधि के लिए समान राशि पर चक्रवृद्धि ब्याज (₹ में) क्या होगा?

(a) 1,845 (b) 4,670
(c) 5,805 (d) 5,500

HINTS

	मूलधन		मिश्रधन	
	18000	:	21780	
सरलीकृत रूप→	900	:	1089	वर्गमूल
	30	:	33	

दर = $\frac{3}{30} \times 100\% = 10\%$

यदि दर में 5% की वृद्धि की जाए तो नई दर = 15%

दो साल के लिए चक्रवृधि ब्याज = $\left(15+15+\frac{15\times15}{100}\right)\% = 32.25\%$

$\Rightarrow \frac{18000}{100} \times 32.25$

चूँकि 18000, 9 का गुणज है, इसलिए गुणनफल का अंकों का योग 9 होगा। दिए गए विकल्पों में से, (a) और (c) का अंकों का योग 9 है। लेकिन जैसा कि हम जानते हैं कि 18000 के 10% का मान 1800 है। यहाँ हमें 32.25% का मान ज्ञात करना है। अतः विकल्प (c) सही उत्तर है।

Ex. $3 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^8$ का योग ज्ञात कीजिए।

(a) 6561 (b) 6560
(c) 9840 (d) 3280

HINTS दिए गए व्यंजक में, 3 को छोड़कर सभी पदों में 9 आ रहा है। इसका अर्थ है कि सही उत्तर 9 के गुणज से 3 अधिक होगा। दिए गए विकल्पों में से, (c) एकमात्र विकल्प है जिसका अंकों का योग 9 के गुणज से 3 अधिक है।

डिजिटल योग का अनुप्रयोग

1. जोड़

अंतिम योगफल का अंकीय योग, जोड़ प्रक्रिया में प्रयुक्त सभी संख्याओं के अंकीय योग के बराबर होना चाहिए।

Ex. 13 + 12 = 25

HINTS 4 और 3 का अंक योग = 7

25 का अंको का योग 2 + 5 = 7 है

इस प्रकार बाएँ पक्ष का अंको का योग = दाएँ पक्ष का अंको का योग।

(ऐसा क्यों होता है? क्योंकि, यदि आप 13 और 12 को 9 से विभाजित करते हैं और शेष को जोड़ते हैं (4 + 3 = 7) जो 25 को 9 से विभाजित करने पर प्राप्त शेष के बराबर है।)

Ex. 1.5 + 32.5 + 23.9 = 57.9

HINTS बाएँ पक्ष के अंको का योग = 6 + 10 + 5 = 21 ⇒ 2 + 1 = 3

दाएँ पक्ष के अंको का योग = 5 + 7 + 9 = 12 ⇒ 1 + 2 = 3

Ex. सत्यापित करें कि क्या 18273645 + 9988888 + 6300852 + 11111111 = 45674496 है।

HINTS

→ बायाँ पक्ष ← → दायाँ पक्ष ←

18273645 + 9988888 + 6300852 + 11111111 = 45674496

D.S(0) D.S(4) D.S(6) D.S(8) ⇒ D.S

D.S = 9

अंतिम अंकीय योग = 9

अतः प्रश्न का अंको का योग (बाएं से दाएं) उत्तर के अंको का योग (दाएं से दाएं) के बराबर है।

अर्थात्, हम मान सकते हैं कि जोड़ सही है।

2. घटाव

बड़ी संख्या के अंकों के योग से, छोटी संख्या के अंकों के योग को, घटाने पर प्राप्त अंको का योग, अंतर के अंकों के योग के बराबर होना चाहिए।

Ex. 88 – 13 = 75

HINTS बाएँ पक्ष के अंकों का योग = 7 – 4 = 3

दाएँ पक्ष के अंकों का योग = 7 + 5 = 12

⇒ 1 + 2 = 3

Ex. 73 – 16 = 57

HINTS बाएँ पक्ष के अंकों का योग = 1 – 7 = – 6 + **9** = 3

यदि अंकों का योगफल ऋणात्मक आए तो उसमें 9 जोड़ दें और परिणाम वास्तविक अंकों का योगफल होगा। (इसे याद रखें)

दाएँ पक्ष के अंकों का योग = 5 + 7 = 12 ⇒ 1 + 2 = 3

Ex. 2470 – 1140 = 1330

HINTS बाएँ पक्ष के अंकों का योग = 4 – 6 = – 2 + **9** = 7

यदि अंकों का योगफल ऋणात्मक आए तो उसमें 9 जोड़ दीजिए और परिणाम वास्तविक अंकों का योगफल होगा। (इसे याद रखें)

दाएँ पक्ष के अंकों का योग = 1 + 3 + 3 = 7

Ex. सत्यापित करें कि क्या 32586 –12598 = 19988 है।

HINTS

→ बायाँ पक्ष ← → दायाँ पक्ष ←

32586 – 12598 = 19988

D.S(6) D.S(7) D.S(8)

6 में से 7 घटाने पर हमें – 1 प्राप्त होता है, अर्थात – 1 + **9** = 8

इसके अलावा 19988 का अंकीय योग भी 8 है।

अतः प्रश्न का बायाँ पक्ष दायाँ पक्ष के बराबर है।

अर्थात्, हम मान सकते हैं कि घटाव सही है।

3. गुणा

सबसे पहले हम पहली संख्या का अंकीय योग ज्ञात करेंगे, फिर दूसरी संख्या का अंकीय योग ज्ञात करेंगे, फिर दोनों अंकों के योग को गुणा करेंगे। यदि अंतिम उत्तर गुणनफल के अंकों के योग के बराबर आता है, तो हमारा उत्तर सही माना जा सकता है।

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

उदाहरण के लिए, 15 × 13 = 195

बायाँ पक्ष दायाँ पक्ष
15 × 13 = 195
↓ ↓ ↓
D.S(6) D.S(4) D.S(6)

बाएँ पक्ष का अंकीय योग = दाएँ पक्ष का अंकीय योग

Ex. सत्यापित करें कि क्या 467532 को 107777 से गुणा करने पर 50389196364 प्राप्त होता है।

HINTS ⟶ बायाँ पक्ष ⟵ ⟶ दायाँ पक्ष ⟵
467532 × 107777 = 50389196364
467532 के अंकों का योग 9 है।
107777 के अंकों का योग 2 है।
बाएँ पक्ष के अंकों का योग = 9 × 2 = 18 = 9
50389196364 के अंकों का योग भी 9 है।
अतः प्रश्न के अंकों का योग उत्तर के अंकों के योग के बराबर है।
अर्थात्, हम मान सकते हैं कि गुणनफल सही है।

Ex. 95 × 105 का मान है:
(a) 9981 (b) 9935
(c) 9965 (d) 9975

HINTS (95 × 105) के गुणन का अंकीय योग = 5 × 6 = 3
केवल विकल्प (d) का अंकीय योग 3 है, जो सही उत्तर है।

4. भाग

भाग में अंश का कोई प्रभाव नहीं पड़ता। इसलिए, यह व्यंजक में प्रयुक्त हर पर निर्भर करता है।

हम अंकीय योग विभाजन प्रक्रिया में हर के अंकों के योग का तरीका सीख सकते हैं जैसा कि नीचे लिखा गया है।

$$\frac{N^r}{1}, \frac{N^r}{2}, \frac{N^r}{3}, \frac{N^r}{4}, \frac{N^r}{5}, \frac{N^r}{6}, \frac{N^r}{7}, \frac{N^r}{8}, \frac{N^r}{9 or 0}$$

जब हर में 3, 6 या 9 हो, तो अंकों के योग का नियम लागू नहीं होता। ऐसी स्थिति में, पहले अंश से 3, 6 या 9 को हटाने का प्रयास करें और फिर अंकों का योग लगाएँ। यदि हर में से 3, 6 या 9 नहीं हटाया जा सकता, तो अंकों के योग का नियम लागू नहीं होगा।

Ex. $\frac{1092}{156} = 7$

HINTS हर का अंकीय योग = 3
इसलिए अंश और हर दोनों में से 3 को हटाने का प्रयास करें।
$\frac{364}{52}$, अब हर का अंकीय योग = 7
$\therefore \frac{364 \times 4}{52 \times 4} = 7$
अतः, बाएँ पक्ष का अंकीय योग = दाएँ पक्ष का अंकीय योग
हर में यदि 3, 6 या 9 के अलावा कोई अन्य अंक योग प्राप्त हो तो हम उसे 1 बनाने का प्रयास करते हैं।

हर के अंक का योग 1 बनाने के लिए महत्वपूर्ण बिंदु

(i) यदि हर का अंकीय योग 1 है तो अंश का अंकीय योग भागफल के अंकीय योग के बराबर होता है (उत्तर)।

$$\frac{N^r}{1} = N^r$$

(ii) यदि हर का अंकीय योग 2 है, तो इसे 1 बनाने के लिए, अंश और हर को 5 से गुणा करें।

$$\frac{N^r}{2} = \frac{N^r \times 5}{2 \times 5} = \frac{N^r \times 5}{10} = \frac{N^r \times 5}{1} = 5 \times N^r$$

(iii) यदि हर का अंकीय योग 4 है, तो इसे 1 बनाने के लिए अंश और हर को 7 से गुणा करें।

$$\frac{N^r}{4} = \frac{N^r \times 7}{4 \times 7} = \frac{N^r \times 7}{28} = N^r \times 7$$

(iv) यदि हर का अंकीय योग 5 है, तो इसे 1 बनाने के लिए, अंश और हर को 2 से गुणा करें।

$$\frac{N^r}{5} = \frac{N^r \times 2}{5 \times 2} = \frac{N^r \times 2}{10} = N^r \times 2$$

(v) यदि हर का अंकीय योग 7 है, तो इसे 1 बनाने के लिए, अंश और हर को 4 से गुणा करें।

$$\frac{N^r}{7} = \frac{N^r \times 4}{7 \times 4} = \frac{N^r \times 4}{28} = N^r \times 4$$

(vi) यदि हर का अंकीय योग 8 है, तो उसे 1 बनाने के लिए, अंश और हर को 8 से गुणा करें।

$$\frac{N^r}{8} = \frac{N^r \times 8}{8 \times 8} = \frac{N^r \times 8}{64} = \frac{N^r \times 8}{10} = N^r \times 8$$

@apna_channels

Ex. $\frac{38982}{73} = 534$

HINTS बाएँ पक्ष का अंकीय योग
⇒ अंश का अंकीय योग = 3, हर का अंकीय योग = 1
यानी, बाएँ पक्ष का अंकीय योग $= \frac{3}{1} = 3$
दाएँ पक्ष का अंकीय योग = 5 + 3 + 4 = 3
(5 और 4 का योग 9 होता है, इसे हटा दें)

Ex. $\frac{2343}{11} = 213.$

HINTS हर का अंकीय योग = 2 $\therefore \frac{2343 \times 5}{11 \times 5}$
अंश का अंकीय योग = 6, हर का अंकीय योग = 1
⇒ बाएँ पक्ष का अंकीय योग $= \frac{6}{1} = 6$, दाएँ पक्ष का अंकीय योग = 6

Ex. $\frac{12927}{31} = 417$

HINTS हर का अंकीय योग = 4 $\therefore \frac{12927 \times 7}{31 \times 7}$
अंश का अंकीय योग = 3 और हर का अंकीय योग = 4 × 7 = 28 = 1
⇒ बाएँ पक्ष का अंकीय योग $= \frac{3}{1} = 3$
दाएँ पक्ष का अंकीय योग = 4 + 1 + 7 = 12 = 3.

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. $\frac{15826}{41} = 386$

HINTS हर का अंकीय योग = 5

$\therefore \frac{15826 \times 2}{41 \times 2}$

अंश का अंकीय योग = 8, हर का अंकीय योग = 1

⇒ बाएँ पक्ष का अंकीय योग = $\frac{8}{1} = 8$

दाएँ पक्ष का अंकीय योग = 3 + 8 + 6 = 8

Ex. $\frac{31,928}{52} = 614$

HINTS हर का अंकीय योग = 5 + 2 = 7

$\therefore \frac{31,928 \times 4}{52 \times 4}$

अंश का अंकीय योग = 2 और हर का अंकीय योग = 1

⇒ बाएँ पक्ष का अंकीय योग = $\frac{2}{1} = 2$

दाएँ पक्ष का अंकीय योग = 2

Ex. $\frac{25347}{71} = 357$

HINTS हर का अंकीय योग = 8

$\therefore \frac{25347 \times 8}{71 \times 8}$

अंश का अंकीय योग = 6, और हर का अंकीय योग =1

⇒ बाएँ पक्ष का अंकीय योग = $\frac{6}{1} = 6$

दाएँ पक्ष का अंकीय योग = 3 + 5 + 7 = 6

> यदि अंश और हर का अंकीय योग किसी उभयनिष्ठ गुणनखंड के कारण कट जाता हैं, तो उन्हें काटे ना।
> बल्कि हर = 1 बनाने का प्रयास करें।

5.पूर्ण वर्ग/वर्गमूल

वर्गमूल के अंकों का योग, स्वयं से गुणा करने पर, वर्ग के अंकों के योग के बराबर होना चाहिए।

पूर्ण वर्ग संख्या का अंकीय योग सदैव 1, 4, 7, 9 होता है

Ex. सत्यापित करें कि क्या 23, 529 का वर्गमूल है।

HINTS 23 का अंक योग 5 है और जब 5 को स्वयं से गुणा किया जाता है तो उत्तर 25 आता है। 25 का अंक योग 7 है और 529 का अंक योग भी 7 है।

> • कोई संख्या पूर्ण वर्ग नहीं हो सकती यदि उसके अंकों का योग 1, 4, 7 या 9 के अलावा कोई अन्य हो।
> • कोई संख्या पूर्ण वर्ग नहीं हो सकती यदि उसका इकाई अंक 1, 4, 5, 6 या 9 के अलावा कोई अन्य हो।

Ex. निम्नलिखित में से कौन सा एक पूर्ण वर्ग है?

(a) 6250.49 (b) 1250.49
(c) 5768.28 (d) 1354.24

HINTS विकल्प (c) का इकाई अंक 8 है, इसलिए यह पूर्ण वर्ग नहीं हो सकता। विकल्प (a), (b) और (d) के अंकीय योग क्रमशः 8, 3 और 1 हैं। इसलिए, विकल्प (d) पूर्ण वर्ग है।

Ex. निम्नलिखित में से कौन सा एक पूर्ण वर्ग है?

(a) 2361.96 (b) 2758.28
(c) 7256.84 (d) 6250.49

HINTS विकल्प (b) का इकाई अंक 8 है, इसलिए यह पूर्ण वर्ग नहीं हो सकता। विकल्प (a), (c) और (d) के अंकीय योग क्रमशः 9, 5 और 8 हैं। इसलिए, विकल्प (a) पूर्ण वर्ग है।

Ex. तीन क्रमागत विषम प्राकृतिक संख्याओं का योग 375 है। इनमें से सबसे छोटी संख्या का वर्ग ज्ञात कीजिए?

(a) 15129 (b) 1309
(c) 15128 (d) 15245

HINTS मान लीजिए संख्या $x-2, x, x+2$ है

⇒ जोड़ = $3x = 375 \Rightarrow x = 125$

अतः, सबसे छोटी संख्या = $x - 2 = 125 - 2 = 123$

हमें 123^2 का मान निकालना है।

$(123)^2$ का अंकीय योग = $(1 + 2 + 3)^2 = 9$

"दिए गए विकल्पों में से केवल विकल्प (a) का अंकों का योग 9 है।"

6.पूर्ण घन/घनमूल

घनमूल के अंकों का योगफल, जब स्वयं से तथा पुनः स्वयं से गुणा किया जाता है, तो घन के अंकों के योगफल के बराबर होना चाहिए।

पूर्ण घन संख्या का अंकीय योग सदैव 1, 8, 9 होता है

Ex. सत्यापित करें कि क्या 2197, 13 का घन है।

HINTS 13 का अंकीय योग 4 है। 4 को स्वयं से तथा पुनः स्वयं से गुणा करने पर 64 प्राप्त होता है। 64 का अंकीय योग 1 है तथा 2197 का अंक योग भी 1 है।

@apna_channels

Ex. 3375 का घनमूल बराबर है:

(a) 35 (b) 25 (c) 55 (d) 15

HINTS 3375 का अंकीय योग = 9

दिए गए विकल्पों में से हमें यह देखना है कि किस विकल्प के घन का अंकों का योग 9 है। विकल्प (d) का अंकों का योग 6 है, जिसके घन 216 का अंकों का योग भी 9 है, अतः विकल्प (d) सही उत्तर है।

Ex. $(14)^3 = ?$

(a) 2544 (b) 2644 (c) 2744 (d) 2844

HINTS $(14)^3$ का अंकीय योग = $(1 + 4)^3 = 8$

दिए गए विकल्पों में से केवल विकल्प (c) का अंकीय योग 8 है। अतः यह सही उत्तर है।

Ex. निम्नलिखित व्यंजक का मान ज्ञात कीजिए।

$12^3 + (-8)^3 + (-4)^3$

(a) 952 (b) 1152
(c) 1052 (d) 852

HINTS $[12^3 + (-8)^3 + (-4)^3]$ का अंकीय योग = 9 – 8 – 1 = 0/9

दिए गए विकल्पों में से केवल विकल्प (d) का अंकीय योग 9 है। अतः यह सही उत्तर है।

7. अभाज्य संख्या

अभाज्य संख्या का अंकों का योग 3, 6, 9 नहीं हो सकता

Ex. दी गई संख्याओं के बीच अभाज्य संख्या ज्ञात कीजिए

6753, 1467, 1009, 5361

(a) 1467 (b) 1009
(c) 5361 (d) 6753

HINTS सभी विकल्पों में अंकों का योग = 3, 6, 9 है केवल विकल्प (b) में अंकों का योग = 1 है इसलिए विकल्प (b) सही उत्तर होगा।

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

पिछले वर्ष के प्रश्नों में अंकीय योग का प्रयोग

Ex. (260 का 31%) × ? = 12896

(a) 150 (b) 140 (c) 160 (d) 180

HINTS अंकीय योग का प्रयोग करें

$4 \times 8 \times ? = 8 \Rightarrow ? = \frac{8 \times 2}{5 \times 2} = 7$(अंकीय योग)

इसका मतलब है कि उत्तर का अंकीय योग 7 होना चाहिए।

दिए गए विकल्पों में से केवल विकल्प (c) का अंकीय योग 7 है।

Ex. 8800 का 12.8% – 5550 का 16.4% = ? का 20%

(a) 965 (b) 996 (c) 1004 (d) 1081

HINTS अंकीय योग का प्रयोग करें

$2 \times 7 - 2 \times 6 = 2 \times ?$

$\Rightarrow 5 - 3 = 2 \times ? \Rightarrow ? = \frac{2 \times 5}{2 \times 5} = 1.$

इसका मतलब है कि उत्तर का अंकीय योग 1 होना चाहिए।

दिए गए विकल्पों में से केवल विकल्प (d) का अंकीय योग 1 है।

Ex. सरलीकरण करें: 626 × 2912 ÷ 8138

(a) 285 (b) 224 (c) 364 (d) 310

HINTS $\frac{626 \times 2912}{8138} = \frac{5 \times 5 \times 5}{2 \times 5} = 8$

केवल विकल्प (b) में अंकों का योग = 8 है इसलिए विकल्प (b) उत्तर होगा।

Ex. 120 का 53% + 862 का 25% = 500 का ?%

(a) 92.50 (b) 55.82 (c) 63.68 (d) 38.89

HINTS अंकीय योग का प्रयोग करें

$8 \times 3 + 7 \times 7 = ? \times 5$

$\Rightarrow ? = \frac{10}{5} \Rightarrow ? = \frac{10 \times 2}{5 \times 2} = 2$

इसका मतलब है कि उत्तर के अंकों का योग 2 होना चाहिए।

दिए गए विकल्पों में से केवल विकल्प (b) का अंकीय योग 2 है।

Ex. निम्नलिखित को सरल कीजिए:

21 – 4.9 ÷ 7 + 3.9 × 0.4 + 0.9

(a) 18.23 (b) 24.12 (c) 26.32 (d) 22.76

HINTS $3 - 7 + 3 = -1 \Rightarrow -1 + 9 = 8$

केवल विकल्प (d) का अंकीय योग 8 है, अतः उत्तर विकल्प (d) होगा।

Ex. $(1004)^2 - (998)^2$ =?

(a) 11012 (b) 12012 (c) 22012 (d) 2212

HINTS अंकीय योग का प्रयोग करें

$5^2 - 8^2 = 25 - 64 = 7 - 1 = 6$

इसका मतलब है कि उत्तर के अंकों का योग 6 होना चाहिए।

दिए गए विकल्पों में से केवल विकल्प (b) का अंकीय योग 6 है।

Ex. यदि 400 का 30% + 70 का x% = 536 का 25% x का मान ज्ञात कीजिए।

(a) 20 (b) 30 (c) 10 (d) 40

HINTS अंकीय योग का प्रयोग करें

$3 \times 4 + 7x = 7 \times 5$

$\Rightarrow 3 + 7x = 8 \Rightarrow x = \frac{5}{7} \Rightarrow x = \frac{5 \times 4}{7 \times 4} = 2$

इसका मतलब है कि उत्तर के अंकों का योग 2 होना चाहिए।

दिए गए विकल्पों में से केवल विकल्प (a) का अंकों का योग 2 है।

Ex. ? के स्थान पर क्या मान आना चाहिए?

$9 + 3300$ का $13\frac{2}{3}\% + 184$ का $25\% = ?$ का 40%

(a) 1165 (b) 1265

(c) 1365 (d) 965

HINTS "दूसरे पद के हर 3 को हटाने के लिए, हम इसे 3300 से काट देते हैं।"

9 + 1100 का 41% + 184 का 25% = ? का 40%

अंकीय योग का प्रयोग करें,

$0 + 5 \times 2 + 7 \times 4 = 4 \times ?$

$\Rightarrow ? = \frac{2 \times 7}{4 \times 7} = 5$

इसका मतलब है कि उत्तर का अंकों का योग 5 होना चाहिए।

दिए गए विकल्पों में से केवल (b) का अंक योग 5 है।

Ex. प्रश्नवाचक चिन्ह के स्थान पर क्या मान आना चाहिए?

$\frac{357000 \text{ का } 12\%}{42 \text{ का } 17\%} + \frac{58500 \text{ का } 15\%}{45 \text{ का } 13\%} = ?$

(a) 7600 (b) 7500

(c) 7800 (d) 9100

HINTS "पहले पद में हर का अंकीय योग 3 है, इसलिए हम अंश में 12 और हर में 42 में से 3 को कट करते हैं

पहले पद का अंकीय योग = 6 और हर का अंकीय योग = 4

पहले पद का अंकीय योग = $\frac{6 \times 7}{4 \times 7} = 6$

दूसरे पद में हर का अंकीय योग 9 है, इसलिए हम अंश में 58500 में से 9 और हर में 45 को काट देते हैं

दूसरे पद के अंश का अंकीय योग = 3 और हर का अंकीय योग = 2

दूसरे पद में अंकीय योग = $\frac{3 \times 5}{2 \times 5} = 6$

कुल अंकीय योग = 6 + 6 = 3

दिए गए विकल्पों में केवल (b) का अंकीय योग 3 है।

Ex. एक निश्चित राशि 15% प्रति वर्ष की दर से $2\frac{2}{5}$ वर्षों में ₹4205.55 हो जाती है, जिस पर ब्याज वार्षिक रूप से संयोजित होता है। राशि है:

(a) ₹3000 (b) ₹3500

(c) ₹2700 (d) ₹3200

HINTS प्रथम और द्वितीय वर्ष के लिए ब्याज दर = 15%

तीसरे वर्ष के लिए ब्याज दर = $\frac{2}{5} \times 15 = 6\%$

अब,

$P\left(\frac{115}{100} \times \frac{115}{100} \times \frac{106}{100}\right) = 4205.55$

D.S = 1 D.S = 3

P का अंकीय योग = 3

केवल विकल्प (a) संतुष्ट करता है।

Ex. यदि a = 102 है, तो $a(a^2 - 3a + 3)$ का मान ज्ञात कीजिए।

(a) 1030302 (b) 1010101

(c) 1000002 (d) 9999992

HINTS a का अंकीय योग = 102 = 3.

अंकीय योग का प्रयोग करें,

3(9 – 9 + 3) = 9

केवल विकल्प (a) का अंकीय योग 9 है।

@apna_channels
Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. यदि P = 99, तो $P(P^2 + 3P + 3)$ का मान है:
(a) 998889 (b) 999999
(c) 988899 (d) 989898

HINTS P का अंकीय योग = 99 = 9 या 0
$P(P^2 + 3P + 3)$, 9 का गुणज है।
इस व्यंजक का अंकीय योग 9 होगा।
केवल विकल्प (b) संतुष्ट है।

Ex. यदि $A = \left(\frac{1}{0.4}\right) + \left(\frac{1}{0.04}\right) + \left(\frac{1}{0.004}\right) + \ldots$ 8 पदों तक, तो A का मान क्या है?
(a) 27272727.5 (b) 25252525.5
(c) 27777777.5 (d) 55555555.5

HINTS यदि हम हर के प्रत्येक पद के हर का अंकीय योग 1 कर दें। हमें उन्हें 7 से गुणा करना होगा। इस प्रकार हमें पूरे व्यंजक में 8 गुणा 7 प्राप्त होगा।
अंकीय योग = 8 × 7 = 56 = 11 = 2.
केवल विकल्प (c) संतुष्ट है

Ex. X अपनी मासिक आय का 24% घरेलू खर्चों पर, 16% मनोरंजन पर और 28% शिक्षा पर खर्च करता है। शेष राशि में से वह 72% दान कर देता है और उसके पास ₹2403.52 बचते हैं। उसकी मासिक आय ज्ञात कीजिए।
(a) ₹24725 (b) ₹26825
(c) ₹25625 (d) ₹29325

HINTS $X \times \frac{32}{100} \times \frac{28}{100} = 2403.52$

बाएँ पक्ष का अंकीय योग = X × 5 × 1 = X × 5
दाएँ पक्ष का अंकीय योग = 7
X का अंकीय योग = $\frac{7 \times 2}{5 \times 2} = 5$
केवल विकल्प (b) संतुष्ट है

Ex. पहले वर्ष में, एक कस्बे की जनसंख्या में 12% की वृद्धि हुई। अगले वर्ष, किसी संक्रामक रोग के कारण, इसमें 8% की कमी आई। दूसरे वर्ष के अंत में, जनसंख्या 64,400 थी। पहले वर्ष की शुरुआत में कस्बे की जनसंख्या ज्ञात कीजिए।
(a) 50,000 (b) 54,750
(c) 62,500 (d) 50,500

HINTS $x \times \frac{112}{100} \times \frac{92}{100} = 64,400$

बाएँ पक्ष का अंकीय योग = $x \times 4 \times 2 = x \times 8$
दाएँ पक्ष का अंकीय योग = 5
x का अंकीय योग = $\frac{5 \times 8}{8 \times 8} = 4$
केवल विकल्प (c) संतुष्ट है।

Ex. ₹12,500 लागत की एक निर्मित वस्तु 10% लाभ पर बेची जाती है। आपूर्तिकर्ता ने इसे दुकानदार को 5.5% लाभ पर बेचा। दुकानदार ने इस पर अपने क्रय मूल्य से ₹2,393.75 अधिक मूल्य अंकित किया और ग्राहक को 10% की छूट दी। दुकानदार द्वारा अर्जित लाभ ज्ञात कीजिए।
(a) ₹653.75 (b) ₹693.75
(c) ₹703.75 (d) ₹600.75

HINTS क्रय मूल्य = $\left[12,500 \times \frac{11}{10} \times \frac{105.5}{100}\right]$
क्रय मूल्य का अंकीय योग = 5
दुकानदार का विक्रय मूल्य
$= \left[12,500 \times \frac{11}{10} \times \frac{105.5}{100} + 2393.75\right] \times \frac{9}{10}$
विक्रय मूल्य का अंकीय मूल्य = 9
(किसी भी संख्या को 9 से गुणा करने पर अंकों का योग 9 होता है)
लाभ = विक्रय मूल्य – क्रय मूल्य = 9 – 5 = 4
केवल विकल्प (c) संतुष्ट है।

Ex. एक कोचिंग सेंटर में 45 छात्रों की कक्षा के अंग्रेजी परीक्षा के औसत अंक 52 हैं। 40 औसत अंक वाले 6 लड़कों का एक समूह कक्षा छोड़ देता है और 43 औसत अंक वाले आठ लड़कों का एक अन्य समूह कक्षा में शामिल हो जाता है। कक्षा का नया औसत अंक क्या है?
(a) 48 (b) 53 (c) 49.5 (d) 52

HINTS नया औसत = $\frac{45 \times 52 + (8 \times 43 - 6 \times 40)}{45 - 6 + 8}$
अंकीय योग का प्रयोग करें
$\frac{9 + 2 - 6}{9 - 6 + 8} = \frac{5 \times 5}{2 \times 5} = 7$
इसका मतलब है कि उत्तर का अंकों का योग 7 होना चाहिए।
दिए गए विकल्पों में से केवल विकल्प (d) का अंकीय योग 7 है।

Ex. $(1018)^2 - 1019 \times 1017 + 1015 \times 1012 - 1016 \times 1011$ का मान क्या है?
(a) 1 (b) 4 (c) 3 (d) 5

HINTS
$(1018)^2 - 1019 \times 1017 + 1015 \times 1012 - 1016 \times 1011$
↓ D.S(1) ↓ D.S(2) ↓ D.S(0/9) ↓ D.S(7) ↓ D.S(4) ↓ D.S(8) ↓ D.S(3)
अंकीय योग का प्रयोग करें
1 – 9/0 + 1 – 6 = –4 + **9** = 5
इसका मतलब है कि उत्तर की संख्याओं का योग 5 होना चाहिए।
दिए गए विकल्पों में से केवल विकल्प (d) सही है।

@apna_channels

Ex. X और Y प्रति माह औसतन ₹72000 की आय अर्जित करते हैं, जिसमें से वे प्रति माह औसतन ₹38800 की बचत करते हैं, जिससे X, Y से ₹5600 कम बचाता है। यदि X का व्यय उसकी आय का 55% है, तो Y का प्रतिशत व्यय ज्ञात कीजिए।
(a) 20% (b) 25%
(c) 30% (d) 35%

HINTS **X** : **Y**
(k – 5600) : k
k + k – 5600 = 77600 ⇒ k = 41600
X की बचत = 41600 – 5600 = ₹36000
45% = 36000
X की आय = ₹80,000
y की आय = 144000 – 80,000 = 64000
y का व्यय = 64000 – 41600 = 22400
y का % व्यय = $\frac{22400}{64000} \times 100 = 35\%$
इसका मतलब है कि उत्तर का अंकीय योग 8 होना चाहिए।
दिए गए विकल्पों में से केवल विकल्प (d) का अंकीय योग 8 है।

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. किसी निश्चित धनराशि पर एक वर्ष में चक्रवृद्धि ब्याज ₹6860 है और दूसरे वर्ष में ₹7840 है। चौथे वर्ष में चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए।

(a) ₹10240 (b) ₹11340 (c) ₹10780 (d) ₹9850

HINTS दर = $\frac{(7840-6860)}{6860}\times100 = 14\frac{2}{7}\%$

चौथे वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज = $7840\times\frac{8}{7}\times\frac{8}{7}$

उपरोक्त गुणनफल का अंकों का योग 7 है। दिए गए विकल्पों में (a) और (c) का अंकों का योग 7 है। लेकिन गुणनफल भी 8 का गुणज है, अतः विकल्प (c) कट जाता है।

Ex. यदि किसी कक्षा के $\frac{1}{5}$ भाग के औसत अंक 77% हैं और कक्षा के $\frac{1}{4}$ भाग के औसत अंक 85% हैं तथा शेष कक्षा के औसत अंक 52% हैं, तो पूरी कक्षा के औसत अंक ज्ञात कीजिए।

(a) 57.75% (b) 65.25% (c) 68.55% (d) 43.50%

HINTS मान लीजिए, कुल छात्र 100 हैं

औसत = $\frac{(20\times77)+(85\times25)+(52\times55)}{100}$

अंकीय योग का प्रयोग करें

$2\times5+4\times7+7\times1 = 1+1+7 = 9$

इसका मतलब है कि उत्तर का अंकों का योग 9 होना चाहिए।

दिए गए विकल्पों में से केवल विकल्प (b) का अंकीय योग 9 है।

Ex. एक निश्चित धनराशि पर 16% वार्षिक ब्याज दर से 3 वर्षों में वार्षिक रूप से संयोजित होने वाले चक्रवृद्धि ब्याज और साधारण ब्याज के बीच का अंतर ₹3792 है। तो मूलधन ज्ञात कीजिए।

(a) ₹31250 (b) ₹62500 (c) ₹39062.50 (d) ₹46875

HINTS हम जानते हैं,

$$C.I - S.I. = P\left(\frac{R}{100}\right)^2\left(\frac{300+R}{100}\right)$$

$$\Rightarrow 3792 = P\left(\frac{16}{100}\right)^2\times\frac{316}{100}$$

अंकीय योग का प्रयोग करें

$3 = P\times4\times1 \Rightarrow P = \frac{3\times7}{4\times7} = 3$

इसका मतलब है कि उत्तर का अंकीय योग 3 होना चाहिए।

दिए गए विकल्पों में से केवल (d) का अंकीय योग 3 है।

Ex. निम्नलिखित आंकड़ों से व्यक्तियों की औसत ऊंचाई ज्ञात कीजिए।

ऊंचाई (सेमी)	लोगों की संख्या
120	3
130	4
140	5
150	6
160	2

(a) 150 सेमी (b) 145 सेमी
(c) 160 सेमी (d) 140 सेमी

HINTS

माध्य = $\frac{(3\times120)+(4\times130)+(5\times140)+(6\times150)+(2\times160)}{20}$

अंकीय योग का प्रयोग करें

$\frac{0+7+7+0+5}{2} = \frac{1\times5}{2\times5} = 5$

इसका मतलब है कि उत्तर का अंकों का योग 5 होना चाहिए।

दिए गए विकल्पों में से केवल विकल्प (d) का अंकीय योग 5 है।

अभाज्य संख्या के विभाज्यता का प्रयोग

☞ किसी भी गुणन प्रक्रिया में जब भी कोई अभाज्य संख्या या अभाज्य संख्या का गुणज दिखाई दे, तो गुणनफल भी उसी अभाज्य संख्या का गुणज होगा। दिए गए विकल्पों में उस अभाज्य संख्या की विभाज्यता की जाँच कीजिए।

Ex. 23.1 सेमी लंबाई का एक चाप केंद्र पर 18° का कोण बनाता है। वृत्त का क्षेत्रफल क्या है?

$[\pi = \frac{22}{7}]$

(a) 16978.50 सेमी² (b) 16988.50 सेमी²
(c) 16878.50 सेमी² (d) 16798.50 सेमी²

HINTS वृत्त का क्षेत्रफल = πr^2

$\pi = \frac{22}{7}$ का प्रयोग करने का अर्थ है कि अंतिम उत्तर अभाज्य संख्या 11 से विभाज्य होगा।

दिए गए विकल्पों में से केवल (a) 11 से विभाज्य है।

Ex. एक वस्तु के अंकित मूल्य ₹1,250 पर 5%, 15% और 20% की तीन क्रमिक छूट दी जाती है। सभी छूटों के बाद विक्रय मूल्य क्या होगा?

(a) ₹1,000 (b) ₹807.50
(c) ₹975.75 (d) ₹950.25

HINTS SP = $1250\times\frac{19}{20}\times\frac{17}{20}\times\frac{4}{5}$ = ₹807.5

चूंकि 17 और 19 अभाज्य संख्याएँ हैं, इसलिए उनका गुणनफल भी 17 या 19 से विभाज्य होगा। दिए गए विकल्पों में से केवल विकल्प (b) ही 17 या 19 से विभाज्य है।

@apna_channels

Ex. एक विधानसभा चुनाव में, एक उम्मीदवार को कुल वैध मतों का 60% मत प्राप्त हुआ। कुल मतों में से 2% अवैध घोषित कर दिए गए। यदि मतदाताओं की कुल संख्या 1,50,000 है, तो उस उम्मीदवार के पक्ष में डाले गए वैध मतों की संख्या ज्ञात कीजिए।

(a) 90,000 (b) 78,000
(c) 86,400 (d) 88,200

HINTS आवश्यक मतों की संख्या = $1,50,000\times\frac{98}{100}\times\frac{3}{5}$

चूंकि 98, 7 का गुणज है और यह हर से कटेगा नहीं इसलिए गुणनफल भी 7 का गुणज होगा या 7 से विभाज्य होगा। दिए गए विकल्पों में से केवल (d) ही 7 से विभाज्य है।

Ex. 35 मीटर × 25 मीटर × 5 मीटर के एक हॉल की पेंटिंग करनी है। इसकी 1.7 मीटर × 1.2 मीटर की तीन दीवारों पर 3 खिड़कियाँ हैं। दीवार की पेंटिंग की लागत ₹12 प्रति वर्ग मीटर, छत की पेंटिंग की लागत ₹18 प्रति वर्ग मीटर और खिड़की की पेंटिंग की लागत ₹15 प्रति वर्ग मीटर है। हॉल की पेंटिंग की कुल लागत ज्ञात कीजिए।

(a) ₹24998.06 (b) ₹23968.60
(c) ₹22978.60 (d) ₹22968.36

HINTS हॉल की पेंटिंग की कुल लागत = दीवारों का क्षेत्रफल × 12 + छत का क्षेत्रफल × 18 + खिड़की का क्षेत्रफल × 15

"12, 18 और 15 सभी अभाज्य संख्या 3 के गुणज हैं, अर्थात अंतिम उत्तर भी 3 से विभाज्य होगा। दिए गए विकल्पों में से केवल विकल्प (d) 3 से विभाज्य है।"

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. एक व्यक्ति को ₹7,500 के मूलधन पर 7% प्रति वर्ष की दर से साधारण ब्याज पर दो वर्ष बाद कितनी राशि प्राप्त होगी?

(a) ₹8,400 (b) ₹8,550

(c) ₹7,600 (d) ₹7,400

HINTS "इस प्रश्न में, हमें 114% का मान ज्ञात करना है। 114, जो कि 19 × 6 है, इसलिए सही उत्तर 19 का गुणज होगा। विकल्प (b) और (c) दोनों 19 के गुणज हैं, लेकिन सही उत्तर भी 6 या 3 का गुणज होना चाहिए। केवल विकल्प (b) 3 का गुणज है।"

इकाई अंक का प्रयोग

☞ अब हम आपको विकल्प हटाने के एक और उपयोगी टूल, 'इकाई अंक की प्रयोग' के बारे में बता रहे हैं। इसका उपयोग करके आप गलत विकल्पों को हटाकर सही उत्तर तक पहुँच सकते हैं। "यदि दिए गए विकल्पों के इकाई अंक अलग-अलग हैं, तो अंतिम गणना करते समय हमें केवल इकाई अंक पर ही काम करना चाहिए।"

Ex. यदि एक गोले का आयतन 24,416.64 सेमी³ है, तो इसका पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ($\pi = 3.14$) जो दशमलव के दो स्थानों तक सही हो।

(a) 3069.55 सेमी² (b) 4069.44 सेमी²

(c) 5069.66 सेमी² (d) 6069.67 सेमी²

HINTS $\frac{4}{3}\pi r^3 = 24416.64$

$\Rightarrow r^3 = 5832 \Rightarrow r = 18$

अब, $4\pi r^2 = 4 \times 3.14 \times 18 \times 18$

गुणा न करें, केवल इकाई के अंकों पर कार्य करें जिससे उत्तर का इकाई अंक 4 प्राप्त होगा। केवल विकल्प (b) में इकाई अंक 4 है।

Ex. 4 महिलाएं और 7 पुरुष 7 दिनों में कुल ₹11,480 कमाते हैं, जबकि 10 महिलाएं और 17 पुरुष 9 दिनों में कुल ₹36,360 कमाते हैं। 11 महिलाएं और 9 पुरुष मिलकर 13 दिनों में कितना कमाएंगे (₹ में)?

(a) 42770 (b) 42640

(c) 42510 (d) 42900

HINTS $\frac{(4W + 7M) \times 7}{11480} = \frac{(10W + 17M) \times 9}{36360}$

हल करने के बाद हमें मिलता है, $\frac{M}{W} = \frac{3}{5}$

$\frac{(4W + 7M) \times 7}{11480} = \frac{(11W + 9M) \times 13}{x}$

$\Rightarrow \frac{41 \times 7}{11480} = \frac{82 \times 13}{x} \Rightarrow x = 40 \times 82 \times 13 = 42640$

अंतिम चरण में गुणा न करें, केवल इकाई अंकों पर कार्य करें जिससे दाईं ओर से शून्येतर संख्या 4 प्राप्त होगी। केवल विकल्प (b) ही संतुष्ट होगा।

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

अध्याय 14

प्रतिशतता

प्रति → प्रत्येक, शत → सौ(100)

प्रतिशतः प्रतिशत का शाब्दिक अर्थ "प्रति सौ" से है अर्थात् 37% का मतलब सौ में से 37 या $\frac{37}{100}$ है। प्रतिशत को '%' से दर्शाया जाता है। दूसरे शब्दों में यह कहा जा सकता है कि प्रतिशत वह भिन्न है जिसका प्रत्येक हर 100 और भिन्न कोई निश्चित राशि होती है, यह निश्चित राशि प्रति सैकड़ा कहलाती है।

Ex. $P\% = \frac{P}{100}$, $19\% = \frac{19}{100}$, $41\% = \frac{41}{100}$, $\frac{3}{7}\% = \frac{3}{700}$, $\frac{5}{9}\% = \frac{5}{900}$ इत्यादि।

☞ यदि किसी भिन्न को प्रतिशत में बदलना हो तो भिन्न को 100 से गुणा करें और '%' चिह्न लगा दें।

भिन्न से प्रतिशत में परिवर्तन

भिन्न	प्रतिशत	दशमलव	भिन्न	प्रतिशत	दशमलव
1	100%	100%	$\frac{1}{16}$	$6\frac{1}{4}\%$	6.25%
$\frac{1}{2}$	50%	50%	$\frac{1}{17}$	$5\frac{15}{17}\%$	5.88%
$\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}\%$	33.33%	$\frac{1}{18}$	$5\frac{5}{9}\%$	5.55%
$\frac{1}{4}$	25%	25%	$\frac{1}{19}$	$5\frac{5}{19}\%$	5.26%
$\frac{1}{5}$	20%	20%	$\frac{1}{20}$	5%	5%
$\frac{1}{6}$	$16\frac{2}{3}\%$	16.66%	$\frac{1}{21}$	$4\frac{16}{21}\%$	4.76%
$\frac{1}{7}$	$14\frac{2}{7}\%$	14.28%	$\frac{1}{22}$	$4\frac{6}{11}\%$	4.54%
$\frac{1}{8}$	$12\frac{1}{2}\%$	12.5%	$\frac{1}{23}$	$4\frac{8}{23}\%$	4.34%
$\frac{1}{9}$	$11\frac{1}{9}\%$	11.11%	$\frac{1}{24}$	$4\frac{1}{6}\%$	4.16%
$\frac{1}{10}$	10%	10%	$\frac{1}{25}$	4%	4%
$\frac{1}{11}$	$9\frac{1}{11}\%$	9.09%	$\frac{1}{30}$	$3\frac{1}{3}\%$	3.33%
$\frac{1}{12}$	$8\frac{1}{3}\%$	8.33%	$\frac{1}{40}$	$2\frac{1}{2}\%$	2.5%
$\frac{1}{13}$	$7\frac{9}{13}\%$	7.69%	$\frac{1}{50}$	2%	2%
$\frac{1}{14}$	$7\frac{1}{7}\%$	7.14%	$\frac{1}{60}$	$1\frac{2}{3}\%$	1.67%
$\frac{1}{15}$	$6\frac{2}{3}\%$	6.66%	$\frac{1}{70}$	$1\frac{3}{7}\%$	1.43%

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

आधार भिन्नों से व्युत्पन्न भिन्न

$\frac{1}{4} = 25\% \xrightarrow{\times 3} \frac{3}{4} = 75\%$ (×3)

$\frac{1}{5} = 20\% \xrightarrow{\times 4} \frac{4}{5} = 80\%$ (×4)

आधारभूत	व्युत्पन्न
$\frac{1}{3} = 33\frac{1}{3}\%$	$\frac{2}{3} = 66\frac{2}{3}\%$
$\frac{1}{5} = 20\%$	$\frac{2}{5} = 40\%, \frac{3}{5} = 60\%, \frac{4}{5} = 80\%$
$\frac{1}{6} = 16\frac{2}{3}\%$	$\frac{5}{6} = 5 \times 16\frac{2}{3}\% = 83\frac{1}{3}\%$
$\frac{1}{7} = 14\frac{2}{7}\%$	$\frac{2}{7} = 28\frac{4}{7}\%, \frac{4}{7} = 57\frac{1}{7}\%, \frac{5}{7} = 71\frac{3}{7}\%, \left\{\frac{6}{7} = 1 - \frac{1}{7} = 100\% - 14\frac{2}{7}\% = 85\frac{5}{7}\%\right\}$
$\frac{1}{8} = 12\frac{1}{2}\%$	$\frac{3}{8} = 37\frac{1}{2}\%, \frac{5}{8} = 62\frac{1}{2}\%, \left\{\frac{7}{8} = 1 - \frac{1}{8} = 100\% - 12\frac{1}{2}\% = 87\frac{1}{2}\%\right\}$
$\frac{1}{9} = 11\frac{1}{9}\%$	$\frac{2}{9} = 22\frac{2}{9}\%, \frac{4}{9} = 44\frac{4}{9}\%, \frac{5}{9} = 55\frac{5}{9}\%, \frac{7}{9} = 77\frac{7}{9}\%, \left\{\frac{8}{9} = 1 - \frac{1}{9} = 100\% - 11\frac{1}{9}\% = 88\frac{8}{9}\%\right\}$
$\frac{1}{11} = 9\frac{1}{11}\%$	$\frac{2}{11} = 18\frac{2}{11}\%, \frac{5}{11} = 45\frac{5}{11}\%, \frac{7}{11} = 63\frac{7}{11}\%, \frac{10}{11} = 90\frac{10}{11}\%$
$\frac{1}{15} = 6\frac{2}{3}\%$	$\frac{11}{15} = 73\frac{1}{3}\%$
$\frac{1}{16} = 6\frac{1}{4}\%$	$\frac{3}{16} = 18\frac{3}{4}\%, \frac{11}{16} = 68\frac{3}{4}\%, \frac{13}{16} = 81\frac{1}{4}\%, \left\{\frac{13}{16} = 1 - \frac{3}{16} = 100\% - 18\frac{3}{4}\% = 81\frac{1}{4}\%\right\}$
$\frac{1}{48} = 2\frac{1}{12}\%$	$\frac{17}{48} = 17 \times 2\frac{1}{12}\% = 35\frac{5}{12}\%$

@apna_channels

आधारभूत नियम

(i) प्रतिशत को भिन्न या दशमलव भिन्न में बदलने के लिए: % चिन्ह हटाएँ और 100 से भाग दें।

Ex. $10\% = \frac{10}{100} = 0.1$

Ex. $15\frac{5}{8}\% \rightarrow \frac{125}{8}\% \rightarrow \frac{125}{800} \rightarrow \frac{5}{32}$

Ex. $35\frac{5}{7}\% \rightarrow 5 \times 7\frac{1}{7}\% \rightarrow 5 \times \frac{1}{14} \rightarrow \frac{5}{14}$

(ii) यदि आपको किसी संख्या 'x' का y% ज्ञात करना हो, तो:

x का y% $= x \times \frac{y}{100}$

Ex. 600 का 30% $= 600 \times \frac{30}{100} = 180$

(iii) यदि 'x' को 'y' के प्रतिशत के रूप में व्यक्त करना है, तब अभीष्ट प्रतिशत $= \frac{x}{y} \times 100\%$

Ex. 40 किग्रा, 160 किग्रा का कितना % है?

HINTS अभीष्ट % $= \frac{40}{160} \times 100\% = 25\%$

Ex. 180, 125 का कितना % है?

HINTS अभीष्ट % $= \frac{180}{125} \times 100\% = 144\%$

(iv) यदि आपको ज्ञात करना है कि x, y से कितने प्रतिशत कम या अधिक है, तो:

अभीष्ट % $= \frac{|(y - x)|}{y} \times 100\%$

Ex. 99, 135 से कितने % कम है?

HINTS अभीष्ट % $= \frac{(135 - 99)}{135} \times 100\% = 26\frac{2}{3}\%$

वैकल्पिक विधि

इसे निम्न अनुपात द्वारा भी हल किया जा सकता है।

99 : 135

सरलतम अनुपात

11 : 15

(− 4)

अभीष्ट% $= \frac{4}{15} \times 100\% = 26\frac{2}{3}\%$

Ex. 24, 20 से कितने प्रतिशत अधिक है?

HINTS अभीष्ट % $= \frac{(24 - 20)}{20} \times 100\% = 20\%$

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

वैकल्पिक विधि

इसे निम्न अनुपात द्वारा भी हल किया जा सकता है।

24 : 20

सरलतम अनुपात 6 : 5 (+1)

अभीष्ट % = $\frac{1}{5} \times 100\% = 20\%$

(v) y का x% = x का y% ⇒ $\frac{x}{100} \times y = \frac{y}{100} \times x$

Ex. 20 का 10% = 10 का 20%

HINTS $20 \times \frac{10}{100} = 10 \times \frac{20}{100} \Rightarrow 2 = 2$

(vi) x का (p + q)% = x का p% + x का q%

Ex. 500 का 111% ज्ञात करें।

HINTS 500 का (100% + 10% + 1%)
= 500 का 100% + 500 का 10% + 500 का 1%
= 500 + 50 + 5 = 555

महत्वपूर्ण बिंदु

(i) जब 'x' को x% बढ़ाया जाता है, तो कुल मान होगा-

10 + 10 × 10% = 10.1$\underline{00}$ = 11.00%

20 + 20 × 20% = 20.4$\underline{00}$ = 24.00%

30 + 30 × 30% = 30.9$\underline{00}$ = 39.00%

40 + 40 × 40% = 40.16$\underline{00}$ = 56.00%

50 + 50 × 50% = 50.25$\underline{00}$ = 75.00%

60 + 60 × 60% = 60.36$\underline{00}$ = 96.00%

70 + 70 × 70% = 70.49$\underline{00}$ = 119.00%

80 + 80 × 80% = 80.64$\underline{00}$ = 144.00%

> $x.x^2$ अर्थात् हम पहले x लिखेंगे और तब दशमलव लगा के दी गई संख्या का वर्ग लिखेंगे। यदि x^2, 3 या 4 अंक का है तो उसके 2 अंक दशमलव के दाहिने में रहेंगे और शेष दशमलव के बाँए अर्थात् x को कैरी (carry) दे देंगे।

(ii) जब 'x' को x% घटाया जाता है, तब कुल मान-

10 – 10 × 10% = 10.1$\underline{00}$ = 9%

20 – 20 × 20% = 20.4$\underline{00}$ = 16%

30 – 30 × 30% = 30.9$\underline{00}$ = 21%

40 – 40 × 40% = 40.16$\underline{00}$ = 24%

50 – 50 × 50% = 50.25$\underline{00}$ = 25%

60 – 60 × 60% = 60.36$\underline{00}$ = 24%

70 – 70 × 70% = 70.49$\underline{00}$ = 21%

80 – 80 × 80% = 80.64$\underline{00}$ = 16%

(iii) (a) pq.pqpq...% = $\frac{pq}{(100-1)} = \frac{pq}{99}$

Ex. 23.23 ... % = $\frac{23}{99}$

18.18 ... % = $\frac{18}{99} = \frac{2}{11}$

(b) pq.2pq ... % = $\frac{pq}{(100-2)} = \frac{pq}{98}$

Ex. 28.57 ... % = $\frac{28}{98} = \frac{2}{7}$

33.66 ... % = $\frac{33}{98}$

(c) pq.3pq ... % = $\frac{pq}{(100-3)} = \frac{pq}{97}$

Ex. 14.42 ... % = $\frac{14}{97}$

11.33 ... % = $\frac{11}{97}$

AB नियम

नीचे दिए गए कथनों का ध्यानपूर्वक अध्ययन करें।

यदि किसी वस्तु की कीमत में A% की वृद्धि होती है, तो वस्तु की खपत में कितनी कमी करनी चाहिए, ताकि व्यय समान रहे?

'या'

यदि एक व्यक्ति की आय दूसरे व्यक्ति से A% अधिक है, तो दूसरे व्यक्ति की आय पहले व्यक्ति की तुलना में कितनी कम है?

'या'

यदि किसी वस्तु के मूल्य में A% की कमी कर दी जाए, तो व्यय को समान बनाए रखने के लिए वस्तु की खपत में कितनी वृद्धि होगी?

'या'

यदि 'x', 'y' से A% कम है, तो y, 'x' से कितने % अधिक है?

इस प्रकार के प्रश्नों में AB-नियम का प्रयोग करें।

Ex. A की आय B की आय से 25% अधिक है। B की आय A की आय से कितने प्रतिशत कम है?

HINTS (समान, विपरीत)

25% = $\frac{+1}{4}$ ⟹ $\frac{-1}{5} \times 100\% = 20\%$

∴ B की आय A की आय से 20% कम है।

Ex. रीता की आय रिचा की आय से 15% कम है। रिचा की आय रीता की आय से कितने प्रतिशत अधिक है?

HINTS (समान, विपरीत)

15% = $\frac{-3}{20}$ ⟹ $\frac{+3}{17} \times 100\% = \frac{300}{17}\%$

∴ रिचा की आय रीता की आय से $\frac{300}{17}\%$ अधिक है।

Ex. जनशक्ति में कमी के कारण, एक कंपनी में उत्पादन 35% कम हो जाता है। मूल उत्पादन को बहाल करने के लिए कार्य के घंटों में कितने प्रतिशत की वृद्धि की जानी चाहिए?

HINTS (समान, विपरीत)

35% = $\frac{-7}{20}$ ⟹ $\frac{+7}{13} \times 100\% = 53.85\%$

∴ मूल उत्पादन को बहाल करने के लिए कार्य के घंटे में 53.85% की वृद्धि की जानी चाहिए।

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. चीनी की कीमत में 25% की वृद्धि हुई है। तो खपत में कितने प्रतिशत की कमी आएगी ताकि व्यय वही रहे?

HINTS $25\% = \frac{+1}{4}$ (समान, विपरीत) $= \frac{-1}{5} \times 100\% = 20\%$

∴ खपत में 20% की कमी की जानी चाहिए ताकि व्यय समान रहे।

क्रमागत प्रतिशत परिवर्तन पर आधारित

जब किसी मात्रा पर लगातार दो या उससे अधिक प्रतिशत परिवर्तन लागू किए जाते हैं, तो प्रतिशत परिवर्तन को **क्रमागत प्रतिशत परिवर्तन** कहा जाता है। यहाँ, अंतिम परिवर्तन दो या उससे अधिक प्रतिशत का साधारण योग नहीं है। क्रमागत प्रतिशत परिवर्तन में किसी मात्रा को कुछ प्रतिशत से परिवर्तित किया जाता है और प्राप्त नई मात्रा को दूसरे प्रतिशत से परिवर्तित किया जाता है, यानी, दोनों प्रतिशत एक ही वास्तविक मात्रा पर लागू नहीं होते हैं।

☞ यदि x% और y% परिवर्तन क्रमागत रूप से होता है, तो कुल % परिवर्तन

$$= \left(x + y + \frac{xy}{100}\right)\%$$

☞ यदि x%, y% और z% परिवर्तन क्रमागत रूप से होता है, तो कुल % परिवर्तन

$$= \left[(x+y+z) + \frac{xy+yz+zx}{100} + \frac{xyz}{10000}\right]\%$$

(i) यदि किसी संख्या में a% की वृद्धि की जाए और फिर उसमें b% की कमी की जाए, तो परिणामी प्रतिशत परिवर्तन होगा

$$= \left(a - b - \frac{ab}{100}\right)\%$$

(कमी के लिए ऋणात्मक चिन्ह और वृद्धि के लिए धनात्मक चिन्ह)

(ii) यदि किसी संख्या में a% की कमी की जाए और फिर उसमें b% की वृद्धि की जाए, तो शुद्ध वृद्धि या कमी प्रतिशत है $= \left(-a + b - \frac{ab}{100}\right)\%$

(कमी के लिए ऋणात्मक चिन्ह और वृद्धि के लिए धनात्मक चिन्ह)

(iii) यदि किसी संख्या में पहले a% तथा फिर b% की कमी की जाए, तो शुद्ध कमी प्रतिशत है $= \left(-a - b + \frac{ab}{100}\right)\%$ (ऋणात्मक चिन्ह कमी के लिए है)

(iv) यदि किसी संख्या में पहले a% की वृद्धि की जाए तथा पुनः b% की वृद्धि की जाए, तो कुल वृद्धि प्रतिशत है $= \left(a + b + \frac{ab}{100}\right)\%$

(v) यदि किसी संख्या में x% की वृद्धि की जाए और फिर उसमें x% की कमी कर दी जाए, तो प्रतिशत परिवर्तन $\frac{x^2}{100}\%$ की कमी होगी।

"20% वृद्धि के बाद 20% कमी ≠ 0% शुद्ध परिवर्तन"

Ex. एक संख्या में 25% की वृद्धि की जाती है और फिर 16% की कमी की जाती है, परिणामी संख्या मूल संख्या से कितने प्रतिशत कम या अधिक है?

HINTS शुद्ध परिवर्तन $= \left(25 - 16 - \frac{25 \times 16}{100}\right)\%$

$= (9 - 4)\% = 5\%$ (वृद्धि)

Ex. डेविड का वेतन पहले 40% घटाया गया और बाद में 50% बढ़ा दिया गया। उसे अपने शुरुआती वेतन से कितने प्रतिशत का नुकसान हुआ?

HINTS % परिवर्तन $= \left(-40 + 50 - \frac{40 \times 50}{100}\right)\%$

$= (10 - 20)\% = -10\%$

(ऋणात्मक चिन्ह कमी दर्शाता है)

∴ प्रारंभिक वेतन में 10% की कमी।

Ex. एक कार की कीमत दो क्रमागत वर्षों में क्रमशः 15% और 20% कम हो जाती है। दो वर्षों के बाद कार की कीमत में कितने प्रतिशत की कमी होगी?

HINTS क्रमागत % परिवर्तन $= \left(-15 - 20 + \frac{15 \times 20}{100}\right)\%$

$= (-35 + 3)\% = -32\%$

(ऋणात्मक चिन्ह कमी दर्शाता है)

Ex. यदि किसी वस्तु का मूल्य क्रमशः 15% और 10% बढ़ा दिया जाए, तो एकल वृद्धि कितने प्रतिशत के बराबर होगी?

HINTS एकल समतुल्य % वृद्धि

$= \left(15 + 10 + \frac{15 \times 10}{100}\right)\% = (25 + 1.5)\% = 26.5\%$

Ex. X के वेतन में 20% की वृद्धि की गई और फिर 20% की कमी की गई। वेतन में क्या प्रतिशत परिवर्तन हुआ?

HINTS $\frac{x^2}{100}\% = \frac{20 \times 20}{100}\% = 4\%$ कमी

अनुपात का सिद्धांत

यदि दिया गया % मान मिश्रित भिन्न है, तो अनुपात विधि का प्रयोग करें।

Ex. यदि किसी मूवी टिकट की कीमत में $12\frac{1}{2}\%$ की वृद्धि हुई तथा टिकटों की बिक्री में भी $8\frac{1}{2}\%$ की वृद्धि हुई, तो आय में % परिवर्तन ज्ञात कीजिए।

HINTS $12\frac{1}{2}\% \uparrow = \frac{1}{8}$+, $8\frac{1}{2}\% \uparrow = \frac{17}{200}$+

आय = मूल्य × बिक्री

मूल्य →	8	:	9
बिक्री →	200	:	217
आय →	8×200	:	9×217
	1600	:	1953

अंतर = 353

$\therefore$ % परिवर्तन $= \frac{353}{1600} \times 100 = 22.0625\%$

वैकल्पिक विधि

% परिवर्तन $= \left(12.5 + 8.5 + \frac{12.5 \times 8.5}{100}\right)\%$

$= (21 + 1.0625)\% = 22.0625\%$

Ex. रामनारायण के वेतन में $3\frac{1}{8}\%$ की कमी की गई और फिर कम किए गए वेतन में $7\frac{2}{5}\%$ की वृद्धि की गई। उसका नया वेतन उसके मूल वेतन की तुलना में कितने प्रतिशत (दो दशमलव स्थानों पर पूर्णांकित) अधिक/कम है?

HINTS $3\frac{1}{8}\% = \frac{25}{8}\% = \frac{1}{32}$

$7\frac{2}{5}\% = \frac{37}{5}\% = \frac{37}{500}$

नया		पुराना
32	:	31
500	:	537
16000	:	16647

अंतर 647

$\therefore$ अभीष्ट % $= \frac{647}{16000} \times 100\% = 4.04\%$ अधिक

@apna_channels
Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. एक संख्या में पहले 40% की वृद्धि की जाती है और फिर 25% की कमी की जाती है, फिर से 15% की वृद्धि की जाती है और फिर 20% की कमी की जाती है। संख्या में शुद्ध वृद्धि या कमी प्रतिशत क्या है?

HINTS $40\% = \frac{+2}{5}$, $25\% = \frac{-1}{4}$, $15\% = \frac{+3}{20}$, $20\% = \frac{-1}{5}$

नया	:	पुराना
5	:	7
4	:	3
20	:	23
5	:	4
500	:	483

अंतर 17

$\% \text{ कमी} = \frac{17}{500} \times 100\% = 3.4\%$

परिमाप, क्षेत्रफल और आयतन पर आधारित

Ex. एक वर्ग की लंबाई और चौड़ाई में क्रमशः 30% और 20% की वृद्धि की जाती है। परिणामी आयत का क्षेत्रफल वर्ग के क्षेत्रफल से कितना अधिक है?

HINTS $30\% \uparrow = \frac{3}{10}+$, $20\% \uparrow = \frac{1}{5}+$

	नया	:	पुराना
लम्बाई →	10	:	13
चौड़ाई →	5	:	6
क्षेत्रफल →	25	:	39

अंतर 14

∴ क्षेत्रफल में % वृद्धि $= \frac{14}{25} \times 100\% = 56\%$

वैकल्पिक विधि

क्रमागत विधि द्वारा,

क्षेत्रफल में वृद्धि $= \left(30+20+\frac{30\times20}{100}\right)\% = 56\%$

Ex. एक बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल कितने प्रतिशत कम हो जाएगा, यदि उसकी त्रिज्या 30% बढ़ा दी जाए तथा ऊँचाई 30% कम कर दी जाए?

HINTS $30\% \uparrow = \frac{3}{10}+$, $30\% \downarrow = \frac{3}{10}-$

बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi rh$

	नया	:	पुराना
त्रिज्या →	10	:	13
लम्बाई →	10	:	7
क्षेत्रफल →	100	:	91

अंतर 9

∴ वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल में % कमी $= \frac{9}{100} \times 100\% = 9\%$

वैकल्पिक विधि

बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi rh$

प्रश्नानुसार,

क्रमागत विधि द्वारा,

क्षेत्रफल में % परिवर्तन $= \left(30-30-\frac{30\times30}{100}\right)\% = -9\%$

∴ वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल में % कमी = 9%

Ex. यदि एक गोले की त्रिज्या में 50% की वृद्धि की जाए, तो पृष्ठीय क्षेत्रफल में प्रतिशत वृद्धि ज्ञात कीजिए।

HINTS $50\% \uparrow = \frac{1}{2}+$

गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$

	पुराना	:	नया
त्रिज्या →	2	:	3
क्षेत्रफल →	4	:	9

5 इकाई

क्षेत्रफल में % वृद्धि $= \frac{5}{4} \times 100\% = 125\%$

वैकल्पिक विधि

गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$

प्रश्नानुसार, क्रमागत विधि द्वारा,

क्षेत्रफल में % परिवर्तन $= \left(50+50+\frac{50\times50}{100}\right)\% = 125\%$

∴ क्षेत्रफल में % वृद्धि = 125%

Ex. यदि एक घनाभ की लंबाई और चौड़ाई में 25% की वृद्धि की जाए, तो आयतन समान रखने के लिए ऊंचाई में कितने प्रतिशत की कमी की जानी चाहिए?

HINTS 3 चर वाले प्रश्नों में, आप 2 चर वाला सूत्र दो बार लगा सकते हैं या अनुपात विधि का प्रयोग कर सकते हैं।

घनाभ का आयतन = लंबाई × चौड़ाई × ऊँचाई

$25\% = \frac{1}{4}+ \rightarrow \frac{5}{4}$

	पुराना	:	नया
लम्बाई →	4	:	5
चौड़ाई →	4	:	5
आयतन →	1	:	1
ऊँचाई →	$\frac{1}{16}$	:	$\frac{1}{25}$
	25	:	16

अभीष्ट % $= \frac{25-16}{25} \times 100\% = 36\%$

Ex. यदि गोले की त्रिज्या 10 प्रतिशत कम कर दी जाए, तो गोले का आयतन कितने प्रतिशत कम हो जाएगा?

HINTS गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$

दिया है, $10\% = \frac{-1}{10}$

प्रश्नानुसार,

		:	
त्रिज्या →	10	:	9
आयतन →	1000	:	729

अंतर 271

आयतन में % कमी $= \frac{271}{1000} \times 100\% = 27.1\%$

वैकल्पिक विधि

प्रश्नानुसार, आयतन में % परिवर्तन

$= \left[(x+y+z)+\frac{xy+yz+zx}{100}+\frac{xyz}{10000}\right]\%$

$= \left[(-10-10-10)+\frac{100+100+100}{100}-\frac{1000}{10000}\right]\%$

$= [-30+3-0.1]\% = -27.1\%$

आयतन में % कमी = 27.1%

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

रिवर्स अप्रोच

Ex. एक कस्बे की जनसंख्या प्रतिवर्ष 4% बढ़ जाती है। यदि 1991 में इसकी जनसंख्या 210912 थी, तो 1988 में यह कितनी थी?

HINTS माना, 1988 में जनसंख्या x है।

$4\% = \frac{1}{25}$

प्रश्नानुसार,

$x \times \frac{26}{25} \times \frac{26}{25} \times \frac{26}{25} = 210912$

$\Rightarrow x = 210912 \times \frac{25}{26} \times \frac{25}{26} \times \frac{25}{26} = 187500$

Ex. जब किसी वस्तु का मूल्य 20% कम कर दिया गया, तो उसकी बिक्री में x% की वृद्धि हुई। यदि राजस्व प्राप्ति में 25% की वृद्धि हुई है, तो x का मान है:

HINTS $20\% = \frac{1}{5}$, $25\% = \frac{1}{4}$

मूल्य → 5 : 4
राजस्व → 4 : 5

बिक्री → $\frac{4}{5}$: $\frac{5}{4}$

16 : 25 (अंतर 9)

$x = \frac{9}{16} \times 100\% = 56.25\%$

Ex. एक त्रिभुज का आधार 40% बढ़ा दिया गया है। इसकी ऊंचाई कितने प्रतिशत (दो दशमलव स्थानों तक) बढ़ाई जानी चाहिए ताकि क्षेत्रफल 60% बढ़ जाए?

HINTS 100 → 140 → 160 (+20)

अभीष्ट % $= \frac{20}{140} \times 100\% = \frac{100}{7}\% = 14.28\%$

Ex. तीन वर्ष पहले, रमन का वेतन ₹45,000 था। पहले, दूसरे और तीसरे वर्ष में उसके वेतन में क्रमशः 10 प्रतिशत, 'A' प्रतिशत और 20 प्रतिशत की वृद्धि हुई। रमन का वर्तमान वेतन ₹83,160 है। A का मान क्या है?

HINTS प्रश्नानुसार,

$45000 \times \frac{110}{100} \times \frac{(100+A)}{100} \times \frac{120}{100} = 83160$

$\Rightarrow 100 + A = 140 \Rightarrow A = 40\%$

वैकल्पिक विधि

$45000 \times \frac{11}{10} \times \frac{6}{5}$: 83160

59400 : 83160

सरलतम रूप में 5 : 7 (अंतर 2)

$A = \frac{2}{5} \times 100\% = 40\%$ बढ़त

श्रेणी का सिद्धांत

जब हम किसी प्रारंभिक मान में क्रमागत परिवर्तन करके अंतिम मान प्राप्त करते हैं तो हम श्रेणी विधि का प्रयोग करते हैं; या तो प्रारंभिक या अंतिम मानों में से एक दिया जाता है और दूसरा पूछा जाता है।

Ex. एक शहर की जनसंख्या 25000 है। यदि यह हर वर्ष 10% की दर से बढ़ रही है, तो दो वर्ष बाद शहर की जनसंख्या क्या होगी?

HINTS $10\% = \frac{1}{10} \circlearrowright + = \frac{11}{10}$

2 वर्ष बाद जनसंख्या $= 25000 \times \frac{11}{10} \times \frac{11}{10} = 30250$

Ex. जब किसी संख्या में क्रमागत रूप से 25%, 40% और 20% की कमी की जाती है, तो वह 32,904 हो जाती है। वह संख्या क्या है?

HINTS $25\% = \frac{-1}{4} \circlearrowright = \frac{3}{4}$, $40\% = \frac{-2}{5} \circlearrowright = \frac{3}{5}$, $20\% = \frac{-1}{5} \circlearrowright = \frac{4}{5}$

प्रश्नानुसार,

$N \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = 32904 \Rightarrow N = \frac{32904 \times 100}{36} = 91400$

Ex. एक व्यक्ति ने अपनी सेवानिवृत्ति राशि का 40% अपनी पत्नी को दे दिया। उसने शेष राशि का 20% अपने 3 बेटों में से प्रत्येक को दे दिया। अब बची हुई राशि का 50% विविध मदों पर खर्च किया गया और शेष राशि ₹1,20,000 बैंक में जमा कर दी गई। व्यक्ति को सेवानिवृत्ति राशि के रूप में कितनी राशि मिली?

HINTS माना, व्यक्ति को सेवानिवृत्ति राशि के रूप में ₹x मिले।

प्रश्नानुसार,

$x \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{2} = 1,20,000$

$\Rightarrow x = \frac{120000 \times 50}{12} = ₹5,00,000$

@apna_channels

मूल्य-उपभोग और व्यय पर आधारित

मूल्य × खपत = व्यय

☞ यदि व्यय स्थिर है, तब:

मूल्य $\propto \frac{1}{\text{खपत}}$

☞ यदि किसी वस्तु का मूल्य a% कम हो जाता है और खरीदार को ₹'b' में 'c' किलोग्राम अधिक मिलता है, तो वस्तु का प्रति किलोग्राम नया मूल्य $= \frac{ab}{100 \times c}$

Ex. चावल की कीमत ₹45 प्रति किलोग्राम से बढ़कर ₹63 प्रति किलोग्राम हो जाती है। यदि इसकी खपत 20% कम हो जाती है, तो इस पर खर्च कितने प्रतिशत बढ़ जाता है?

HINTS $20\% = \frac{-1}{5}$

	पुराना		नया
मूल्य →	45	:	63
	5	:	7
खपत →	5	:	4
खर्च →	25	:	28

(+3)

अभीष्ट % $= \frac{3}{25} \times 100\% = 12\%$

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. किसी वस्तु का मूल्य 20% कम हो जाता है। परिणामस्वरूप, ग्राहक ₹360 में 2 किलोग्राम अधिक खरीद सकता है। ज्ञात करें:
(i) वस्तु का प्रति किलोग्राम प्रारंभिक मूल्य (₹ में)।
(ii) वस्तु का प्रति किलोग्राम घटा हुआ मूल्य (₹ में)।
(iii नई मात्रा जो ₹360 में खरीदी जा सकती है।
(iv) प्रारंभिक मात्रा जो ₹360 में खरीदी जा सकती है।

HINTS $20\% = \frac{-1}{5}$

	पुराना		नया
मूल्य →	5	:	4
खपत →	4	:	5

(+1)

दिया है, 1 इकाई → 2 किग्रा

(i) . प्रारंभिक मूल्य $= \frac{360}{4\times 2}$ = ₹45/किग्रा

(ii) घटा हुआ मूल्य $= \frac{360}{5\times 2}$ = ₹36/किग्रा

(iii) नई मात्रा = 5 × 2 = 10 किग्रा

(iv) प्रारंभिक मात्रा = 4 × 2 = 8 किग्रा

Ex. किसी वस्तु के मूल्य में 28% की वृद्धि होती है, जबकि उस पर व्यय में 12% की वृद्धि होती है। इसकी खपत में कितने प्रतिशत की वृद्धि या कमी होगी?

HINTS 100 → 128, 100 → 112 (128 → 112 : −16)

अभीष्ट % $= \frac{16}{128}\times 100\%$ = 12.5% कमी

आय-व्यय और बचत पर आधारित

आय = व्यय + बचत

Ex. एक व्यक्ति की मासिक आय ₹13,500 है और उसका मासिक व्यय ₹9,000 है। वह अपनी मासिक आय का लगभग कितना प्रतिशत मासिक बचत करता है?

HINTS

आय	:	व्यय
13500	:	9000
3	:	2

बचत = 3 – 2 = 1 इकाई

अभीष्ट % $= \frac{1}{3}\times 100\%$ = 33.33%

Ex. P और Q का वेतन मिलाकर ₹2,000 है। P अपने वेतन का 95% खर्च करता है और Q अपने वेतन का 85% खर्च करता है। यदि अब उनकी बचत समान है, तो P का वेतन क्या होगा?

HINTS माना, P का वेतन = x

Q का वेतन = $2000 - x$

प्रश्नानुसार,

$x \times \frac{5}{100} = (2000 - x) \times \frac{15}{100}$

$\Rightarrow 4x = 6000$

$\Rightarrow x = 1500$

अतः, P का वेतन = ₹1,500

वैकल्पिक विधि

P और Q की बचत समान है।

⇒ P का 5% = Q का 15%

$\Rightarrow \frac{P}{Q} = \frac{3}{1}$

(3 + 1) इकाई = 4 इकाई → ₹2000

3 इकाई → ₹1500

अतः, P का वेतन = ₹1,500

Ex. जेफरी अपने वेतन का 13% विकलांग संगठनों, 12% अनाथालयों, 14% शारीरिक रूप से विकलांग संगठनों और 16% चिकित्सा सहायता संगठनों को दान करता है। शेष राशि ₹23445 मासिक खर्च के लिए बैंक में जमा करता है। अनाथालय में दान की गई राशि ज्ञात कीजिए।

HINTS माना, जेफरी का कुल वेतन = ₹x

जेफरी के दान का कुल प्रतिशत

=13% + 12% + 14% + 16% = 55%

शेष = 45%

प्रश्नानुसार,

$x \times \frac{45}{100} = 23445 \Rightarrow x = 23445 \times \frac{100}{45}$

∴ अनाथालय में दान की गई राशि

$= x \times \frac{12}{100} = 23445 \times \frac{100}{45} \times \frac{12}{100}$

= ₹6,252

Ex. अरविंद अपनी आय का 75% खर्च करता है। उसकी आय में 20% की वृद्धि हुई और उसने अपने व्यय में 10% की वृद्धि की। उसकी बचत में कितनी वृद्धि हुई?

HINTS दिया है, $75\% = \frac{3}{4}$ (3 → व्यय, 4 → आय)

प्रश्नानुसार,

आय	=	व्यय	+	बचत
400		300		100
↓ 20%		↓ 10%		↓
80		30	+	50

बचत में % वृद्धि $= \frac{50}{100} \times 100\%$ = 50%

वैकल्पिक विधि

$75\% = \frac{3}{4}$ (3 → व्यय, 4 → आय)

आय 10%, बचत x; (20%) → आय में वृद्धि; 30, 10 (3 : 1, ×10)

x = 20% + 30% = 50%

∴ बचत में 50% की वृद्धि हुई।

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. सुरेश के व्यय और बचत का अनुपात 3 : 1 है। उसकी आय में 25% की वृद्धि होती है। यदि उसकी बचत में 20% की वृद्धि होती है, तो उसके व्यय में कितने प्रतिशत की वृद्धि होगी?

HINTS

व्यय	+	बचत	=	आय
300		100		400
↓		↓ +20%		↓ +25%
380		120		500

$\therefore$ व्यय में % वृद्धि = $\frac{80}{300} \times 100\% = 26\frac{2}{3}\%$

वैकल्पिक विधि

व्यय $x\%$ बचत 20%

(25%) → आय में वृद्धि

$\times\frac{5}{3}$ (5 : $\frac{5}{3}$) $\times\frac{5}{3}$

3 : 1

$x = 25 + \frac{5}{3} = \frac{80}{3} = 26\frac{2}{3}\%$

Ex. एक कस्बे में पुरुषों और महिलाओं की कुल संख्या 70,000 है। यदि पुरुषों की संख्या में 6% की वृद्धि होती है और महिलाओं की संख्या में 4% की वृद्धि होती है, तो कस्बे में पुरुषों और महिलाओं की कुल संख्या 73520 हो जाएगी। शुरुआत में कस्बे में पुरुषों और महिलाओं की संख्या में क्या अंतर है?

HINTS जनसंख्या में वृद्धि = 73520 − 70000 = 3520

M का 2% + M का 4% + F का 4% = 3520

M का 2% + (M + F) का 4% = 3520

⇒ M का 2% + 2800 = 3520

⇒ M का 2% = 720 ⇒M = 36000 और F = 34000

अंतर = 36000 − 34000 = 2000

वैकल्पिक विधि

कुल % वृद्धि = $\frac{73520-70000}{70000} \times 100\% = \frac{352}{70}\%$

पुरुष 6%   महिला 4%

$\frac{352}{70}\%$

72   68

18 : 17

दिया है, 35 इकाई → 70000

(18 − 17) इकाई = 1 इकाई → 2000

$\therefore$ अभीष्ट अंतर = 2000

Ex. एक गांव की जनसंख्या 9600 थी। एक वर्ष में पुरुषों की जनसंख्या में 8% और महिलाओं की जनसंख्या में 5% की वृद्धि होने पर गांव की जनसंख्या 10272 हो जाती है। वृद्धि से पहले गांव में पुरुषों की संख्या कितनी थी?

HINTS जनसंख्या में वृद्धि = 10272 − 9600 = 672

M का 5% + M का 3% + F का 5% = 672

(M + F) का 5% + M का 3% = 672

9600 का 5% + M का 3% = 672

M का 3% = 672 − 480 =192

M का 100% = 6400

वैकल्पिक विधि

कुल % वृद्धि = $\frac{10272-9600}{9600} \times 100\% = 7\%$

पुरुष 8%   महिला 5%

7%

2 : 1

$\therefore$ पुरुषों की संख्या = $\frac{9600}{3} \times 2 = 6400$

किसी परीक्षा में उत्तीर्ण/अनुत्तीर्ण पर आधारित

Ex. एक छात्र ने 32% अंक प्राप्त किए और 6 अंकों से अनुत्तीर्ण हो गया। यदि उसने 36% अंक प्राप्त किए होते तो वह 2 अंकों से उत्तीर्ण हो जाता। ज्ञात कीजिए:

(i) उत्तीर्ण अंक

(ii) परीक्षा के अधिकतम अंक

(iii) उत्तीर्ण प्रतिशत

(iv) छात्र के अंक

HINTS

%		अंक
32%		−6
36%		+2
4%	=	8 अंक
1%	=	2 अंक
100%	=	200 अंक

$\therefore$ 32% = 64 अंक

(i) उत्तीर्ण अंक = 64 + 6 = 70

(ii) अधिकतम अंक = 200

(iii) उत्तीर्ण प्रतिशत = $\frac{70}{200} \times 100\% = 35\%$

(iv) छात्र के अंक = 32% = 64

Ex. R का लक्ष्य परीक्षा में 85% अंक प्राप्त करना है। वह 450 अंक प्राप्त करता है और लक्ष्य से 35% चूक जाता है। लक्ष्य को पूरा करने के लिए उसके प्राप्त अंकों में कितने प्रतिशत की वृद्धि होनी चाहिए?

HINTS प्रश्नानुसार,

450 + 35% = 85%

50% = 450

35% = $\frac{450}{50} \times 35 = 315$

$\therefore$ % वृद्धि = $\frac{315}{450} \times 100\% = 70\%$

वैकल्पिक विधि

R के प्राप्तांक → 85% − 35% = 50%

प्रश्नानुसार,

$50\% \times \left(\frac{100+x}{100}\right) = 85\%$

$\Rightarrow 100 + x = 170$

$\Rightarrow x = 70\%$

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

चुनाव पर आधारित

Ex. दो उम्मीदवारों के बीच हुए चुनाव में, एक उम्मीदवार को 38% वोट मिले और फिर भी वह 7200 वोटों से हार गया। यदि डाले गए सभी वोट वैध थे, तो चुनाव में डाले गए कुल वोटों की संख्या थी:

HINTS माना, डाले गए कुल वोटों की संख्या = $100x$

$100x$

विजेता $62x$ | उपविजेता $38x$

अंतर

$24x = 7200$

$x = 300$

तब, $100x \rightarrow 30,000$

∴ चुनाव में डाले गए कुल वोटों की संख्या = 30,000

Ex. दो उम्मीदवारों के बीच हुए चुनाव में, पंजीकृत मतदाताओं में से 10% ने अपना वोट नहीं डाला। जीतने वाले उम्मीदवार को कुल डाले गए वोटों का 60% मिला और उसने दूसरे उम्मीदवार को 1242 वोटों से हरा दिया। पंजीकृत मतदाताओं की कुल संख्या ज्ञात कीजिए।

HINTS *(ट्री विधि द्वारा)*

कुल मत = $100x$

90%

डाले गए मत = $90x$

60%

विजेता $54x$ | उपविजेता $36x$

$18x = 1242$

$100x = 6900$

∴ पंजीकृत मतदाताओं की कुल संख्या = 6900

वैकल्पिक विधि *(श्रेणी विधि द्वारा)*

माना, पंजीकृत मतदाताओं की कुल संख्या = x

प्रश्नानुसार, $x \times \frac{90}{100} \times \frac{20}{100} = 1242$

$\Rightarrow \quad x = \frac{1242 \times 100}{18} = 6900$

∴ पंजीकृत मतदाताओं की कुल संख्या = 6900

Ex. एक चुनाव में कुल 7,50,000 मतदाताओं ने भाग लिया। एक उम्मीदवार को 3,82,500 मत मिले जो कुल वैध मतों का 60% था। चुनाव में अवैध मतों का प्रतिशत कितना था?

HINTS प्रश्नानुसार,

वैध मतों का 60% = 382500

$\Rightarrow$ वैध मत = $\frac{382500 \times 100}{60} = 637500$

कुल	:	वैध
750000	:	637500
20	:	17

सरलतम अनुपात

अंतर 3

∴ अवैध मत % = $\frac{3}{20} \times 100\% = 15\%$

Ex. दो उम्मीदवारों के बीच हुए चुनाव में, एक को कुल वैध मतों में से 60% मत मिले, 90% मत वैध थे। यदि कुल मतों की संख्या 12000 थी, तो दूसरे उम्मीदवार को मिले वैध मतों की संख्या क्या थी?

HINTS *(ट्री विधि द्वारा)*

कुल मत = 12000

वैध मत = $12000 \times \frac{90}{100} = 10800$

विजेता 60% | उपविजेता 40%

दूसरे उम्मीदवार को मिले वैध मतों की संख्या = $10800 \times \frac{40}{100} = 4320$

वैकल्पिक विधि

(श्रेणी विधि द्वारा)

अन्य उम्मीदवार को प्राप्त वैध मतों की संख्या = $12000 \times \frac{90}{100} \times \frac{40}{100}$

$= 4320$

Ex. दो उम्मीदवारों के चुनाव में, 10% मतदाताओं ने मतदान नहीं किया, डाले गए 10% मत अवैध पाए गए। जीतने वाले उम्मीदवार को वैध मतों का 54% और 1620 मतों का बहुमत मिला। मतदाता सूची में उन लोगों की संख्या ज्ञात करें जिन्होंने मतदान करने के लिए पंजीकरण कराया है।

HINTS *(ट्री विधि द्वारा)*

कुल मत = $100x$

−10% ने मतदान नहीं किया

डाले गये मत = $90x$

−10% अवैध

वैध मत = $81x$

विजेता 54% | उपविजेता 46%

8%

$81x \times \frac{8}{100} = 1620 \Rightarrow x = 250$

अतः पंजीकृत मतदाताओं की संख्या = 25000

वैकल्पिक विधि

(श्रेणी विधि द्वारा)

माना, पंजीकृत मतदाताओं की संख्या = x

प्रश्नानुसार,

$x \times \frac{9}{10} \times \frac{9}{10} \times \frac{8}{100} = 1620$

$\Rightarrow x = \frac{1620 \times 100 \times 100}{81 \times 8} = 25000$

अतः पंजीकृत मतदाताओं की संख्या = 25000

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. दो उम्मीदवारों ने एक चुनाव में भाग लिया। 20% मतदाताओं ने अपना मत नहीं डाला और 2000 मत अवैध घोषित किए गए। विजेता उम्मीदवार को वैध मतों का 60% मिला और वह 1200 मतों से निर्वाचित हुआ। मतदाता सूची में कुल मतों की संख्या ज्ञात कीजिए।

HINTS माना, मतदाता सूची में कुल मतों की संख्या = x

प्रश्नानुसार,

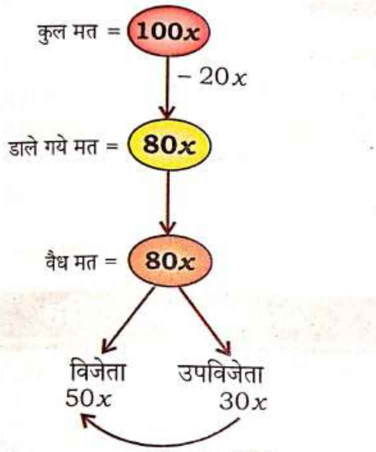
$$\left(x \times \frac{4}{5} - 2000\right) \times \frac{1}{5} = 1200$$

$$\Rightarrow \frac{4}{5}x - 2000 = 6000 \Rightarrow \frac{4}{5}x = 8000 \Rightarrow x = 10000$$

अतः मतदाता सूची में कुल मतों की संख्या = 10000

Ex. एक चुनाव में दो उम्मीदवारों ने भाग लिया। 20% जनसंख्या ने मतदान नहीं किया। 200 मत अवैध घोषित किए गए और विजेता को मतदाता सूची के पचास प्रतिशत मत मिले और वह 800 मतों से जीता। वैध मतों की गणना करें।

HINTS माना, कुल मत = $100x$



$20x = 600$

$80x = 2400 - 200$

$= 2200$

∴ वैध मत = 2200

Ex. एक चुनाव में, एक मतदाता के पास तीन उम्मीदवारों में से एक को वोट देने का विकल्प होता है। सभी उम्मीदवारों को खारिज करने के लिए 'इनमें से कोई नहीं' (NOTA) का विकल्प भी होता है। तीनों उम्मीदवारों को NOTA से 6 गुना अधिक वोट मिलते हैं। विजेता को दूसरे उपविजेता के वोटों से दोगुने वोट मिलते हैं। पहले उपविजेता को NOTA से 900 वोट अधिक मिलते हैं और वह दूसरे उपविजेता को 150 वोटों से हरा देता है। कुल कितने वोट पड़े?

HINTS माना, NOTA वोटों की कुल संख्या = x

$6x$

विजेता	:	पहला उपविजेता	:	दूसरा उप विजेता	:	NOTA
$2x + 1500$	:	$x + 900$	:	$x + 750$	:	x

प्रश्नानुसार,

$2x + 1500 + x + 900 + x + 750 = 6x$

$\Rightarrow 4x + 3150 = 6x \Rightarrow 2x = 3150 \Rightarrow x = 1575$

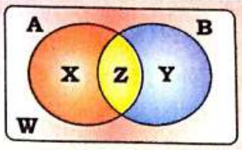
∴ मतदाताओं की कुल संख्या $= 6x + x = 7x = 7 \times 1575$

$= 11025$

- ऐसे प्रश्न जिनमें जीतने वाला प्रत्याशी मतदाता सूची के x% वोट पाकर जीतता है, ऐसे प्रश्नों में गणना से बचने हेतु ट्री विधि ही उपयुक्त विधि है।
- ऐसे प्रश्नों में जहां वैध मत उम्मीदवारों के बीच वितरित होते हैं, श्रेणी विधि सबसे उपयुक्त विधि है।

वेन आरेख

दो तत्वों की स्थिति में वेन आरेख



$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

जहाँ,

X = केवल सेट A से संबंधित तत्वों की संख्या।

Y = केवल सेट B से संबंधित तत्वों की संख्या।

Z = सेट A और B दोनों से संबंधित तत्वों की संख्या।

W = सेट A या B में से किसी से भी संबंध न रखने वाले तत्वों की संख्या।

Ex. एक कॉलेज में, 200 छात्रों को यादृच्छिक रूप से चुना जाता है। 140 को चाय पसंद है, 120 को कॉफी पसंद है और 80 को चाय और कॉफी दोनों पसंद है।

(i) कितने छात्र केवल चाय पसंद करते हैं?

(ii) कितने छात्र केवल कॉफी पसंद करते हैं?

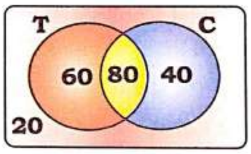
(iii) कितने छात्र न तो चाय पसंद करते हैं और न ही कॉफी?

(iv) कितने छात्र केवल चाय या कॉफी में से एक पसंद करते हैं?

(v) कितने छात्र कम से कम एक पेय पदार्थ पसंद करते हैं?

HINTS दी गई जानकारी को निम्नलिखित वेन आरेख द्वारा दर्शाया जा सकता है, जहाँ T = चाय और C = कॉफी है।

@apna_channels



(i) केवल चाय पसंद करने वाले छात्रों की संख्या = 60

(ii) केवल कॉफी पसंद करने वाले छात्रों की संख्या = 40

(iii) न तो चाय और न ही कॉफी पसंद करने वाले छात्रों की संख्या = 20

(iv) चाय या कॉफी में से केवल एक पसंद करने वाले छात्रों की संख्या

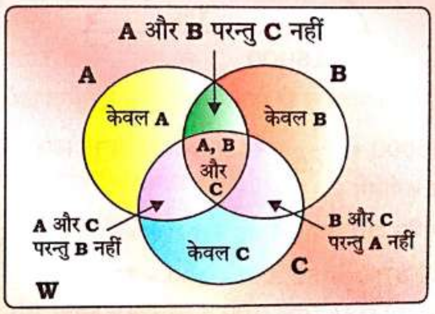
= 60 + 40 = 100

(v) चाय या कॉफी में से कम से कम एक पसंद करने वाले छात्रों की संख्या

= n (केवल चाय) + n (केवल कॉफी) + n (चाय और कॉफी दोनों)

= 60 + 40 + 80 = 180

तीन तत्वों की स्थिति में वेन आरेख



$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$

W = तत्वों की संख्या जो A, B और C में से किसी भी सेट से संबंधित नहीं है।

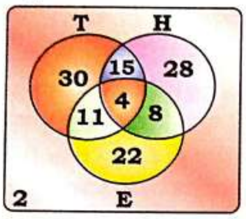
Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. एक कक्षा में 120 छात्र हैं, जिनमें से 60 टाइम्स ऑफ इंडिया, 55 हिंदू और 45 इकनोमिक टाइम्स पढ़ते हैं। यदि 19 छात्र टाइम्स ऑफ इंडिया और हिंदू पढ़ते हैं, 12 हिंदू और इकनोमिक टाइम्स पढ़ते हैं और 15 छात्र इकनोमिक टाइम्स और टाइम्स ऑफ इंडिया पढ़ते हैं। यदि 4 छात्र ऐसे हैं जो तीनों अखबार पढ़ते हैं, तो ज्ञात कीजिए:

(i) जो केवल टाइम्स ऑफ इंडिया पढ़ता हैं।
(ii) जो केवल हिंदू पढ़ते हैं।
(iii) जो केवल एक अखबार पढ़ते हैं।
(iv) जो कम से कम दो अखबार पढ़ते हैं।
(v) जो कम से कम एक अखबार पढ़ते हैं।
(vi) जो अधिकतम एक अखबार पढ़ते हैं।
(vii) जो हिंदू पढ़ते हैं लेकिन इकनोमिक टाइम्स नहीं पढ़ते।

HINTS



W = 2

(i) केवल टाइम्स ऑफ इंडिया पढ़ने वाले = 30
(ii) केवल हिंदू पढ़ने वाले = 28
(iii) केवल एक अखबार पढ़ने वाले = 30 + 28 + 22 = 80
(iv) कम से कम दो अखबार पढ़ने वाले = 15 + 11 + 8 + 4 = 38
(v) कम से कम एक अखबार पढ़ने वाले = 120 - 2 = 118
(vi) अधिकतम एक अखबार पढ़ने वाले = 30 + 28 + 22 + 2 = 82
(vii) हिंदू पढ़ने वाले लेकिन इकनोमिक टाइम्स नहीं पढ़ने वाले = 28 + 15 = 43

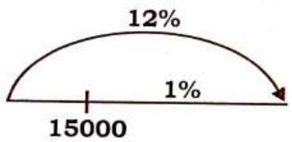
> अधिकतम 1 = 1 या 1 से कम
> अधिकतम 2 = 2 या 2 से कम
> कम से कम 1 = 1 या 1 से अधिक
> कम से कम 2 = 2 या 2 से अधिक

कमीशन पर आधारित

Ex. एक कंपनी अपने सेल्समैन को कुल बिक्री पर 12% कमीशन और ₹15,000 से अधिक की बिक्री पर 1% बोनस देती है। यदि सेल्समैन कुल बिक्री में से अपना कमीशन काटने के बाद ₹52,350 जमा करता है। ज्ञात कीजिए:

(i) कुल बिक्री। (ii) सेल्समैन का कुल कमीशन।

HINTS



(i) यदि कंपनी प्रारंभ से ही सेल्समैन को 1% अतिरिक्त कमीशन देती, तो उसे

$= 15000 \times \frac{1}{100} =$ ₹150 अधिक मिलते।

कुल कमीशन = 13%

सेल्समैन द्वारा जमा की गई कुल राशि = 100% – 13% = 87%

चूँकि, 87% → 52,350 – 150 = ₹52,200

1% → ₹600 ⇒ 100% → ₹60,000

∴ कुल बिक्री = ₹60,000

(ii) 13% → ₹600 × 13 = ₹7,800

सेल्समैन का कुल कमीशन = 7800 – 150 = ₹7,650
= 1800 + 5850 = ₹7,650

Ex. एक कंपनी कुल बिक्री पर 7% कमीशन देती है। यदि एक सेल्समैन को ₹3,000 के निश्चित वेतन पर नियुक्त किया जाता है और उसे ₹10,000 से अधिक की बिक्री पर 4% कमीशन दिया जाता है, तो सेल्समैन को ₹800 अधिक मिलते हैं। सेल्समैन द्वारा की गई कुल बिक्री ज्ञात कीजिए।

HINTS कुल बिक्री = $100x$

स्थिति - I	स्थिति - II
7%	10000 ⊕
	0% — 4%
	3000

$3000 + (100x - 10000) \times \frac{4}{100} = 3000 + 4x - 400$
$= 4x + 2600$

प्रश्नानुसार,

$100x \times \frac{7}{100} + 800 = 4x + 2600 \Rightarrow 3x = 1800 \Rightarrow x = 600$

कुल बिक्री $(100x)$ = ₹60,000

वैकल्पिक विधि

स्थिति - I	स्थिति - II	
7%	10000 + 10000	
↓	4% 4%	(दोनों प्रतिशतों को समान मानते हुए)
2600 – 800 = 1800	$10000 \times \frac{4}{100} = 400$	
	3000 – 400 = 2600	

7% – 4% = 3% = ₹1800

कुल बिक्री (100%) $= \frac{1800}{3} \times 100 =$ ₹60,000

आयकर पर आधारित

Ex. यदि आयकर की दर में 27% की वृद्धि कर दी जाए, शुद्ध आय में 3% की कमी कर दी जाए तो आयकर की दर ज्ञात कीजिए।

HINTS कर राशि में वृद्धि = शुद्ध आय की राशि में कमी

कर × $x\%$ = शुद्ध आय × $y\%$

⇒ कर × 27% = शुद्ध आय × 3% ⇒ $\frac{\text{कर}}{\text{शुद्ध आय}} = \frac{1}{9}$

वास्तविक आय = 10

आयकर की दर $= \frac{1}{10} \times 100\% = 10\%$

Ex. एक व्यक्ति की आय में ₹1,800 की वृद्धि हुई तथा देय कर 18% से घटकर 15% हो गया। दोनों स्थितियों में 29.95% आय कर मुक्त है। यदि दोनों स्थितियों में देय कर समान है तो प्रारंभिक आय ज्ञात कीजिए।

HINTS माना, 29.95% = 30% (आसान गणना के लिए)

$\text{कर}_1 = \text{कर}_2$

$\Rightarrow x \times 70\% \times 18\% = (x + 1800) \times 70\% \times 15\%$

$\Rightarrow 6x = 5x + 9000 \Rightarrow x = 9000$

प्रारंभिक आय = ₹9,000

Ex. किसी व्यक्ति की आय में ₹3000 की कमी आती है तथा आयकर की दर 15% से बढ़कर 18% हो जाती है। भुगतान किए गए कर का अनुपात 3 : 2 है। यदि 29% आय कर मुक्त है। प्रारंभिक आय ज्ञात कीजिए।

HINTS माना, प्रारंभिक आय = x

दोनों स्थितियों में कर मुक्त हिस्सा = 29%

प्रश्नानुसार, $\frac{x \times 71\% \times 15\%}{(x - 3000) \times 71\% \times 18\%} = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow \frac{x}{x - 3000} = \frac{9}{5} \Rightarrow 5x = 9x - 27000$

$\Rightarrow 4x = 27000 \Rightarrow x = 6750$

∴ प्रारंभिक आय = ₹6,750

@apna_channels
Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

विविध

Ex. रवि के पास प्रारंभ में कुछ निश्चित संख्या में चॉकलेट थीं, जबकि भानु के पास प्रारंभ में रवि की चॉकलेट की संख्या का 80% था। रवि ने अपनी चॉकलेट का 10% अपनी बहन को दे दिया, जबकि भानु को अपने चाचा से उतनी चॉकलेट का 35% और मिला, जितनी उसके पास प्रारंभ में थीं। यदि अंत में भानु के पास 54 चॉकलेट हो गईं, तो बताइए रवि ने अपनी बहन को कितनी चॉकलेट दीं?

HINTS माना, रवि के पास $100x$ चॉकलेट हैं।

रवि $100x$ —80%→ भानु $80x$

10% → $10x$ (बहन)

$80x \times \frac{135}{100} = 108x$

$108x = 54$ (दिया है)

उसकी बहन के पास चॉकलेट की संख्या $(10x) = \frac{54}{108} \times 10 = 5$

Ex. यदि 180 को $x\%$ घटाने पर वही परिणाम मिलता है जो 60 को $x\%$ से बढ़ाने पर मिलता है, तो 410 का $x\%$, 210 के $(x + 20)\%$ से (दो दशमलव स्थानों तक सही) कितना अधिक होगा?

HINTS $180\left(\frac{100 - x}{100}\right) = 60\left(\frac{100 + x}{100}\right)$

$\Rightarrow 300 - 3x = 100 + x$

$\Rightarrow 4x = 200 \Rightarrow x = 50\%$

तब, 410 का 50% = 205

और 210 का 70% = 147

$\therefore$ अभीष्ट % $= \frac{205 - 147}{147} \times 100\%$

$= \frac{58}{147} \times 100\% = 39.46\%$

वैकल्पिक विधि

(180) —($-x\%$, -60)→ [120] ←($+x\%$, $+60$)— (60)

$x = \frac{60}{120} \times 100\% = 50\%$

अब,

$410 \times 50\% : 210 \times 70\% \Rightarrow 205 : 147$

अभीष्ट % $= \frac{58}{147} \times 100\% = 39.46\%$

Ex. एक विनिर्माण इकाई में, यह देखा गया कि कच्चे माल की कीमत में 25% की वृद्धि हुई है और श्रम लागत, कच्चे माल की लागत के 30% से बढ़कर कच्चे माल की लागत के 38% हो गई है। लागत को वृद्धि से पहले के समान रखने के लिए कच्चे माल की खपत का कितना प्रतिशत कम किया जाना चाहिए?

HINTS

कच्चा माल	श्रम लागत	कुल लागत
100 —30%→	30	130
↓ +25%		अंतर 42.5
125 —38%→	47.5	172.5

कच्चे माल की खपत में कमी

$= \frac{42.5}{172.5} \times 100\% = \frac{1700}{69}\% = 24.6\%$

Ex. ताजे अंगूर में 80% पानी है जबकि सूखे अंगूर में 10% पानी है। यदि सूखे अंगूर का वजन 250 किलोग्राम है, तो ताजे होने पर इसका कुल वजन कितना था?

HINTS अंगूर में गूदे की मात्रा, ताजे और सूखे दोनों ही रूपों में एक समान होगी।

प्रश्नानुसार,

$\frac{20}{100} \times$ ताजा $= \frac{90}{100} \times$ सूखा

$\Rightarrow 2 \times$ ताजा $= 9 \times 250$

$\Rightarrow$ ताजा $= 9 \times 125$ किग्रा

$\Rightarrow$ ताजा = 1125 किग्रा

$\therefore$ ताजे अंगूरों का कुल वजन = 1125 किग्रा

वैकल्पिक विधि

	पानी	:	गूदा
ताजा →	(8	:	2)$_{\times 9}$
सूखा →	(1	:	9)$_{\times 2}$

ताजे और सूखे अंगूरों में गूदे की मात्रा समान होगी।

	पानी	:	गूदा
ताजा →	72	:	18
सूखा →	2	:	18

(2 + 18) इकाई = 20 इकाई = 250 किग्रा

90 इकाई $= 250 \times \frac{90}{20} = 1125$ किग्रा

$\therefore$ ताजे अंगूरों का कुल वजन = 1125 किग्रा

Ex. भाग देने के दौरान, प्रांजल ने गलती से भाज्य के रूप में एक संख्या ले ली जो मूल भाज्य से 10% अधिक थी। उसने गलती से भाजक के रूप में एक संख्या ले ली जो मूल भाजक से 25% अधिक थी। यदि मूल भाग समस्या का सही भागफल 25 था और शेषफल 0 था, तो प्रांजल ने जो भागफल प्राप्त किया, वह क्या था, यह मानते हुए कि उसकी गणना में कोई त्रुटि नहीं थी?

HINTS $10\% = \frac{1}{10}$, $25\% = \frac{1}{4}$

हम जानते हैं,

भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल

	सही	:	गलत
भाज्य →	$10x$	:	$11x$
भाजक →	$4y$	:	$5y$

प्रश्नानुसार,

$10x = 4y \times 25 + 0 \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{10}{1}$

गलत भाज्य, $11x = 110$

गलत भाजक, $5y = 5$

$\therefore$ प्रांजल द्वारा प्राप्त भागफल = 110 ÷ 5 = 22

वैकल्पिक विधि

माना, मूल संख्या = 100

सही: $4)100(25$, शेष 0 → गलत: $5)110(22$, शेष 0

अतः, अभीष्ट भागफल = 22

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. एक व्यक्ति का मासिक वेतन ₹1,60,000 था। वह तीन मदों पर खर्च करता था - व्यक्तिगत और पारिवारिक व्यय (P), कर (T) और शिक्षा ऋण (E)। शेष उसकी बचत थी। P, आय का 50% था, E, P का 20% था, और T, E का 15% था। जब उसका वेतन 30% बढ़ा, तो उसने P का प्रतिशत स्तर बनाए रखा, लेकिन E, P का 30% हो गया और T, E का 20% हो गया। दोनों बचतों का योग (₹ में) है:

HINTS

कुल	P	E	T	बचत
100	50	10	1.5	100 − 61.5 = 38.5
130	65	19.5	3.9	130 − 88.4 = 41.6

(30% वृद्धि)

38.5 + 41.6 = 80.1 इकाई

$\therefore$ कुल बचत $= \frac{160000 \times 80.1}{100} =$ ₹1,28,160

वैकल्पिक विधि

कुल	P	E	T	बचत
100	50	10	1.5	100 − 61.5 = 38.5
100	50	15	3	100 − 68 = 32

32 → +30% → 41.6

कुल बचत = 38.5 + 41.6 = 80.1 इकाई

100 इकाई → ₹1,60,000

80.1 इकाई → ₹1,28,160

$\therefore$ दोनों बचतों का योग = ₹1,28,160

Ex. महीने के पहले दिन की शुरुआत में राजेश के पास 500 अंडे थे। वह दिन के अंत तक 20% अंडे बेच देता है और अगले दिन की शुरुआत में b% अंडे मिलाता है और अगले दिन के अंत में 20% अंडे बेच देता है। यह प्रक्रिया महीने के तीसरे दिन के अंत तक जारी रही जब उसके पास 1024 अंडे बचे। 'b' का मान किसके बराबर है?

(a) 20 (b) 10 (c) 500 (d) 100

HINTS *(अनुपात विधि द्वारा)*

$20\% = \frac{-1}{5}$

यहाँ 20% अंडों की बिक्री 3 बार हुई है तथा b% की वृद्धि 2 बार हुई है

$$\begin{array}{ccc} (5)^3 & : & (4)^3 \\ (x)^2 & : & (y)^2 \\ \hline 500 & : & 1024 \end{array} \Rightarrow \times 1 \begin{array}{ccc} 125 & : & 64 \\ (1)^2 & : & (2)^2 \\ \hline 125 & : & 256 \end{array} \times 4$$

= 125 : 256

$x : y = 1 : 2$

$\therefore b = \frac{2-1}{1} \times 100\% = 100\%$

वैकल्पिक विधि *(विकल्प द्वारा)*

विकल्पों से, माना b = 100%

1^{st} day → 500 —(−20%)→ 400

2^{nd} day → 800 —(−20%)→ 640 (400 → +100% → 800)

3^{rd} day → 1280 —(−20%)→ 1024 (640 → +100% → 1280)

वैकल्पिक विधि *(तर्क द्वारा)*

चूंकि अंडों की संख्या तीन बार 20% कम की गई और दो बार b% बढ़ाई गई, इसलिए अंडों की कुल संख्या 500 से बढ़कर 1024 हो गई। इसलिए, 'b' का मान 20% से अधिक होना चाहिए, जिससे विकल्प (a) और (b) समाप्त हो जाते हैं। 'b' का मान 500 नहीं हो सकता क्योंकि अगर ऐसा होता, तो एक बार की वृद्धि से कुल मान, मूल मान का छः गुना हो जाता, जो संभव नहीं है। इसलिए, विकल्प (d) सही है।

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

अध्याय 13

लाभ और हानि

कुछ सामान्य तथ्य

- **क्रय मूल्य (CP):** वह मूल्य जिस पर हम चीजें खरीदते हैं।
- **विक्रय मूल्य (SP) :** वह मूल्य जिस पर हम चीजें बेचते हैं।
- यदि SP > CP तब:

लाभ (Profit) = विक्रय मूल्य (SP) – क्रय मूल्य (CP)

- यदि CP > SP तब:

हानि (Loss) = क्रय मूल्य (CP) - विक्रय मूल्य (SP)

- $\text{लाभ \%} = \left(\frac{\text{लाभ}}{\text{क्रय मूल्य}}\right)\times 100\%$

- $\text{हानि \%} = \left(\frac{\text{हानि}}{\text{क्रय मूल्य}}\right)\times 100\%$

- जब लाभ % दिया गया है तो विक्रय मूल्य:

$$\text{विक्रय मूल्य} = \text{क्रय मूल्य} \times \left(\frac{100 + \text{लाभ \%}}{100}\right)$$

- जब हानि % दी गई है तो विक्रय मूल्य:

$$\text{विक्रय मूल्य} = \text{क्रय मूल्य} \times \left(\frac{100 - \text{हानि \%}}{100}\right)$$

Ex. एक उत्पाद को ₹20 में खरीदा जाता है और ₹50 में बेचा जाता है। लाभ प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

HINTS लाभ = 50 – 20 = ₹30

$\therefore \text{लाभ \%} = \frac{30}{20}\times 100\% = 150\%$

Ex. एक मोबाइल फोन का विक्रय मूल्य ₹59,620 है और इसे 8.4% लाभ पर बेचा गया। मोबाइल फोन का क्रय मूल्य (₹ में) ज्ञात कीजिए।

HINTS SP = ₹59,620, P = 8.4%, CP = ?

CP	SP
100	108.4
↓ ×550	↓ ×550
₹55,000	₹59,620

∴ मोबाइल फोन का क्रय मूल्य = ₹55,000

Ex. यदि एक वस्तु को ₹355 में बेचा जाता है, तो 29% की हानि होती है। 31% लाभ प्राप्त करने के लिए इसे किस मूल्य (₹ में) पर बेचा जाना चाहिए?

HINTS माना, वस्तु का क्रय मूल्य = 100 इकाई

SP_1	CP	SP_2
71	100	131
↓ ×5		↓ ×5
₹355		₹655

∴ वस्तु को ₹655 में बेचा जाना चाहिए।

Ex. एक वस्तु को 15% लाभ और 17% हानि पर बेचने पर उसके विक्रय मूल्य में अंतर ₹96 है। यदि इसे 10% लाभ पर बेचा जाए, तो विक्रय मूल्य क्या है?

HINTS माना, वस्तु का क्रय मूल्य = 100 इकाई

SP_1	CP	SP_2
83	100	115

अंतर 32 इकाई

प्रश्नानुसार,

32 इकाई → ₹96

110 इकाई → $\frac{96}{32}\times 110 =$ ₹330

∴ विक्रय मूल्य = ₹330

विक्रय मूल्य और क्रय मूल्य के अंतर पर आधारित

Ex. एक वस्तु के क्रय मूल्य और विक्रय मूल्य के बीच का अंतर ₹1,800 है। यदि 20% का लाभ होता है, तो वस्तु का क्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

HINTS $20\% = \frac{1}{5}$)+ ⟶ 6→SP, 5→CP

∵ (6 – 5) = 1 इकाई → ₹1,800

5 इकाई → ₹9,000

∴ वस्तु का क्रय मूल्य = ₹9,000

@apna_channels

X वस्तुओं का क्रय मूल्य = Y वस्तुओं का विक्रय मूल्य

यदि 'x' वस्तुओं का क्रय मूल्य 'y' वस्तुओं के विक्रय मूल्य के बराबर है, तो विक्रय मूल्य = x, क्रय मूल्य = y

$$\text{हानि या लाभ \%} = \frac{x-y}{y}\times 100\%$$

Ex. 15 वस्तुओं का क्रय मूल्य 10 वस्तुओं के विक्रय मूल्य के बराबर है। लाभ या हानि प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

HINTS $x = 15, y = 10$

$\therefore \text{लाभ \%} = \frac{x-y}{y}\times 100\,\% = \frac{15-10}{10}\times 100\% = 50\%$

वैकल्पिक विधि

$CP \times 15 = SP \times 10 \Rightarrow \frac{CP}{SP} = \frac{2}{3}$)+1

$\therefore \text{लाभ \%} = \frac{1}{2}\times 100\% = 50\%$

Ex. 44 वस्तुओं का क्रय मूल्य 'x' वस्तुओं के विक्रय मूल्य के बराबर है। यदि लाभ 10% है, तो 'x' का मान क्या है?

HINTS $10\% = \frac{1}{10}$)+ ⟶ 11→SP, 10→CP

प्रश्नानुसार,

44CP = xSP

$\Rightarrow \frac{SP}{CP} = \frac{44}{x} \Rightarrow \frac{11}{10} = \frac{44}{x} \Rightarrow \boxed{x = 40}$

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. यदि किसी वस्तु के क्रय मूल्य का 70% उसके विक्रय मूल्य के 40% के बराबर है, तो लाभ प्रतिशत क्या है?

HINTS प्रश्नानुसार,

$70CP = 40SP \Rightarrow \frac{CP}{SP} = \frac{4}{7}$

$\therefore$ लाभ % = $\frac{7-4}{4} \times 100\% = \frac{300}{4}\% = 75\%$

Ex. 36 वस्तुओं का क्रय मूल्य N वस्तुओं के विक्रय मूल्य के समान है। यदि लाभ 20% है, तो N का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS $20\% = \frac{1}{5}$)+ $\longrightarrow$ $6 \to SP$, $5 \to CP$

प्रश्नानुसार,

$36 \times CP = N \times SP$

$\Rightarrow \frac{SP}{CP} = \frac{36}{N} \Rightarrow \frac{6}{5} = \frac{36}{N} \Rightarrow \boxed{N = 30}$

लाभ/हानि = कुछ वस्तुओं का क्रय/विक्रय मूल्य

Ex. दो वस्तुओं को ₹800 में बेचकर एक व्यक्ति को 5 वस्तुओं के क्रय मूल्य के बराबर लाभ होता है। लाभ प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

HINTS प्रश्नानुसार,

$2SP - 2CP = 5CP \Rightarrow 2SP = 7CP \Rightarrow \frac{SP}{CP} = \frac{7}{2}$

$\therefore$ लाभ % = $\frac{5}{2} \times 100\% = 250\%$

Ex. 42 मीटर कपड़ा बेचकर विजय को 7 मीटर कपड़े के विक्रय मूल्य के बराबर लाभ प्राप्त होता है। लाभ प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

HINTS प्रश्नानुसार,

$42SP - 42CP = 7SP \Rightarrow 35SP = 42CP$

$\Rightarrow \frac{SP}{CP} = \frac{6}{5}$)+1

$\therefore$ लाभ % = $\frac{1}{5} \times 100\% = 20\%$

Ex. एक मेडिकल सौदे में, क्रय मूल्य का 17 गुना, क्रय मूल्य और विक्रय मूल्य के योग के 8 गुना के बराबर है। लाभ या हानि प्रतिशत क्या है?

HINTS प्रश्नानुसार,

$17CP = 8(CP + SP) \Rightarrow 17CP - 8CP = 8SP$

$\Rightarrow 9CP = 8SP \Rightarrow \frac{CP}{SP} = \frac{8}{9}$

$\therefore$ लाभ % = $\frac{1}{8} \times 100\% = 12.5\%$

विक्रय मूल्य पर लाभ/हानि

Ex. यदि कोई व्यक्ति विक्रय मूल्य पर लाभ % की गणना करता है और उसके अनुसार उसका लाभ 20% है, तो उसका वास्तविक लाभ % ज्ञात कीजिए।

HINTS 20% = 1→ लाभ, 5→ विक्रय मूल्य $\longrightarrow$ 4→ क्रय मूल्य, 5→ विक्रय मूल्य

$\therefore$ वास्तविक लाभ % = $\frac{1}{4} \times 100\% = 25\%$

Ex. यदि हानि विक्रय मूल्य की $\frac{1}{8}$ है, तो वास्तविक हानि प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

HINTS 1→ हानि, 8→ विक्रय मूल्य $\longrightarrow$ 9→ क्रय मूल्य, 8→ विक्रय मूल्य

$\therefore$ वास्तविक हानि % = $\frac{1}{9} \times 100\% = 11\frac{1}{9}\%$

Ex. अदिति ने अपना स्कूटर ₹40,620 में बेचा, जिससे उसे विक्रय मूल्य का $\frac{1}{5}$ वाँ हिस्सा लाभ के रूप में प्राप्त हुआ। लाभ प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

HINTS 1→ लाभ, 5→ विक्रय मूल्य $\longrightarrow$ 4→ क्रय मूल्य, 5→ विक्रय मूल्य

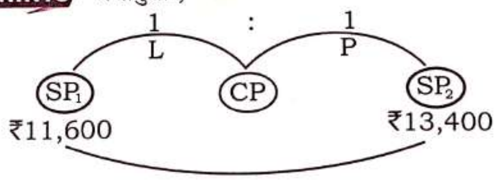
$\therefore$ लाभ % = $\frac{1}{4} \times 100\% = 25\%$

बटरफ्लाई कॉन्सेप्ट

क्रय मूल्य = विक्रय मूल्य$_1$ + हानि = विक्रय मूल्य$_2$ − लाभ

Ex. किसी वस्तु को ₹13,400 में बेचने पर प्राप्त लाभ उसी वस्तु को ₹11,600 में बेचने पर हुई हानि के बराबर है। यदि इसे ₹14,750 में बेचा जाए तो लाभ (₹ में) क्या होगा?

HINTS प्रश्नानुसार,



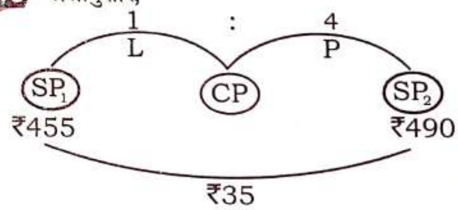
$CP = \frac{11600 + 13400}{2} = ₹12,500$

SP = ₹14,750 (दिया है)

$\therefore$ अभीष्ट लाभ = 14,750 − 12,500 = ₹2,250

Ex. एक दुकानदार ने एक वस्तु को हानि पर ₹455 में बेचा। यदि वह इसे ₹490 में बेचता, तो उसे हानि के चार गुना के बराबर राशि का लाभ होता। 25% लाभ प्राप्त करने के लिए उसे वस्तु को किस मूल्य (₹ में) पर बेचना चाहिए?

HINTS प्रश्नानुसार,



$\because$ (4 + 1) = 5 इकाई → ₹35

1 इकाई → ₹7

CP = 455 + (1 × 7) = ₹462

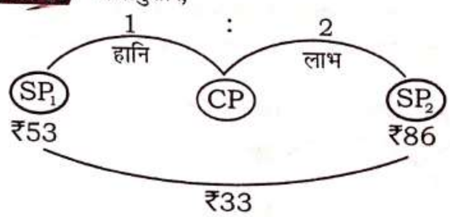
या

CP = 490 − (4 × 7) = ₹462

$\therefore$ अभीष्ट विक्रय मूल्य = $462 \times \frac{5}{4} = ₹577.5$

Ex. एक वस्तु को ₹86 में बेचने पर प्राप्त लाभ उसी वस्तु को ₹53 में बेचने पर प्राप्त हानि का दोगुना है। क्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

HINTS प्रश्नानुसार,



$\because$ (2 + 1) = 3 इकाई → ₹33

1 इकाई → ₹11

$\therefore$ क्रय मूल्य = 53 + (1 × 11) = ₹64

@apna_channels
Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. एक आदमी एक मोबाइल फोन को ₹680 में बेचता है और उसे कुछ हानि होती है। यदि उसने इसे ₹1,070 में बेचा होता, तो उसका लाभपहले की हानि से दोगुना होता। मोबाइल फोन का क्रय मूल्य (₹ में) ज्ञात कीजिए।

HINTS प्रश्नानुसार,

1 : 2
हानि लाभ
SP_1 — CP — SP_2
₹680 ₹1,070
₹390

∵ 3 इकाई → ₹390
1 इकाई → ₹130

क्रय मूल्य = विक्रय मूल्य + हानि = 680 + 130 = ₹810

∴ मोबाइल फोन का क्रय मूल्य = ₹810

वस्तुओं की संख्या पर आधारित

Ex. एक व्यक्ति ने कुछ वस्तुएँ ₹10 में 11 की दर से खरीदीं और उन्हें ₹11 में 10 की दर से बेच दिया। लाभ/हानि % ज्ञात कीजिए।

HINTS

	मूल्य	वस्तु		मूल्य	वस्तु
खरीद →	$10_{\times 10}$	$11_{\times 10}$	=	100	110
बिक्री →	$11_{\times 11}$	$10_{\times 11}$		121	110

$\therefore$ लाभ % = $\frac{21}{100} \times 100\% = 21\%$

वैकल्पिक विधि

	खरीद	बिक्री
मूल्य →	10	11
वस्तु →	11	10
	100	121

+21

$\therefore$ लाभ % = 21%

Ex. एक व्यापारी ने कुछ संतरे ₹11 में 7 की दर से खरीदे। उसने सारे संतरे ₹3 में 2 के हिसाब से बेच दिए। इस लेन-देन में उसे ₹30 की हानि हुई। ज्ञात कीजिये कि उसने कितने संतरे बेचे।

HINTS

	मूल्य	संतरे		मूल्य	संतरे
खरीद →	$11_{\times 2}$	$7_{\times 2}$	=	22	14
				↓ −1	
बिक्री →	$3_{\times 7}$	$2_{\times 7}$		21	14

∵ ₹1 हानि → 14 संतरे

₹30 हानि → 14 × 30 = 420 संतरे

∴ उसके द्वारा बेचे गए संतरों की संख्या = 420

Ex. एक दुकानदार ने 60 पेंसिलें ₹5 में 4 की दर से खरीदीं और अन्य 60 पेंसिलें ₹3 में 2 की दर से खरीदीं। उसने सभी पेंसिलो को मिलाकर ₹4 में 3 की दर से बेच दिया। उसका लाभ या हानि प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

HINTS

	मूल्य	पेंसिल
स्थिति-I →	5	4
स्थिति-II →	$3_{\times 2}$	$2_{\times 2}$
कुल →	11	8

⇒

	मूल्य	पेंसिल
खरीद →	$11_{\times 3}$	$8_{\times 3}$
बिक्री →	$4_{\times 8}$	$3_{\times 8}$
	33	24
	↓ −1	
	32	24

$\therefore$ हानि % = $\frac{1}{33} \times 100\% = 3\frac{1}{33}\%$

वैकल्पिक विधि

CP	:	SP
$\frac{5}{4}\times 60+\frac{3}{2}\times 60$	:	$\frac{4}{3}\times 120$
75 + 90	:	160
165	:	160

−5

$\therefore$ हानि % = $\frac{5}{165}\times 100\% = 3\frac{1}{33}\%$

इस प्रकार के प्रश्नों में, हम खरीदते और बेचते समय वस्तुओं की संख्या बराबर कर देते हैं।

औसत की अवधारणा (जब CP समान हो)

Ex. एक व्यक्ति ने तीन वस्तुएँ प्रत्येक ₹6,000 में खरीदीं। उसने उन्हें क्रमशः 15% लाभ, 12% लाभ तथा 15% हानि पर बेचा। उसके द्वारा अर्जित कुल लाभ/हानि प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

HINTS

वस्तु →	1st	2nd	3rd
लाभ →	15%	12%	−15%

$\therefore$ लाभ % = $\frac{15+12-15}{3} = 4\%$

Ex. एक फल विक्रेता ने कुछ केले खरीदे। उनमें से पाँचवाँ हिस्सा सड़ गया और फेंक दिया गया। उसके पास जो केले बचे, उनमें से दो-पाँचवाँ भाग उसने 15% लाभ पर बेचा और शेष को 10% लाभ पर बेचा। उसका कुल लाभ या हानि प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

HINTS माना, कुल केलों की संख्या 50 इकाई है।

50 इकाई
$\times\frac{1}{5}$ → सड़ा हुआ 10; $\times\frac{4}{5}$ → 40 इकाई
40 इकाई: $\times\frac{2}{5}$ → 16; बचा हुआ 24

	सड़ा हुआ		बचा हुआ
	10	16	24
लाभ/हानि % =	−100%	+15%	+10%
कुल	−1000%	+240%	+240% = − 520%

$\therefore$ हानि % = $\frac{520}{50}\% = 10.4\%$

Ex. एक सब्जी विक्रेता ने 100 किलोग्राम आलू ₹19 प्रति किलोग्राम की दर से खरीदे और ₹100 ढुलाई में खर्च किए। उसने 60 किलोग्राम आलू 50% लाभ पर बेचे और शेष में से आधे को 40% लाभ पर बेचा। फिर उसने बचे हुए आधे को 25% लाभ पर बेचा। अब वह शेष बचे हुए आलुओं पर कितने प्रतिशत लाभ कमाए ताकि उसे कुल मिलाकर 42% का लाभ हो?

HINTS

	60	20	10	10	= 100
	↓ 50%	↓ 40%	↓ 25%	↓ x%	↓ 42%
लाभ =	30	8	2.5	10x%	= 42

$\Rightarrow 10x\% = 42 - 40.5$

$\Rightarrow 10x\% = 1.5 \Rightarrow \frac{10x}{100} = 1.5 \Rightarrow x = 15$

$\therefore$ अभीष्ट लाभ % = 15%

@apna_channels
Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. एक दुकानदार ने 1600 आम ₹120 प्रति दर्जन की दर से खरीदे। इनमें से उसने 900 आम ₹15 प्रति आम की दर से बेचे और शेष आम ₹14 प्रति आम की दर से बेचे। उसका लाभ प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

HINTS कुल क्रय मूल्य = $1600 \times \frac{120}{12}$ = ₹16,000

कुल विक्रय मूल्य = (900 × 15) + (14 × 700) = ₹23,300

लाभ = 23,300 – 16,000 = ₹7,300

$\therefore$ लाभ % = $\frac{7300}{16000} \times 100\%$ = 45.625%

वैकल्पिक विधि

1 आम का क्रय मूल्य = $\frac{120}{12}$ = ₹10

शुद्ध लाभ = 900 × (15 – 10) + 700 × (14 – 10)

= 4500 + 2800 = ₹7,300

$\therefore$ लाभ % = $\frac{7300}{16000} \times 100\%$ = 45.625%

जब विक्रय मूल्य समान हो

- यदि दो वस्तुएँ समान मूल्य पर बेची गई। पहली वस्तु को x% लाभ पर और दूसरी को y% हानि पर बेचा गया, तो कुल लाभ या हानि प्रतिशत इस प्रकार है:

$$\text{लाभ/हानि\%} = \frac{100(x+y)+2xy}{200+x+y}\%$$

- यदि दो वस्तुएँ समान मूल्य पर बेची गई। पहली वस्तु को x% लाभ पर और दूसरी को x% हानि पर बेचा गया, तो कुल हानि प्रतिशत इस प्रकार है:

$$\text{हानि\%} = \frac{x^2}{100}\%$$

Ex. दो घोड़े ₹1,599 प्रति घोड़ा की दर से बेचे गए। पहला घोड़ा 25% लाभ पर और दूसरा 20% हानि पर बेचा गया। कुल लाभ या हानि प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

HINTS लाभ/हानि % = $\frac{100(x+y)+2xy}{200+x+y}\%$

$= \frac{100(25-20)+2\times25\times(-20)}{200+25-20}\% = \frac{500-1000}{205}\%$

$= \frac{-500}{205}\% = \frac{-100}{41}\% = -2.43\%$

$\therefore$ कुल हानि % = 2.43%

वैकल्पिक विधि

25% = $\frac{+1}{4}$, 20% = $\frac{-1}{5}$

	CP	SP		CP		SP
I →	$4_{\times4}$	: $5_{\times4}$	=	16	:	20
II →	$5_{\times5}$	: $4_{\times5}$		25	:	20
				41		40

(41 → 40 : –1)

$\therefore$ हानि % = $\frac{1}{41} \times 100\%$ = 2.43%

दोनों स्थितियों में विक्रय मूल्य (SP) को समान बनाने के लिए, 5 और 4 का लघुत्तम समापवर्त्य (LCM) लें।

Ex. दो घोड़े ₹1,920 प्रति घोड़ा की दर से बेचे गए। पहला घोड़ा 20% हानि पर और दूसरा 20% लाभ पर बेचा गया। कुल लाभ या हानि प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

HINTS हानि % = 20%, लाभ % = 20%

$\therefore$ हानि % = $\frac{x^2}{100}\% = \frac{20^2}{100}\%$ = 4%

Ex. एक व्यक्ति दो घड़ियाँ, 'A' और 'B' कुल ₹800 में खरीदता है। वह दोनों घड़ियों को एक ही मूल्य पर बेचता है। घड़ी 'A' पर उसे 18% लाभ होता है और घड़ी 'B' पर 22% हानि होती है। घड़ियों का क्रय मूल्य ज्ञात कीजिए (दो दशमलव स्थान तक)।

HINTS कुल लाभ/हानि % = $\frac{100(x+y)+2xy}{200+x+y}\%$

$= \frac{100(18-22)+2\times18\times(-22)}{200+18-22}\%$

$= \frac{-400-792}{196}\% = -\frac{298}{49}\% = -6.08\%$

अब, A 18%, B –22%

(मिश्रण: –6.08% ; A → 15.92%, B → 24.08%)

प्रश्नानुसार,

40% → ₹800

1% → ₹20

$\therefore$ क्रय मूल्य$_A$ = 15.92 × 20 = ₹318.4

क्रय मूल्य$_B$ = 24.08 × 20 = ₹481.6

वैकल्पिक विधि

18% = $\frac{+9}{50}$, 22% = $\frac{-11}{50}$

	CP	SP	CP		SP
A →	$50_{\times39}$	$59_{\times39}$	1950	:	2301
B →	$50_{\times59}$	$39_{\times59}$	2950	:	2301

कुल क्रय मूल्य = (1950 + 2950) = 4900 इकाई

$\because$ 4900 इकाई → ₹800

1950 इकाई → ₹318.37

2950 इकाई → ₹481.63

$\therefore$ क्रय मूल्य$_A$ = ₹318.37, क्रय मूल्य$_B$ = ₹481.63

पहली वस्तु का क्रय मूल्य = दूसरी वस्तु का विक्रय मूल्य

Ex. एक दुकानदार ने दो वस्तुएँ बेचीं। पहली वस्तु का विक्रय मूल्य दूसरी वस्तु के क्रय मूल्य के बराबर है। उसने पहली वस्तु को 20% लाभ पर और दूसरी वस्तु को 10% हानि पर बेचा। उसका कुल लाभ या हानि प्रतिशत कितना है?

HINTS माना, दो वस्तुएँ 'A' और 'B' हैं।

माना, SP_A = 100 इकाई

$\therefore CP_B$ = 100 इकाई

$CP_A = 100 \times \frac{100}{120} = \frac{1000}{12}$ इकाई

$SP_B = 100 \times \frac{90}{100}$ = 90 इकाई

$\therefore$ लाभ % = $\frac{190-\left(\frac{1000}{12}+100\right)}{\left(\frac{1000}{12}+100\right)} \times 100\%$

$= \frac{\frac{80}{12}}{\frac{2200}{12}} \times 100\% = 3\frac{7}{11}\%$

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

वैकल्पिक विधि

$20\% = \frac{+1}{5}$, $10\% = \frac{-1}{10}$

माना, दो वस्तुएँ 'A' और 'B' हैं।

$SP_A = CP_B$

	CP	SP	CP	SP
A →	(5	$6)_{\times 5}$	25	30
B →	(10	$9)_{\times 3}$	30	27
			55	57

+2

$\therefore$ लाभ % = $\frac{2}{55} \times 100\% = 3\frac{7}{11}\%$

बेईमान दुकानदार

	मूल्य	:	पेंसिल
स्थिति-I →	5	:	4
स्थिति-II →	$3_{\times 2}$	:	$2_{\times 2}$
कुल →	11	:	8

$\Rightarrow$

	मूल्य	:	पेंसिल
खरीद →	$11_{\times 3}$	:	$8_{\times 3}$
बिक्री →	$4_{\times 8}$	:	$3_{\times 8}$
	33		24

–1

एक बेईमान दुकानदार अपने सामान को क्रय मूल्य पर बेचता है, लेकिन गलत वजन का उपयोग करता है, तो उसका लाभः

$$\text{लाभ\%} = \frac{\text{वास्तविक वजन} - \text{गलत वजन}}{\text{गलत वजन}} \times 100\%$$

Ex. एक बेईमान दुकानदार अपने सामान को क्रय मूल्य पर बेचने का वादा करता है, लेकिन वह 30% कम तौल का उपयोग करता है। उसका लाभ प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

HINTS माना, वास्तविक वजन = 100 इकाई, गलत वजन = 70 इकाई

70 : 100

+30

$\therefore$ लाभ % = $\frac{30}{70} \times 100\% = \frac{300}{7}\% = 42\frac{6}{7}\%$

वैकल्पिक विधि

$30\% = \frac{3}{10} \longrightarrow \frac{7 \to CP}{10 \to SP}$

7 : 10

+3

$\therefore$ लाभ % $= \frac{3}{7} \times 100\% = \frac{300}{7}\% = 42\frac{6}{7}\%$

Ex. एक बेईमान दुकानदार अपने सामान को 44% हानि पर बेचने का वादा करता है, लेकिन वह 1 किलोग्राम के बजाय 910 ग्राम तौलता है। उसकी वास्तविक हानि प्रतिशत (लगभग) ज्ञात कीजिए।

HINTS

CP	:	SP
100	:	56
910	:	1000
91	:	56

–35

$\therefore$ हानि % = $\frac{35}{91} \times 100\% = 38.4\%$

Ex. एक दुकानदार अपने माल पर क्रय मूल्य से 35% अधिक मूल्य अंकित करता है तथा ग्राहक को 23% छूट देता है। खरीदते समय वह 1 किग्रा के स्थान पर 1120 ग्राम वजन का उपयोग करता है तथा बेचते समय वह 1 किग्रा के स्थान पर 880 ग्राम वजन देता है। उसका लाभ % ज्ञात कीजिए।

HINTS

CP	:	SP
100	:	135
100	:	77
1000	:	1120
880	:	1000
1000		1323

+323

$\therefore$ लाभ % = $\frac{323}{1000} \times 100\% = 32.3\%$

चारमीनार कॉन्सेप्ट

इस प्रकार के प्रश्नों में दो स्थितियाँ दी जाती हैं। पहली स्थिति में, एक वस्तु को कुछ लाभ/हानि % पर बेचा जाता है और दूसरी स्थिति में यह दिया जाता है कि यदि वस्तु को वास्तविक क्रय मूल्य से एक निश्चित प्रतिशत कम या अधिक पर खरीदा जाता है और वास्तविक विक्रय मूल्य से एक निश्चित राशि अधिक या कम पर बेचा जाता है, तो खरीदार को एक निश्चित लाभ/हानि % प्राप्त होता है। वस्तु का क्रय मूल्य ज्ञात करना होता है।

Ex. एक आदमी ने एक वस्तु खरीदी और उसे 10% लाभ पर बेचा। यदि उसने वस्तु को 20% कम पर खरीदा होता और उसे ₹1,000 अधिक में बेचा होता, तो उसे 40% का लाभ होता। वस्तु का क्रय मूल्य (₹ में) ज्ञात कीजिए।

HINTS माना, वस्तु का क्रय मूल्य 100 इकाई है।

CP_1 100 —(+10%)→ SP_1 110

CP_1 —(–20%)→ CP_2 ; SP_1 —(+2 इकाई)→ SP_2

CP_2 80 —(+40%)→ SP_2 112

$\because$ 2 इकाई → ₹1,000

100 इकाई → ₹50,000

$\therefore$ वस्तु का क्रय मूल्य = ₹50,000

Ex. एक व्यक्ति ने एक मकान 15% लाभ पर बेचा। यदि उसने इसे 25% कम कीमत पर खरीदा होता और ₹60 कम में बेचा होता, तो उसे 32% का लाभ होता। मकान का क्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

HINTS माना, मकान का क्रय मूल्य 100 इकाई है।

CP_1 100 —(+15%)→ SP_1 115

CP_1 —(–25%)→ CP_2 ; SP_1 —(–16 इकाई)→ SP_2

CP_2 75 —(+32%)→ SP_2 99

$\because$ 16 इकाई → ₹60

100 इकाई → ₹375

$\therefore$ मकान का क्रय मूल्य = ₹375

@apna_channels
Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

एलिगेशन पर आधारित

Ex. एक व्यक्ति 5 टेबल और 9 कुर्सियाँ ₹15,400 में खरीदता है। वह टेबल को 10% लाभ पर और कुर्सियों को 20% लाभ पर बेचता है। यदि सभी टेबल और कुर्सियों को बेचने पर उसका कुल लाभ ₹2,080 है, तो 3 कुर्सियों का क्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

HINTS कुल लाभ % = $\frac{2080}{15400}\times 100\% = \frac{1040}{77}\%$

टेबल		कुर्सी
$10\%_{\times 77} = 770$		$20\%_{\times 77} = 1540$
	$\frac{1040}{77}\%\times 77$	
500	:	270
मूल्य/मात्रा → 50	:	27

∵ 77 इकाई → ₹15,400

1 इकाई → ₹200

27 इकाई → ₹5,400

9 कुर्सियों का क्रय मूल्य = ₹5,400

∴ 3 कुर्सियों का क्रय मूल्य = ₹1,800

वैकल्पिक विधि

5 टेबल — 9 कुर्सी

लाभ % → 10% — 10% + 10%

लाभ = 15,400 × 10%
= ₹1,540

शेष लाभ = 2,080 − 1,540 = ₹540

∵ 10% → ₹540

100% → ₹5,400

9 कुर्सियों का क्रय मूल्य = ₹5,400

∴ 3 कुर्सियों का क्रय मूल्य = ₹1,800

$\frac{P_1}{Q_1\times(100\pm P_1/L_1)\%}=\frac{P_2}{Q_2\times(100\pm P_2/L_2)\%}$

Ex. 3 दर्जन संतरे ₹405 में बेचकर एक व्यापारी को 25% की हानि होती है। यदि उसे सौदे में 20% का लाभ कमाना है, तो उसे ₹288 में कितने संतरे बेचने चाहिए?

HINTS माना, संतरों की अभीष्ट संख्या 'x' है।

$$\because \frac{P_1}{Q_1\times(100\pm P_1/L_1)\%}=\frac{P_2}{Q_2\times(100\pm P_2/L_2)\%}$$

$$\Rightarrow \frac{405}{12\times3\times(100-25)\%}=\frac{228}{x\times(100+20)\%}$$

$$\Rightarrow \frac{405}{12\times3\times75\%}=\frac{228}{x\times120\%}\Rightarrow x=16$$

∴ संतरों की अभीष्ट संख्या = 16

Ex. 18 टेबल पंखे ₹11,664 में बेचकर एक आदमी को 10% की हानि होती है। 10% लाभ कमाने के लिए उसे ₹17,424 में कितने टेबल पंखे बेचने चाहिए?

HINTS माना, टेबल पंखों की अभीष्ट संख्या 'x' है।

$$\because \frac{P_1}{Q_1\times(100\pm P_1/L_1)\%}=\frac{P_2}{Q_2\times(100\pm P_2/L_2)\%}$$

$$\Rightarrow \frac{11664}{18\times(100-10)\%}=\frac{17424}{x\times(100+10)\%}$$

$$\Rightarrow \frac{11664}{18\times90\%}=\frac{17424}{x\times110\%}\Rightarrow x=22$$

∴ टेबल पंखों की अभीष्ट संख्या = 22

Ex. 90 बॉल पेन को ₹160 में बेचने पर एक व्यक्ति को 20% की हानि होती है। 20% का लाभ प्राप्त करने के लिए कितने बॉल पेन को ₹96 में बेचा जाना चाहिए?

HINTS माना, बॉल पेनों की अभीष्ट संख्या 'x' है।

$$\because \frac{P_1}{Q_1\times(100\pm P_1/L_1)\%}=\frac{P_2}{Q_2\times(100\pm P_2/L_2)\%}$$

$$\Rightarrow \frac{160}{90\times80\%}=\frac{96}{x\times120\%}\Rightarrow x=36$$

∴ बॉल पेनों की अभीष्ट संख्या = 36

Ex. 70 वस्तुओं को ₹160 में बेचने पर एक व्यक्ति को 20% की हानि हुई। 20% का लाभ कमाने के लिए उसे कितनी वस्तुएं ₹96 में बेचनी चाहिए?

@apna_channels

HINTS माना, वस्तुओं की अभीष्ट संख्या 'x' है।

$$\because \frac{P_1}{Q_1\times(100\pm P_1/L_1)\%}=\frac{P_2}{Q_2\times(100\pm P_2/L_2)\%}$$

$$\Rightarrow \frac{160}{70\times80\%}=\frac{96}{x\times120\%}\Rightarrow x=28$$

∴ वस्तुओं की अभीष्ट संख्या = 28

यदि P% = CP, तब $CP = 10\left(\sqrt{25+SP}-5\right)$

Ex. एक कलाई घड़ी को उसके क्रय मूल्य के बराबर लाभ प्रतिशत पर ₹1,200 में बेचा जाता है। कलाई घड़ी का क्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

HINTS क्रय मूल्य = $10\left(\sqrt{25+1200}-5\right)$ = 10(35 − 5) = ₹300

∴ कलाई घड़ी का क्रय मूल्य = ₹300

वैकल्पिक विधि

जब लाभ % क्रय मूल्य के बराबर होता है तो हम दो संख्याएँ लेते हैं जिनका गुणनफल विक्रय मूल्य के बराबर होता है तथा अंतर **10** होता है। क्रय मूल्य सबसे छोटी संख्या और **10** के गुणनफल के बराबर होता है।

विक्रय मूल्य = 1200 = 40 × 30 (अंतर 10)

क्रय मूल्य = 30 × 10 = ₹300
(30 ↑ छोटी संख्या)

∴ कलाई घड़ी का क्रय मूल्य = ₹300

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

विविध

Ex. यदि कोई दुकानदार चीनी को ₹44.8 प्रति किलोग्राम की दर से बेचता है, तो वह 12% लाभ कमा पाता है। पानी के रिसाव के कारण चीनी का $\frac{1}{5}$ भाग खराब हो जाता है। अब शेष चीनी का प्रति किलोग्राम विक्रय मूल्य क्या होना चाहिए ताकि उसे 5% लाभ हो?

HINTS माना, चीनी की प्रारंभिक मात्रा 5 किग्रा है।

∵ चीनी का $\frac{1}{5}$ भाग खराब हो जाता है।

∴ चीनी की शेष मात्रा $= 5 \times \frac{4}{5} = 4$ किग्रा

5 किग्रा चीनी का क्रय मूल्य $= \left(44.8 \times \frac{100}{112}\right) \times 5$

5% लाभ अर्जित करने के लिए शेष 4 किग्रा चीनी का विक्रय मूल्य

$= \left(44.8 \times \frac{100}{112} \times 5\right) \times \frac{105}{100}$

∴ 1 किग्रा चीनी का अभीष्ट विक्रय मूल्य

$= \left(44.8 \times \frac{100}{112} \times 5 \times \frac{105}{100}\right) \times \frac{1}{4} = ₹52.5$

वैकल्पिक विधि

विक्रय मूल्य प्रति किग्रा $= 44.8 \times \frac{100}{112} \times \frac{5}{4} \times \frac{105}{100} = \frac{105}{2} = ₹52.5$

Ex. किसी वस्तु के क्रय मूल्य में 7.5% की कमी करने पर एक दुकानदार ₹7,400 में पहले की तुलना में 15 किग्रा अधिक वस्तु खरीद सकता है। वस्तु के कटौती-पूर्व क्रय मूल्य पर 32.5% का लाभ कमाने के लिए, वस्तु को प्रति किग्रा किस मूल्य (₹ में) पर बेचा जाना चाहिए?

HINTS $7.5\% \downarrow = \frac{3}{40}$

	पुराना		नया
मूल्य→	40	:	37
मात्रा→	37	:	40

+3 इकाई

∵ 3 इकाई → 15 किग्रा

1 इकाई → 5 किग्रा

37 इकाई → 185 किग्रा

$CP_{पुराना} = \frac{7400}{185} = ₹40$/किग्रा

∴ अभीष्ट विक्रय मूल्य $= 40 \times \frac{132.5}{100} = ₹53$/किग्रा

Ex. एक आदमी एक मेज को 12% हानि पर और एक किताब को 19% लाभ पर बेचता है। उसे ₹160 का लाभ होता है। यदि वह मेज को 12% लाभ पर और किताब को 16% हानि पर बेचता है, तो उसे ₹40 की हानि होती है। मेज और किताब की कीमत के बीच का अंतर ज्ञात कीजिए।

HINTS माना, मेज का क्रय मूल्य '100x' तथा किताब का क्रय मूल्य '100y' है।

प्रश्नानुसार,

$-12x + 19y = 160$

$+12x - 16y = -40$

$3y = 120$

$\Rightarrow y = 40$

∴ $CP_{किताब} = 100y = 100 \times 40 = ₹4,000$

$-12x + 760 = 160 \Rightarrow 600 = 12x \Rightarrow x = 50$

∴ $CP_{मेज} = 100x = 100 \times 50 = ₹5,000$

∴ अभीष्ट अंतर = 5,000 – 4,000 = ₹1,000

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

अध्याय 16

बट्टा (छूट)

कुछ सामान्य शर्तें

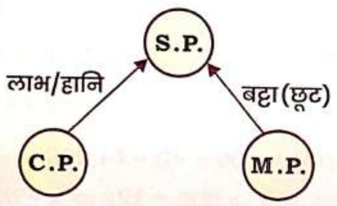
अंकित मूल्यः किसी वस्तु पर छपे मूल्य को अंकित मूल्य (MP) कहते हैं। इसे **सूचीबद्ध मूल्य** या **मुद्रित मूल्य** के रूप में भी जाना जाता है।

बट्टा (छूट): किसी वस्तु को बेचते समय उसके अंकित मूल्य में की गई कटौती को **बट्टा (छूट)** कहते हैं।

बट्टा/छूट (D) = अंकित मूल्य (MP) – विक्रय मूल्य (SP)

$$\text{बट्टा/छूट \%} = \frac{\text{छूट}}{\text{अंकित मूल्य}} \times 100$$

- जब छूट दी जाती है, तो MP > SP
- जब छूट नहीं दी जाती है, तो MP = SP.
- छूट हमेशा अंकित मूल्य (MP) पर दी जाती है और यह 100% से अधिक नहीं हो सकती।



Ex. एक सेल में, एक टीवी जिसका अंकित मूल्य ₹10,490 था, अब ₹9,441 में बेचा गया है। टीवी पर छूट प्रतिशत क्या है?

HINTS दिया है, अंकित मूल्य = ₹10,490, विक्रय मूल्य = ₹9,441

छूट = 10,490 - 9,441 = ₹1,049

$$\therefore \text{छूट \%} = \frac{1049}{10490} \times 100\% = 10\%$$

Ex. एक स्टोर में, एक शर्ट का अंकित मूल्य ₹900 है। स्टोर इसकी बिक्री पर 12% की छूट दे रहा है। ग्राहक इसे स्टोर से किस कीमत पर खरीद सकता है?

HINTS दिया है, अंकित मूल्य = ₹ 900, छूट = 12%

$$\therefore \text{विक्रय मूल्य} = 900 \times \left(\frac{100-12}{100}\right) = 900 \times \frac{88}{100} = ₹792$$

Ex. एक पेन का अंकित मूल्य ₹x है। x पेन के एक पैकेट का विक्रय मूल्य, 15% की छूट के बाद, ₹1,360 है। 'x' का मान क्या है?

HINTS एक पेन का अंकित मूल्य = ₹x

15% छूट के बाद 'x' पेन के एक पैकेट का विक्रय मूल्य 1360 है।

$$\text{छूट} = 15\% = \frac{15}{100} = \frac{3}{20}$$

∴ अंकित मूल्य   विक्रय मूल्य

20   17

$$\text{अंकित मूल्य} = \frac{1360}{17} \times 20 = 1600$$

₹1600 'x' पेन का अंकित मूल्य है। एक पेन का अंकित मूल्य = ₹x

$x \times x = 1600$

$\Rightarrow x^2 = 1600$

$\Rightarrow x = 40$

X खरीदें और Y मुफ्त पाएँ

यदि 'x' वस्तुएं खरीदने पर 'y' वस्तुएं (मात्रा/संख्या) मुफ्त दी जाती हैं, तो:

$$\text{छूट \%} = \frac{(\text{मुफ्त वस्तुओं की संख्या})}{(\text{कुल वस्तुओं की संख्या})} \times 100\% = \frac{y}{x+y} \times 100\%$$

Ex. 24 चूड़ियाँ खरीदने पर, ईशा को 6 चूड़ियाँ मुफ्त मिलती हैं। दुकानदार द्वारा दी गई प्रभावी प्रतिशत छूट ज्ञात कीजिए।

HINTS दिया है, y = 6, x = 24

$$\therefore \text{छूट \%} = \frac{6}{6+24} \times 100\% = \frac{600}{30}\% = 20\%$$

दो क्रमिक छूटों के समतुल्य छूट

यदि x% और y% की दो क्रमिक छूट दी गई हैं, तो समतुल्य छूट:

$$\text{छूट \%} = \left(x + y - \frac{xy}{100}\right)\%$$

Ex. यदि 10% और 15% की क्रमिक छूट दी गई है, तो छूट की एकल समतुल्य दर ज्ञात कीजिए।

HINTS $$\text{समतुल्य छूट \%} = \left(10+15-\frac{10\times15}{100}\right)\%$$

= 25 – 1.5 = 23.5%

वैकल्पिक विधि

(अनुपात विधि द्वारा)

$$10\% = \frac{-1}{10} = \frac{9}{10}, \quad 15\% = \frac{-3}{20} = \frac{17}{20}$$

अंकित मूल्य		विक्रय मूल्य
10	:	9
20	:	17
200	:	153

अंतर (47)

$$\therefore \text{समतुल्य छूट \%} = \frac{47}{200} \times 100\% = 23.5\%$$

Ex. किसी वस्तु के अंकित मूल्य पर दो क्रमागत छूटें 25% की एकल छूट के बराबर हैं। यदि पहली छूट की दर 10% है, तो दूसरी छूट की दर क्या है?

HINTS $$\text{समतुल्य छूट \%} = \left(x + y - \frac{xy}{100}\right)\%$$

$$\Rightarrow 25 = 10 + y - \frac{10y}{100} \Rightarrow 15 = \frac{90y}{100}$$

$$\Rightarrow y = \frac{50}{3}\% = 16\frac{2}{3}\%$$

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

वैकल्पिक विधि

$25\% = \frac{-1}{4} \rightarrow \frac{3}{4}$, $10\% = \frac{-1}{10} \rightarrow \frac{9}{10}$

	अंकित मूल्य	विक्रय मूल्य
1^{st} छूट →	10	9
2^{nd} छूट →	4×9	10×3
समतुल्य छूट →	4	3

⇒

अंकित मूल्य	विक्रय मूल्य
10	9
36	30

अंतर = 6

$\therefore 2^{nd}$ छूट % $= \frac{6}{36} \times 100\% = \frac{1}{6} \times 100\% = 16\frac{2}{3}\%$

वैकल्पिक विधि

अंकित मूल्य = 100 —(−10%)→ 90; अंकित मूल्य = 100 —(−25%)→ 75; अंतर = 15

$\therefore 2^{nd}$ छूट % $= \frac{15}{90} \times 100\% = 16\frac{2}{3}\%$

Ex. एक कंपनी तीन प्रकार की क्रमिक छूट प्रदान करती है: (i) 25% और 15%, (ii) 30% और 10%, (iii) 35% और 5%। ग्राहक के लिए कौन सा प्रस्ताव सबसे अच्छा है?

HINTS (i) समतुल्य छूट % = $\left(25+15-\frac{25\times15}{100}\right)\% = 36.25\%$

(ii) समतुल्य छूट % = $\left(30+10-\frac{30\times10}{100}\right)\% = 37\%$

(iii) समतुल्य छूट % = $\left(35+5-\frac{35\times5}{100}\right)\% = 38.25\%$

अतः, प्रस्ताव (iii) उपभोक्ता के लिए सर्वोत्तम है।

वैकल्पिक विधि

यदि प्रत्येक योजना में छूट की राशि बराबर है तो दोनों छूटों के बीच सबसे बड़े अंतर वाला प्रस्ताव ग्राहक के लिए सबसे अच्छा होगा।

25 15 → अंतर=10; 30 10 → अंतर=20; 35 5 → अंतर=30

अतः, प्रस्ताव (iii) उपभोक्ता के लिए सर्वोत्तम है।

Ex. निम्नलिखित में से कौन सी योजना ₹x की खरीद पर अधिकतम छूट देगी?

(1) 25% और 15% की दो क्रमिक छूट

(2) 20% की एकल छूट

(3) 3 वस्तुओं की खरीद पर 2 मुफ़्त

(4) 7 वस्तुओं की खरीद पर 3 मुफ़्त

HINTS योजना: 1

$D\% = \left(25+15-\frac{25\times15}{100}\right)\% = 36.25\%$

योजना: 2 एकल छूट = 20%

योजना: 3 $D\% = \frac{2}{2+3} \times 100 = 40\%$

योजना: 4 $D\% = \frac{3}{3+7} \times 100 = 30\%$

∴ अधिकतम छूट योजना 3 में है।

तीन क्रमिक छूटों के समतुल्य छूट

यदि $x\%$, $y\%$ और $z\%$ की तीन क्रमिक छूट दी गई हैं, तो समतुल्य छूट:

$$\text{छूट}\% = \left(x+y+z-\frac{(xy+yz+zx)}{100}+\frac{xyz}{10000}\right)\%$$

Ex. किसी वस्तु के अंकित मूल्य पर 20%, 40% और 75% की तीन क्रमिक छूटों के लिए एकल समतुल्य छूट क्या होगी?

HINTS समतुल्य छूट %

$= \left[20+40+75-\left(\frac{20\times40+40\times75+75\times20}{100}\right)+\frac{20\times40\times75}{10000}\right]\%$

$= [135 - 53 + 6]\% = 88\%$

वैकल्पिक विधि

$20\% = \frac{-1}{5} \rightarrow \frac{4}{5}$, $40\% = \frac{-2}{5} \rightarrow \frac{3}{5}$, $75\% = \frac{-3}{4} \rightarrow \frac{1}{4}$

अंकित मूल्य		विक्रय मूल्य
5	:	4
5	:	3
4	:	1
25	:	3

अंतर = 22

∴ समतुल्य छूट % = $\frac{22}{25} \times 100\% = 88\%$

Ex. यदि 5%, 10% और p% की क्रमिक छूट 31.6% की एकल छूट के बराबर है, तो p का मान है:

HINTS क्रमिक विधि द्वारा:-

$\left(5+10-\frac{5\times10}{100}\right)\% = 14.5\%$

पुनः क्रमिक विधि द्वारा:-, $\left(14.5+P-\frac{14.5\times P}{100}\right)\% = 31.6$

$\Rightarrow 1450 + 100p - 14.5p = 3160 \Rightarrow 85.5p = 1710$

$\Rightarrow p = \frac{17100}{855} = 20\%$

वैकल्पिक विधि

छूट = ↓5% ↓10% ↓31.6%

$\Rightarrow \frac{19}{20} \times \frac{9}{10} : \frac{68.4}{1000}$

$\Rightarrow 855 : 684$

171

$\therefore$ लाभ% = $= \frac{171}{855} \times 100 = 20\%$

वैकल्पिक विधि

$x + y + z - \frac{(xy+yz+xz)}{100} + \frac{xyz}{10000}$ = एकल छूट

$\Rightarrow 5 + 10 + \text{लाभ} - \frac{(50+10P+5P)}{100} + \frac{50\ \text{लाभ}}{10000} = 31.6$

$\Rightarrow 15 + \text{लाभ} - 0.5 - 0.15P = 31.6$

$\Rightarrow 14.5 + 0.855\ \text{लाभ} = 31.6$

∴ लाभ = 20%

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

श्रेणी की अवधारणा

यदि अंकित मूल्य (Marked Price) और क्रमिक छूट (D_1%, D_2%, ... D_n%) दिए गए हों, तो विक्रय मूल्य (Selling Price) है:

$$SP = MP \times \left(\frac{100 - D_1\%}{100}\right) \times \left(\frac{100 - D_2\%}{100}\right) .... \left(\frac{100 - D_n\%}{100}\right)$$

इसे श्रेणी विधि **(Series Method)** कहा जाता है।

Ex. एक वस्तु को 10%, 20% और 25% की तीन क्रमागत छूटों पर बेचा जाता है। यदि वस्तु का अंकित मूल्य ₹4,800 है, तो वस्तु का विक्रय मूल्य क्या है?

HINTS विक्रय मूल्य = $4800 \times \frac{90}{100} \times \frac{80}{100} \times \frac{75}{100}$ = ₹2,592

Ex. यदि किसी वस्तु का अंकित मूल्य ₹7,200 है और दो क्रमिक छूटों, प्रत्येक x%, के बाद इसे ₹4,608 में बेचा जाता है, तो 'x' का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS यदि दो क्रमिक छूट हैं, जिनमें से प्रत्येक x% है, तो:

अंकित मूल्य		विक्रय मूल्य
7200	:	4608
25	:	16
$\sqrt{25}$	:	$\sqrt{16}$
5	:	4

अंतर=1

∴ छूट % = $\frac{1}{5} \times 100\%$ = 20%

∴ x = 20%

Ex. यदि किसी वस्तु का अंकित मूल्य ₹10,000 है और तीन क्रमिक छूटों, प्रत्येक x%, के बाद इसे ₹7,290 में बेचा जाता है, तो 'x' का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS यदि तीन क्रमिक छूट हैं, जिनमें से प्रत्येक x% है, तो:

अंकित मूल्य		विक्रय मूल्य
10000	:	7290
1000	:	729
$\sqrt[3]{1000}$	:	$\sqrt[3]{729}$
10	:	9

अंतर=1

छूट % = $\frac{1}{10} \times 100\%$ = 10%

∴ x = 10%

Ex. यदि वस्तु का मूल्य 70% बढ़ा दिया जाता है और फिर इस अंकित मूल्य पर 5% और 20% की योजनागत छूट दी जाती है। यदि मूल्य का भुगतान नकद में किया जाता है और 20% की अतिरिक्त छूट दी जाती है, तो उसका लाभ प्रतिशत क्या है?

HINTS माना, क्रय मूल्य = 100; अंकित मूल्य = 170

तो, प्रश्नानुसार,

$170 \times \frac{95}{100} \times \frac{80}{100} \times \frac{80}{100}$ = विक्रय मूल्य

⇒ $170 \times \frac{19}{20} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5}$ = विक्रय मूल्य

⇒ $\frac{34 \times 19 \times 4}{25}$ = विक्रय मूल्य ⇒ 103.36 = विक्रय मूल्य

लाभ = 103.36 − 100 = 3.36

∴ लाभ % = $\frac{3.36}{100} \times 100$ = 3.36%

मुमताज कॉन्सेप्ट

$$\frac{\text{क्रय मूल्य}}{\text{अंकित मूल्य}} = \frac{(100 - \text{छूट}\%)}{(100 \pm \text{लाभ/ हानि}\%)}$$

Ex. एक दुकानदार एक वस्तु पर 15% की छूट देता है और फिर भी 20% का लाभ कमाता है। दुकानदार उस वस्तु के लिए कितना भुगतान करता है जिसका अंकित मूल्य ₹7,200 है?

HINTS ⇒ $\frac{\text{क्रय मूल्य}}{7200} = \frac{100-15}{100+20}$ ⇒ $\frac{\text{क्रय मूल्य}}{7200} = \frac{85}{120}$

⇒ क्रय मूल्य = ₹5,100

Ex. एक दुकानदार अपने ग्राहकों को 22% की छूट देता है और फिर भी 36% का लाभ कमाता है। एक वस्तु का अंकित मूल्य (₹ में) ज्ञात कीजिए जिसकी कीमत दुकानदार के लिए ₹1,092 है।

HINTS $\frac{\text{क्रय मूल्य}}{\text{अंकित मूल्य}} = \frac{100-22}{100+36}$

⇒ $\frac{1092}{\text{अंकित मूल्य}} = \frac{78}{136}$ ⇒ $\frac{1092}{\text{अंकित मूल्य}} = \frac{39}{68}$

⇒ अंकित मूल्य = $\frac{1092 \times 68}{39}$ = ₹1,904

Ex. एक दुकानदार ने वस्तु का मूल्य क्रय मूल्य से 20% अधिक अंकित किया। यदि वह 30% की छूट देता है, तो उसकी हानि प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

HINTS माना, क्रय मूल्य = 100

क्रय मूल्य	अंकित मूल्य	विक्रय मूल्य
100	120	84

+20% −30%

∴ हानि% = $\frac{100 - 84}{100} \times 100$ = 16%

वैकल्पिक विधि

$\frac{\text{अंकित मूल्य}}{\text{क्रय मूल्य}} = \frac{100 \pm \text{लाभ/हानि}\%}{100 - \text{छूट}}$

⇒ $\frac{6}{5} = \frac{(100 - \text{हानि}\%)}{(100 - 30\%)}$ ⇒ (100 − हानि%) = 84%

∴ हानि% = 16%

Ex. रमेश एक वस्तु को अंकित मूल्य पर 18% की छूट देकर ₹34,440 में बेचता है और फिर भी 40% का लाभ कमाता है। यदि रमेश उस वस्तु के अंकित मूल्य पर 12% की छूट पर बेचता है, तो दशमलव के दो स्थानों तक उसका लाभ क्या होगा?

HINTS $\frac{\text{क्रय मूल्य}}{\text{अंकित मूल्य}} = \frac{100 - 18}{100 + 40} = \frac{82}{140} = \frac{41}{70}$

विक्रय मूल्य = $70 \times \frac{88}{100}$ = 61.6

∴ लाभ% = $\frac{61.6 - 41}{41} \times 100$ = 50.24%

वैकल्पिक विधि

$\frac{\text{अंकित मूल्य}_1}{\text{क्रय मूल्य}_1} = \frac{\text{अंकित मूल्य}_2}{\text{क्रय मूल्य}_2}$ ⇒ $\frac{140}{82} = \frac{x}{88}$

⇒ x = 150.24

∴ लाभ% = 50.24%

@apna_channels
Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @apna_rwa

विविध

Ex. एक वस्तु ₹450 में बिकती है। यदि इसे 20% की छूट पर बेचा जाए, तो विक्रय मूल्य इसके क्रय मूल्य का 1.5 गुना हो जाता है। क्रय मूल्य (₹ में) क्या है?

HINTS दिया गया है,

क्रय मूल्य	:	विक्रय मूल्य
2	:	3
× 120 ↓		↓ × 120
₹ 240		450 का 80% = 360

Ex. 85 वस्तुओं का अंकित मूल्य 153 वस्तुओं के क्रय मूल्य के बराबर था। 104 वस्तुओं का विक्रय मूल्य 65 वस्तुओं के अंकित मूल्य के बराबर था। प्रत्येक वस्तु की बिक्री से प्रतिशत लाभ या हानि की गणना कीजिए।

HINTS प्रश्नानुसार,

$85 \times$ अंकित मूल्य $= 153 \times$ क्रय मूल्य $\Rightarrow \frac{\text{अंकित मूल्य}}{\text{क्रय मूल्य}} = \frac{9}{5}$

प्रश्नानुसार, पुनः

$104 \times$ विक्रय मूल्य $=$ अंकित मूल्य $\times 65 \Rightarrow \frac{\text{अंकित मूल्य}}{\text{विक्रय मूल्य}} = \frac{8}{5}$

क्रय मूल्य : विक्रय मूल्य : अंकित मूल्य = 40 : 45 : 72

$\Rightarrow$ लाभ $= 45 - 40 = 5$

$\therefore$ लाभ % $= \frac{5}{40} \times 100\% = 12.5\%$

Ex. एक दुकानदार के लिए एक वस्तु की कीमत ₹4,000 है, और वह इसकी कीमत ₹8,400 अंकित करता है। दुकानदार इसे एक ग्राहक को 25% की छूट पर बेचता है। यदि ग्राहक स्टोर द्वारा पहले जारी किए गए कूपन को लगाता है, तो उसे छूट वाली कीमत पर 15% की अतिरिक्त छूट मिलती है। इस लेन-देन में दुकानदार द्वारा अर्जित लाभ प्रतिशत (निकटतम पूर्णांक तक) क्या है?

HINTS दिया गया है,

क्रय मूल्य = 4000, अंकित मूल्य = 8400

प्रभावी छूट $= \left(25 + 15 - \frac{25 \times 15}{100}\right)\% = 36.25\%$

$\frac{\text{क्रय मूल्य}}{\text{अंकित मूल्य}} = \frac{100 - \text{छूट}}{100 + \text{लाभ}} \Rightarrow \frac{4000}{8400} = \frac{63.75}{100 + P}$ $100 + P \approx 134$

$\therefore P \approx 34\%$

वैकल्पिक विधि

दिया गया है'

अंकित मूल्य = 8400, क्रय मूल्य = 4000

विक्रय मूल्य $= 8400 \times 75\% \times 85\% = 5385$

$\Rightarrow$ लाभ $= \frac{5385 - 4000}{4000} \times 100\ \% \Rightarrow$ लाभ % $= 34\%$

Ex. एक शोरूम में एक वॉशिंग मशीन की कीमत ₹65,000 है। ग्राहक को ₹2,000 की नकद छूट और 10% से 15% तक की छूट का वादा करने वाला एक स्क्रैच कार्ड मिलता है। वॉशिंग मशीन के न्यूनतम और अधिकतम विक्रय मूल्य के बीच का अंतर ज्ञात कीजिए।

HINTS प्रश्नानुसार,

नकद छूट के बाद वॉशिंग मशीन की कीमत $= 65000 - 2000 = 63000$

छूट = अधिकतम - न्यूनतम

$15\% - 10\% = 5\%$

$\therefore$ अंतर $= 63000 \times 5\% =$ ₹3150

Ex. एक दुकानदार तीन प्रकार की दालें क्रमशः ₹132, ₹160 और ₹y प्रति किग्रा की दर से खरीदता है और उन्हें 9 : 2 : 1 के अनुपात में मिला देता है। मिश्रित दालों का प्रति किग्रा अंकित मूल्य ₹238 तय किया जाता है। दुकानदार अंकित मूल्य के $\frac{1}{6}$ बराबर छूट देता है और फिर भी 40% का लाभ कमाता है। y का मान क्या है?

HINTS प्रश्नानुसार,

$(132 \times 9 + 160 \times 2 + Y \times 1) \times \frac{140}{100} = 238 \times 12 \times \frac{5}{6}$

$\Rightarrow 1188 + 320 + y = 1700 \Rightarrow y = 1700 - 1508 = 192$

Ex. एक दुकानदार ने एक मशीन ₹4600 में खरीदी और उसकी मरम्मत और परिवहन पर ₹500 खर्च किए। उसने मशीन का अंकित मूल्य कुल लागत मूल्य से 8% अधिक रखा। यदि उसने x% छूट देकर मशीन को ₹4681.80 में बेचा, तो x का मान क्या है?

HINTS क्रय मूल्य = 4600 + 500 = ₹5100

अंकित मूल्य $= 5100 + 5100 \times \frac{8}{100} = 5508 \Rightarrow$ विक्रय मूल्य $= 4681.80$

$x\% = \frac{(5508 - 4681.80)}{5508} \times 100 = \frac{826.2}{5508} \times 100 = 15\%$

वैकल्पिक विधि

क्रय मूल्य = 4600 + 500 = 5100

अंकित मूल्य $= 5100 \times 108\%$ छूट $= x\%$

अंकित मूल्य		विक्रय मूल्य
$5100 \times \frac{108}{100}$	:	4681.8
20	:	17
	3	

$x = \frac{3}{20} \times 100 = 15\%$

Ex. एक थोक विक्रेता द्वारा बेची जा रही प्रत्येक वस्तु का अंकित मूल्य ₹300 था। थोक विक्रेता स्टॉक क्लीयरेंस सेल की पेशकश कर रहा था, जिसके तहत, प्रत्येक तीन वस्तुओं के भुगतान पर, एक वस्तु मुफ़्त दी जा रही थी। इसके अतिरिक्त, ₹10,000 से अधिक की खरीदारी करने पर '3 खरीदें, 1 मुफ़्त पाएँ' योजना के तहत देय राशि पर 10% की अतिरिक्त छूट दी जा रही थी। रमेश ने ₹18,000 की खरीदारी की। इस लेनदेन के दौरान रमेश को दी गई प्रभावी छूट प्रतिशत क्या था?

HINTS 3 खरीदें 1 मुफ़्त पाएं योजना

4	:	3
10	:	9
40	:	27
	13	

$\therefore$ छूट % $= \frac{13}{40} \times 100\% = 32.5\%$

स्वयं करें

Ex. एक दुकानदार अपनी वस्तु का अंकित मूल्य क्रय मूल्य से 32% अधिक रखता है और अंकित मूल्य पर 21% की छूट देता है। वस्तु पर उसका लाभ प्रतिशत ज्ञात कीजिए। **[Ans. 4.28%]**

Join Telegram: @yct_publication

Join Telegram: @yct_publication

अध्याय 17

साधारण ब्याज

कुछ सामान्य शर्तें

मूलधनः उधार ली गयी धनराशि को मूलधन कहते हैं।

साधारण ब्याजः साधारण ब्याज वह राशि है, जो किसी निश्चित राशि पर निश्चित समय अवधि में निश्चित दर पर उधार लेने वाला व्यक्ति अतिरिक्त भुगतान करता है।

ब्याज दरः जिस दर पर कोई धनराशि उधार ली जाती है उसे ही ब्याज की दर कहते हैं।

समय अवधिः वह समय जिसके लिए कोई राशि उधार ली जाती है, उसे ब्याज की समय अवधि कहा जाता है।

मिश्रधनः मूलधन और ब्याज का योग मिश्रधन कहलाता है।

☞ **सामान्य सूत्र**

साधारण ब्याज (SI) = $\frac{P \times R \times T}{100}$

मिश्रधन (A) = P + SI

जहाँ, P = मूलधन, T = समय, R = ब्याज की दर

Ex. ₹16000 की राशि पर, 15% ब्याज की दर से 3 वर्ष में प्राप्त साधारण ब्याज तथा मिश्रधन ज्ञात करें।

HINTS साधारण ब्याज $= \frac{P \times R \times T}{100} = \frac{16000 \times 15 \times 3}{100} = ₹7200$

मिश्रधन = मूलधन + साधारण ब्याज = 16000 + 7200 = ₹23200

365 दिन वाले वर्ष में:

73 दिन = $\frac{1}{5}$ वर्ष, 146 दिन = $\frac{2}{5}$ वर्ष

समय की अवधारणा

☞ यदि एक निश्चित राशि साधारण ब्याज पर 'T' वर्ष में स्वयं की 'n' गुनी हो जाती है, तो वार्षिक दर प्रतिशत (R) और समय (T) का मान होगा:

$R\% = \frac{(n-1)}{T} \times 100$

$T = \frac{(n-1)}{R} \times 100$

Ex. यदि कोई निश्चित धनराशि साधारण ब्याज पर 4 वर्षों में स्वयं की 3 गुना हो जाती है, तो वार्षिक ब्याज दर प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

HINTS दर $= \frac{(3-1)}{4} \times 100 = 50\%$

Ex. किसी धनराशि को साधारण ब्याज की दर 50% वार्षिक पर स्वयं से अधिकतम चार गुना बनने में कम से कम कितने पूर्ण वर्ष लगेंगे?

HINTS दर $= \frac{4-1}{T} \times 100 \Rightarrow 50 = \frac{300}{T}$

$\Rightarrow T = 6$ वर्ष

4 गुना से अधिक होने के लिए समय 6 वर्षों से अधिक होगा।

इसलिए, समय =7 वर्ष।

☞ $\left[\frac{N_1 - 1}{T_1} = \frac{N_2 - 1}{T_2}\right]$

N_1 & N_2 = कितने गुना वृद्धि हुई

T_1 & T_2 = समय

Ex. एक निश्चित राशि साधारण ब्याज पर निवेश करने पर 12 वर्षों में 4 गुना हो जाती है। वही राशि उसी दर पर कितने वर्षों में अपने आप की 10 गुना हो जाएगी?

HINTS $T_1 = 12$ वर्ष, $N_1 = 4$ गुना,

$T_2 = ?$, $N_2 = 10$ गुना

$\because \frac{N_1 - 1}{T_1} = \frac{N_2 - 1}{T_2} \Rightarrow \frac{3}{12} = \frac{9}{T_2}$

$\Rightarrow T_2 = 36$ वर्ष

वैकल्पिक विधि

मूलधन	मिश्रधन	साधारण ब्याज
1	4	3
1	10	9

$\because$ 3 इकाई → 12 वर्ष

$\Rightarrow$ 9 इकाई → 36 वर्ष

$\therefore$ अभीष्ट समय = 36 वर्ष

☞ $\left[\frac{N_1 - 1}{R_1} = \frac{N_2 - 1}{R_2}\right]$

N_1 & N_2 = कितने गुना वृद्धि हुई

R_1 & R_2 = ब्याज की दर

Ex. किसी निश्चित समय में एक राशि साधारण ब्याज की 6% वार्षिक दर से 5 गुना हो जाती है। उसी अवधि में वही राशि 8 गुना किस ब्याज दर पर होगी?

HINTS $R_1 = 6\%$ $N_1 = 5$

$R_2 = ?$ $N_2 = 8$

$\because \frac{N_1 - 1}{R_1} = \frac{N_2 - 1}{R_2}$

$\Rightarrow \frac{4}{6} = \frac{7}{R_2} \Rightarrow R_2 = 10.5\%$

वैकल्पिक विधि

मूलधन	मिश्रधन	साधारण ब्याज
1	5	4
1	8	7

4 इकाई → 6%

$\Rightarrow$ 7 इकाई → 10.5%

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

☞ यदि साधारण ब्याज, मूलधन का n गुना हो जाता हो, तो:

साधारण ब्याज = मूलधन × n ⇒ दर × समय = n ×100

Ex. यदि साधारण ब्याज 5 वर्षों में मूलधन का दोगुना हो जाता है तो ब्याज दर ज्ञात कीजिए।

HINTS ∵ दर × समय = n × 100 ⇒ दर × 5 = 2 × 100 ⇒ दर = 40%

☞ यदि साधारण ब्याज, मूलधन का $\frac{p}{q}$ भाग है और ब्याज की दर तथा समय समान हैं, तो

$$\text{समय} = \text{दर} = \sqrt{\frac{p}{q}} \times 10$$

Ex. यदि साधारण ब्याज, मूलधन का $\frac{25}{16}$ भाग है और ब्याज की दर तथा समय समान हैं, तो दर ज्ञात कीजिए।

HINTS $\text{समय} = \text{दर} = \sqrt{\frac{p}{q}} \times 10$

$$\text{दर} = \sqrt{\frac{25}{16}} \times 10 = \frac{5}{4} \times 10 = 12.5\%$$

दर x% अधिक या कम है

Ex. एक निश्चित राशि को एक निश्चित साधारण ब्याज की दर पर 6 वर्षों के लिए दिया गया है। यदि यह 7% अधिक दर पर दिया जाता, तो इसे 1,512 रुपये अधिक मिलते। राशि ज्ञात कीजिए (रुपये में)।

HINTS 6 वर्षों में बढ़ा ब्याज = 7% × 6 = 42%

प्रश्नानुसार,

42% → ₹1512

⇒ 1% → ₹36

⇒ 100% → ₹3600

∴ मूलधन = ₹3600

Ex. यदि साधारण ब्याज की वार्षिक दर 11% से बढ़कर $17\frac{1}{2}\%$ % हो जाती है, तो किसी व्यक्ति की वार्षिक आय ₹1,071.20 बढ़ जाती है। उसी धनराशि पर 10% की दर से 5 वर्षों के लिए साधारण ब्याज (₹ में) कितना होगा?

HINTS $\text{दर अंतर} = 17\frac{1}{2}\% - 11\% = 6\frac{1}{2}\%$

$$= 1071.2 \times \frac{2}{13} \times 100 = ₹16480$$

$$\text{अब, साधारण ब्याज} = \frac{16480 \times 10 \times 5}{100} = ₹\ 8240$$

मूलधन और मिश्रधन का अनुपात

Ex. किसी राशि पर 5% वार्षिक साधारण ब्याज की दर से 10 वर्ष में प्राप्त साधारण ब्याज ₹2000 है, तब मिश्रधन और मूलधन के बीच अनुपात ज्ञात कीजिए।

HINTS

इस प्रकार के प्रश्नों में हमें प्रश्न को पूरी तरह हल करने की आवश्यकता नहीं होती।

मूलधन (P) = 100% साधारण ब्याज (SI) = 10 × 5% = 50%

∴ मूलधन : मिश्रधन = P : (P + SI) = 100% : 150% = 2 : 3

मुन्नी कॉन्सेप्ट

Ex. साधारण ब्याज पर उधार दी गई एक राशि 1 वर्ष में ₹6076 तथा 4 वर्ष में ₹7504 हो जाती है। राशि और ब्याज दर ज्ञात कीजिए।

HINTS

4 वर्ष: P —(1 वर्ष)→ ₹6076 —(3 वर्ष)→ ₹7504

$$\text{1 वर्ष का साधारण ब्याज} = \frac{7504 - 6076}{3} = \frac{1428}{3} = ₹476$$

∴ मूलधन = 6076 – 476 = ₹5600

$$\text{दर \%} = \frac{SI}{P} \times 100\% = \frac{476}{5600} \times 100\% = 8.5\%$$

Ex. साधारण ब्याज की एक निश्चित दर पर एक राशि 3 साल बाद 14880 रुपये और 5 साल बाद 16800 रुपये हो जाती है। उसी राशि पर 10% प्रतिवर्ष की दर से 4 वर्षों का साधारण ब्याज (रुपये में) ज्ञात करें।

HINTS

5 वर्ष: P —(3 वर्ष)→ ₹14880 —(2 वर्ष)→ ₹16800

2 वर्ष का साधारण ब्याज = 16800 – 14880 = ₹1920

$$\text{मूलधन} = 14880 - 1920 \times \frac{3}{2}$$

= 14880 – 2880 = ₹12000

$$\therefore \text{साधारण ब्याज} = \frac{PRT}{100} = \frac{12000 \times 10 \times 4}{100} = ₹4800$$

Ex. किसी धनराशि की राशि 2 वर्षों में ₹1,860 और $3\frac{1}{2}$ वर्षों में ₹2,130 हो जाती है, जब साधारण ब्याज पर लगाई जाती है। क्रमशः मूलधन और ब्याज की दर ज्ञात कीजिए।

HINTS

3.5 वर्ष: P —(2 वर्ष)→ ₹1860 —(1.5 वर्ष)→ ₹2130

1.5 वर्षों में ब्याज

= 2130 – 1860 = 270

2 वर्षों में ब्याज = 360

मूलधन = 1860 – 360 = 1500

$$\text{दर} = \frac{180 \times 100}{1500 \times 1} = 12\%$$

Ex. साधारण ब्याज पर एक धनराशि 3 वर्षों में 1,200 रुपये और 4 वर्षों में 1,350 रुपये हो जाती है। धनराशि है:

HINTS

4 वर्ष: P —(3 वर्ष)→ ₹1200 —(1 वर्ष)→ ₹1350

1 वर्ष में साधारण ब्याज = ₹1350 – ₹1200 = ₹150

3 वर्षों में साधारण ब्याज = ₹150 × 3 = ₹450

∴ धनराशि = ₹1200 – ₹450 = ₹750

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

एलिगेशन पर आधारित

Ex. कुल 2,00,000 रुपये को दो हिस्सों में विभाजित किया गया है, ताकि अलग-अलग बैंकों में साधारण ब्याज पर निवेश किया जा सके। एक पर 4% वार्षिक ब्याज मिलता है और दूसरे पर 6% वार्षिक ब्याज मिलता है। यदि एक वर्ष के अंत में कुल ब्याज, पूरी राशि पर 4.7% वार्षिक के बराबर होता है, तो बैंक में 4% वार्षिक निवेश की गई राशि है:

HINTS

4%   6%

4.7%

निवेश → 1.3   0.7

13 : 7 = 20

↓×10000 ↓×10000 ↓×10000

₹130000   ₹70000   ₹200000

Ex. एक व्यक्ति ने 25,000 रुपये की राशि का एक-चौथाई भाग एक निश्चित साधारण ब्याज दर पर और शेष राशि 4% अधिक वार्षिक दर पर निवेश की। यदि 2 वर्षों में कुल प्राप्त ब्याज 4,125 रुपये है, तो दूसरी राशि किस दर पर निवेश की गई थी?

HINTS कुल ब्याज % = $\frac{4125}{25000\times2}\times100\% = \frac{33}{4}\%$

r   r + 4

$\frac{33}{4}$

1 : 3

$\Rightarrow \frac{33}{4} = \frac{r+3r+12}{4} \Rightarrow r = 5.25\%$

∴ दूसरी राशि की निवेश दर = 5.25 + 4 = 9.25%

कुल (SI) की अवधारणा पर आधारित

Ex. एक निश्चित राशि 3 वर्षों के लिए 4% वार्षिक, अगले 4 वर्षों के लिए 8% वार्षिक तथा 7 वर्षों के बाद 12% वार्षिक ब्याज की दर से उधार दी जाती है। यदि 11 वर्षों की अवधि के लिए साधारण ब्याज 27,600, प्राप्त होता है, तो यह राशि (रुपये में) कितनी है?

HINTS

11 वर्ष

समय →	3 वर्ष	4 वर्ष	4 वर्ष
दर →	4%	8%	12%
साधारण ब्याज →	12%	32%	48% = 92%

प्रश्नानुसार,

92% → ₹27600

100% → $\frac{27600}{92}\times100$ = ₹30000

∴ राशि = ₹30,000

Ex. रमेश ने कुछ राशि उधार ली, पहले चार वर्षों के लिए 5% वार्षिक दर से, अगले छः वर्षों के लिए 8% वार्षिक दर से और दस वर्षों के बाद की अवधि के लिए 12% वार्षिक दर से। यदि बारह वर्षों के अंत में उसने कुल 9,016 रुपये ब्याज के रूप में दिए, तो रमेश ने कितनी राशि उधार ली थी?

HINTS

12 वर्ष

समय →	4 वर्ष	6 वर्ष	2 वर्ष
दर →	5%	8%	12%
स. ब्याज →	20%	48%	24% = 92%

प्रश्नानुसार,

92% → ₹9016

100% → $\frac{9016}{92}\times100$ = ₹9800

∴ रमेश द्वारा उधार ली गई राशि = ₹9800

समान (SI) की अवधारणा पर आधारित

यदि एक राशि 'P' को 3 भागों में बाँटा जाता है, अर्थात् P_1, P_2, P_3 और फिर प्रत्येक भाग को क्रमशः r_1, r_2, r_3 दरों पर क्रमशः t_1, t_2, t_3 वर्षों के लिए साधारण ब्याज पर दिया जाता है और तीनों भागों से प्राप्त साधारण ब्याज बराबर होते हैं, तो:

$$P_1 : P_2 : P_3 = \frac{1}{r_1t_1} : \frac{1}{r_2t_2} : \frac{1}{r_3t_3}$$

Ex. एक व्यक्ति साधारण ब्याज पर ₹9,000 की कुल राशि को तीन भाग में 3% 4% और 6% की दर से निवेश करता है। एक वर्ष के अंत में उसे तीनों स्थितियों में समान ब्याज प्राप्त हुआ। 6% पर निवेशित राशि है:

HINTS

माना, निवेश की गई राशि का अनुपात = $P_1 : P_2 : P_3$

प्रश्नानुसार,

निवेशित सभी 3 राशियों पर साधारण ब्याज बराबर है।

$P_1 : P_2 : P_3 = \frac{1}{r_1t_1} : \frac{1}{r_2t_2} : \frac{1}{r_3t_3}$

$\Rightarrow P_1 : P_2 : P_3 = \frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{1}{6}$

$\Rightarrow P_1 : P_2 : P_3 = 4 : 3 : 2$

∴ 6% की दर पर निवेश की गई राशि = $9000\times\frac{2}{9}$ = ₹2000

Ex. 5,000 रुपये को 4% वार्षिक साधारण ब्याज की दर पर कितने समय में उतना ब्याज मिलेगा जितना ₹8,000 रुपये को $2\frac{1}{2}$ वर्षों में 8% वार्षिक साधारण ब्याज की दर पर मिलता है?

HINTS

प्रश्नानुसार,

$\frac{5000\times t\times4}{100} = 8000\times\frac{5}{2}\times\frac{8}{100}$

$\Rightarrow 20t = 20\times8$

$\Rightarrow t = 8$ वर्ष

@apna_channels
Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

समान मिश्रधन पर आधारित

यदि एक धनराशि 'P' को तीन भागों अर्थात् P_1, P_2, P_3 में विभाजित किया जाता है और फिर प्रत्येक भाग को r_1, r_2, r_3 की दर से क्रमशः t_1, t_2, t_3 वर्षों के लिए साधारण ब्याज पर उधार दिया जाता है और तीनों भागों से प्राप्त राशि समान है, तो:

$$P_1:P_2:P_3 = \frac{1}{100+r_1t_1}:\frac{1}{100+r_2t_2}:\frac{1}{100+r_3t_3}$$

Ex. यदि A द्वारा 9,100 रुपये को 3 वर्षों के लिए 10% वार्षिक साधारण ब्याज दर पर निवेश करने से प्राप्त राशि, B द्वारा किसी निश्चित राशि को 5 वर्षों के लिए 8% वार्षिक साधारण ब्याज दर पर निवेश करने से प्राप्त राशि के बराबर है, तो B द्वारा निवेश की गई राशि का 90% (रुपये में) कितना होगा?

HINTS

$$P_1:P_2 = \frac{1}{100+r_1t_1}:\frac{1}{100+r_2t_2}$$

$$P_1:P_2 = \frac{1}{100+10\times3}:\frac{1}{100+8\times5}$$

$$P_1:P_2 = \frac{1}{130}:\frac{1}{140}$$

$$P_1:P_2 = 14:13$$

$$\frac{9100}{P_2} = \frac{14}{13} \Rightarrow P_2 = \frac{9100\times13}{14}$$

$$\therefore 90\% \text{ का } P_2 = \frac{9100\times13}{14}\times\frac{90}{100} = ₹7605$$

वैकल्पिक विधि

A का 130% = B का 140%

⇒ 13 × 9100 = 14 × B ⇒ B = 8450

$$\therefore \frac{90}{100}\times B = \frac{90}{100}\times 8450 = ₹7605$$

Ex. एक व्यक्ति अपने दो पुत्रें जिनकी आयु 9 वर्ष और 13 वर्ष है, के बैंक खातों में ₹21750 की धनराशि इस प्रकार निवेशित करता है ताकि 21 वर्ष की आयु होने पर 4.5% वार्षिक दर से इनको समान धन प्राप्त हो। छोटे पुत्र का भाग ज्ञात कीजिए।

HINTS छोटे पुत्र के लिए:

निवेश की समयावधि = 21 – 9 = 12 वर्ष

बड़े पुत्र के लिए:

निवेश की समयावधि = 21 – 13 = 8 वर्ष

माना, छोटे और बड़े बच्चे के लिए निवेश की गई राशि 'x' और 'y' है।

प्रश्नानुसार,

x का (100 + 12 × 4.5)% = y का (100 + 8 × 4.5)%

⇒ x का 154% = y का 136%

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{136}{154} = \frac{68}{77}$$

$$\therefore \text{छोटे पुत्र का भाग} = 21750\times\frac{68}{77+68} = ₹10200$$

विविध

Ex. एक साहूकार दावा करता है कि वह 8% वार्षिक साधारण ब्याज की दर पर पैसा उधार देता है। लेकिन वह चालाकी से हर छः महीने में ब्याज की राशि को मूलधन में जोड़कर अगली गणना करता है। इस प्रकार प्रभावी ब्याज दर बन जाती है:

HINTS

दर = 8% वार्षिक

तब, दर = 4% (छः माही)

$$\text{प्रभावी दर} = 4+4+\frac{4\times4}{100} = 8.16\%$$

Ex. 5,000 रुपये की एक राशि को दो भागों में इस प्रकार बाँटा गया है कि पहले भाग पर $4\frac{1}{5}$ वर्षों के लिए $6\frac{2}{3}$% वार्षिक दर से साधारण ब्याज, दूसरे भाग पर $2\frac{3}{4}$ वर्षों के लिए 4% वार्षिक दर से साधारण ब्याज का दोगुना है। दोनों भागों के बीच कितना अंतर है?

HINTS

माना, दोनों भाग x, y हैं।

प्रश्नानुसार,

$$x\times\frac{20}{3}\times\frac{21}{5} = 2\times y\times4\times\frac{11}{4}$$

⇒ 14x = 11y

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{11}{14} \text{) –3 इकाई}$$

(11+14) इकाई = 25 इकाई → ₹5000 (×200)

3 इकाई → ₹600 (×200)

∴ दोनों भागों के बीच अंतर = ₹600

Ex. राजेश ने 10,000 रुपये की राशि 15% प्रति वर्ष साधारण ब्याज दर पर 2 वर्षों के लिए ऋण के रूप में ली। लेकिन राजेश तय समय पर इसे चुका नहीं सका और उसने दो और वर्षों की मोहलत मांगी। इसलिए, ऋणदाता ने उस अवधि के ब्याज को अगले दो वर्षों के लिए उसी ब्याज दर पर मूलधन के रूप में जोड़ दिया। 4 वर्षों के अंत में राजेश द्वारा चुकाई गई कुल राशि है:

HINTS 2 वर्ष बाद राशि

$$= \frac{10000\times15\times2}{100} + 10000 = 13000$$

अब यह राशि अगले 2 वर्षों के लिए मूलधन बन जाएगी।

4 वर्षों के बाद चुकाई गई कुल राशि

$$= 13000 + \frac{13000\times15\times2}{100}$$

= 13000 + 3900 = 16900

वैकल्पिक विधि

P = 10000

दो वर्ष बाद का साधरण ब्याज = 15 × 2 = 30%

अब

$$\text{4 वर्षों के बाद चुकाई गई कुल राशि} = 10000\times\frac{13}{10}\times\frac{13}{10} = 16900$$

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

किस्त

☞ यदि राशि समान किस्तों में जमा करनी हो, तो: समान किस्त = $\frac{A\times200}{T[200+(T-1)\times r]}$

जहाँ, A = देय ऋण, T = समय, r = ब्याज की दर

Ex. ₹30000 की धन राशि पर 8% साधारण ब्याज पर चार वर्ष में देय ऋण भुगतान करता है, तो प्रत्येक किस्त का मान ज्ञात करें

HINTS देय ऋण $= 30,000 + 30000 \times \frac{8\times4}{100} = ₹39600$

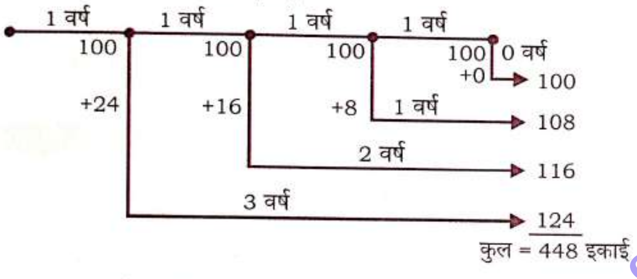
$\therefore$ प्रत्येक किस्त की राशि $= \frac{A\times200}{T[200+(T-1)\times r]}$

$\frac{39600\times200}{4[200+3\times8]} = \frac{39600\times200}{4\times224} = ₹8839.28 \approx ₹8840$

वैकल्पिक विधि

देय ऋण $= 30,000 + 30000 \times \frac{8\times4}{100} = ₹39600$

माना, प्रत्येक किस्त = 100 इकाई



$\because$ 448 इकाई → ₹39,600

$\Rightarrow$ 100 इकाई → $\frac{39600}{448} \times 100 = ₹8840$

$\therefore$ प्रत्येक किस्त का मान = ₹8840

Ex. कौन सी वार्षिक किस्त 1740 रूपये के ऋण को 8% वार्षिक साधारण ब्याज की दर से 5 वर्षों में अदा कर देगी?

HINTS देय ऋण = ₹1740

माना, प्रत्येक किस्त का मान = 100 इकाई

देय ऋण = 100 + 108 + 116 + 124 + 132 = 580 इकाई

$\therefore$ प्रत्येक किस्त $= \frac{1740}{580}\times100 = ₹300$

Ex. कौन-सी पांच-माही किस्त 94,500 रूपये के ऋण को $1\frac{1}{4}$ वर्ष में 12% प्रति वर्ष के साधारण ब्याज से चुका देगी?

HINTS दर $= \frac{12}{12}\times5 = 5\%$, (पांच-माही/चक्र),

समय $= \frac{15}{5} = 3$ (चक्र)

देय ऋण = ₹94500

माना, प्रत्येक किस्त का मान = 100 इकाई

देय ऋण = 100 + 105 + 110 = 315 इकाई

$\therefore$ प्रत्येक किस्त $= \frac{94500}{315}\times100 = ₹30000$

Ex. एक व्यक्ति ने साधारण ब्याज पर बैंक से ₹7,000 की राशि उधार ली। 3 वर्ष बाद उन्होंने बैंक को ₹3,000 का भुगतान किया और 5 वर्ष के अंत में उन्होंने ₹5450 का भुगतान किया और अपना सभी बकाया ऋण चुका दिया। ब्याज दर ज्ञात कीजिए।

HINTS उधार ली गई राशि = ₹7000

कुल भुगतान की गई राशि = 3000 + 5450 = ₹8450

भुगतान किया गया ब्याज = 8450 − 7000 = ₹1450

हम जानते है, $SI = \frac{P\times R\times T}{100}$

यहाँ वह दो मूलधनों पर ब्याज चुकाएँगा, अर्थात

3 वर्ष के लिए ₹7000 और 2 वर्ष के लिए ₹4000

$\Rightarrow \frac{7000\times R\times3}{100} + \frac{4000\times R\times2}{100} = 1450$

$\Rightarrow 290R = 1450 \Rightarrow R = 5\%$

Ex. एक कैमरा नकद अग्रिम भुगतान के रूप में 2500 रुपये और 3 महीने के बाद 2100 रुपये में बेचा जाता है। यदि ब्याज की दर 20% प्रति वर्ष है, तो कैमरे का नकद मूल्य ज्ञात करें।

HINTS नकद अग्रिम भुगतान = ₹2500

3 महीने बाद चुकाई गई किस्त = ₹2100

ब्याज की दर = 20% वार्षिक

अत:, = ₹2100 के लिए मूलधन राशि:

$\Rightarrow P\left(100 + 20\times\frac{3}{12}\right)\% = 2100$

$\Rightarrow P \times 105\% = 2100$

$\Rightarrow P = \frac{2100}{105}\times100 = ₹2000$

$\therefore$ कैमरे का नकद मूल्य = 2500 + 2000 = ₹4500

Ex. एक कंप्यूटर ₹30,000 नकद या ₹18000 नकद अग्रिम भुगतान और ₹2150 प्रत्येक की 6 मासिक किस्तों पर बेचा जाता है। किस्त योजना के अंतर्गत ली जाने वाली ब्याज दर ज्ञात कीजिए।

HINTS कंप्यूटर की नकद कीमत = 30,000 रुपये

नकद अग्रिम भुगतान = 18,000 रुपये

6 किस्तों में भुगतान = (6 × 2150) = 12,900 रुपये

कुल भुगतान की गई राशि = (18000 + 12900) = 30900 रुपये

$\therefore$ चुकाया गया ब्याज = (30900 − 30000) = 900 रुपये

पहले महीने के लिए मूलधन = (30000 − 18000) = 12000 रुपये

दूसरे महीने के लिए मूलधन = (12000 − 2150) = 9850 रुपये

तीसरे महीने के लिए मूलधन = (9850 − 2150) = ₹7700

चौथे महीने के लिए मूलधन = (7700 − 2150) = ₹5550

पाँचवें महीने के लिए मूलधन = (5550 − 2150) = ₹3400

छठे महीने के लिए मूलधन = (3400 − 2150) = ₹1250

$\therefore$ एक महीने के लिए कुल मूलधन = (12000 + 9850 + 7700 + 5550 + 3400 +1250) = ₹39750

$\because 39750\times\frac{r}{100}\times\frac{1}{12} = 900$

$\Rightarrow r = \frac{900\times12\times100}{39750} = \frac{1440}{53} = 27.17\%$

$\therefore$ ब्याज की दर = 27.17% वार्षिक

@apna_channels
Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

अध्याय 18

चक्रवृद्धि ब्याज

- **चक्रवृद्धि ब्याज** वह ब्याज होता है जो उधार ली गई या दी गई राशि पर अर्जित किया जाता है, जो न केवल प्रारंभिक मूलधन पर, बल्कि पिछले अवधियों में जमा हुए ब्याज पर भी आधारित होता है।
- किसी राशि पर चक्रवृद्धि ब्याज मूलधन और पिछले अवधियों में प्राप्त ब्याज दोनों पर निर्भर करता है। यही चक्रवृद्धि ब्याज और साधारण ब्याज के बीच मुख्य अंतर है।
- चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात करने के लिए हम निम्नलिखित सूत्र का उपयोग करेंगे

$$A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^t, \; C.I. = A - P$$

$$C.I. = P\left[\left(1+\frac{r}{100}\right)^t - 1\right]$$

जहाँ,

A = मिश्रधन,

P = मूलधन,

r = दर

C.I.= चक्रवृद्धि ब्याज

t = समयावधि

☞ यदि प्रश्न में कहा गया है कि ब्याज अर्ध-वार्षिक, त्रैमासिक, मासिक या n-मासिक रूप से संयोजित होता है, तो आपको निम्नलिखित तालिका की सहायता से चक्रवृद्धि ब्याज की गणना करने के लिए नई दर और समय चक्र ज्ञात करना होगा:

	दर	समय (n)
वार्षिक	r%	t वर्ष
अर्धवार्षिक	$\frac{r}{2}$%	t × 2 चक्र
त्रैमासिक	$\frac{r}{4}$%	t × 4 चक्र
महीने के	$\frac{r}{12}$%	t × 12 चक्र

☞ चक्रवृद्धि ब्याज निकालने के कई तरीके होते हैं:

- सूत्र विधि
- ट्री विधि
- अनुपात विधि
- क्रमिक विधि
- गोल्डन अनुपात विधि

मूल सूत्रों को याद रखना ज़रूरी है, लेकिन हम प्रश्नों को हल करने के लिए इसका इस्तेमाल कम ही करते हैं। ट्री विधि और अनुपात विधि का इस्तेमाल आमतौर पर तब किया जाता है जब दी गई ब्याज दर जैसे 5%, 10%, 15%, 20%, 25% या $8\frac{1}{3}\%, 12\frac{1}{2}\%, 14\frac{2}{7}\%, 16\frac{2}{3}\%$ को भिन्न में बदलना आसान हो।

जब ब्याज दर को भिन्न में बदलना मुश्किल होता है– जैसे कि 3%, 6%, 7%, 9%, 13%, 18% आदि तब हम क्रमिक विधि (Successive Method) का उपयोग करते हैं।

क्रमिक प्रतिशत के लिए तालिका

प्रश्नों को शीघ्रता से हल करने के लिए निम्नलिखित तालिका याद रखें

तालिका 01: 2 चक्र/वर्ष के लिए

दर	CI	CI – SI
2%	4.04%	0.04%
3%	6.09%	0.09%
4%	8.16%	0.16%
5%	10.25%	0.25%
6%	12.36%	0.36%
7%	14.49%	0.49%
8%	16.64%	0.64%
9%	18.81%	0.81%
10%	21%	1%
11%	23.21%	1.21%
12%	25.44%	1.44%
15%	32.25%	2.25%
20%	44%	4%
25%	56.25%	6.25%
30%	69%	9%

तालिका 02: 3 चक्र/वर्ष के लिए

दर	CI	CI – SI
2%	6.12%	0.12%
3%	9.27%	0.27%
4%	12.48%	0.48%
5%	15.76%	0.76%
6%	19.1%	1.1%
7%	22.5%	1.5%
8%	25.97%	0.97%
9%	29.5%	2.5%
10%	33.1%	3.1%
11%	36.76%	3.36%
12%	40.49%	4.49%
15%	52.09%	7.09%
20%	72.80%	12.80%
25%	95.31%	20.31%
30%	119.7%	29.7%

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

क्रमिक प्रतिशत परिवर्तन की गणना कैसे करें

2 वर्ष के लिए

- क्रमिक प्रतिशत परिवर्तन = $\left[a+b+\frac{ab}{100}\right]\%$
- यदि a = b तो क्रमिक प्रतिशत परिवर्तन = $\left[2a+\frac{a^2}{100}\right]\%$

इसलिए, जब भी हमें समान मान की क्रमिक प्रतिशत वृद्धि ज्ञात करनी हो –

चरण I: मान दोगुना करें

चरण II: मान का वर्ग करें, दो अंकों के बाद दाईं ओर से दशमलव लगाएँ, और इसे चरण I के परिणाम में जोड़ें।

Ex. 2% & 2%

चरण I: 2 × 2 = 4%

चरण II: 2^2 = 4 → 0.04%

अब, 4 + 0.04 = 4.04%

Ex. 5% & 5%

चरण I: 2 × 5 = 10%

चरण II: 5^2 = 25 → 0.25%

अब, 10 + 0.25 = 10.25%

Ex. 10% & 10%

चरण I: 2 × 10 = 20%

चरण II: 10^2 = 100 → 1.00%

अब, 20 + 1.00 = 21%

3 वर्ष के लिए

- कर्मिक प्रतिशत परिवर्तन

$$=\left[a+b+c+\frac{(ab+bc+ca)}{100}+\frac{abc}{10000}\right]\%$$

- यदि a = b = c तो कर्मिक प्रतिशत परिवर्तन

$$=3a+\frac{3a^2}{100}+\frac{a^3}{10000}=3a|3a^2|a^3$$

Ex. 2%, 2% & 2% = 3 × 2 | 3 × 2^2 | 2^3 = 6.1208%

Ex. 3%, 3% & 3% = 3 × 3 | 3 × 3^2 | 3^3 = 9.2727%

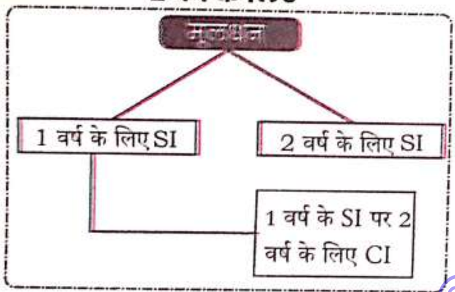
Ex. 5%, 5% & 5% = 3 × 5 | 3 × 5^2 | 5^3 = 15 | 75 | 125 = 15.7625%

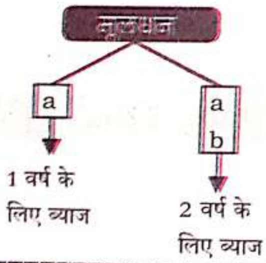
Ex. 6%, 6% & 6% = 18 | 108 | 216 = 19.1016%

Ex. 8%, 8% & 8% = 24 | 192 | 512 = 25.9712%

2 वर्ष/चक्र और 3 वर्ष/चक्र के लिए ट्री विधि संरचना

2 वर्ष के लिए

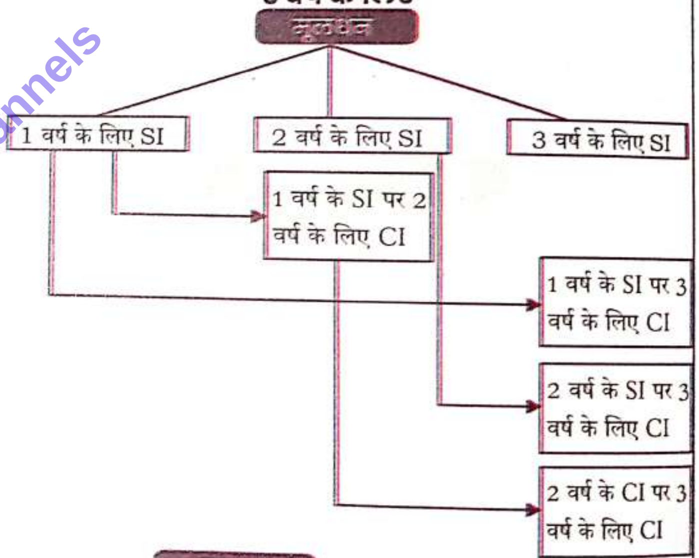


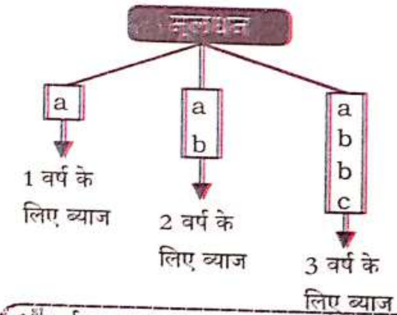


1^{st} वर्ष का ब्याज = a
2^{nd} वर्ष का ब्याज = a + b
2 वर्ष के लिए CI और SI के बीच का अंतर = b

- ध्यान रखें कि साधारण और चक्रवृद्धि ब्याज पहले वर्ष के लिए समान रहते हैं।
- 2 चक्र/वर्ष के लिए चक्रवृद्धि ब्याज और साधारण ब्याज का अंतर सीधे सूत्र का उपयोग करके ज्ञात किया जा सकता है = $P\left(\frac{R}{100}\right)^2$
- 3 चक्र/वर्षों के लिए चक्रवृद्धि ब्याज और साधारण ब्याज का अंतर सीधे सूत्र का उपयोग करके ज्ञात किया जा सकता है = $P\left(\frac{R}{100}\right)^2\left(\frac{300+R}{100}\right)$

3 वर्ष के लिए





1^{st} वर्ष का ब्याज = a
2^{nd} वर्ष का ब्याज = a + b
3^{rd} वर्ष का ब्याज = a + 2b + c
3 वर्ष का SI = 3a
3 वर्ष का CI = 3a + 3b + c
3 वर्ष के लिए CI और SI के बीच का अंतर = 3b + c

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

2 वर्ष/चक्र के लिए

Ex. 2500 रुपये की राशि को 20% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज (वार्षिक रूप से संयोजित) की दर से 2 वर्षों के लिए निवेश किया जाता है। ज्ञात कीजिए।
(i) चक्रवृद्धि ब्याज
(ii) मिश्रधन
(iii) दूसरे वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज

HINTS **(क्रमिक विधि द्वारा)**

2 वर्ष के लिए 20% प्रतिवर्ष की दर से चक्रवृद्धि ब्याज की समतुल्य दर = 44%

दिया है, मूलधन (100%) = ₹2500

(i) चक्रवृद्धि ब्याज $= 2500 \times \frac{44}{100} =$ ₹1100

(ii) मिश्रधन (144%) $= 2500 \times \frac{144}{100} =$ ₹3600

(iii) दूसरे वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज = 20 + 4 = 24%

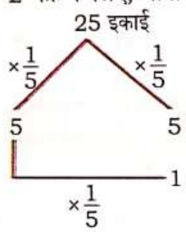
$\Rightarrow 2500 \times \frac{24}{100} =$ ₹600

वैकल्पिक विधि

(ट्री विधि द्वारा)

$20\% = \frac{1}{5}$

2 चक्र के लिए, माना मूलधन $(5)^2$ = 25 इकाई



2 वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज = 5 + 5 + 1 = 11 इकाई
यहाँ, 25 इकाई = ₹2500

(i) CI(11इकाई) $= \frac{2500}{25} \times 11 =$ ₹1100

(ii) 2 वर्ष के बाद मिश्रधन = P + CI = 25 + 11 = 36 इकाई

$\Rightarrow \frac{2500}{25} \times 36 =$ ₹3600

या A = P + CI = 2500 + 1100 = ₹3600

(iii) दूसरे वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज = 5 + 1 = 6 इकाई

$\Rightarrow \frac{2500}{25} \times 6 =$ ₹600

वैकल्पिक विधि

(अनुपात विधि द्वारा)

$20\% = \frac{1}{5}$

मूलधन	:	मिश्रधन
5^2	:	6^2
25	:	36

CI
11 इकाई

दिया है,
25 इकाई = ₹2500
(i) CI (11 इकाई) = ₹1100
(ii) मिश्रधन (36 इकाई) = ₹3600

Ex. किस राशि पर एक वर्ष के लिए 12% प्रति वर्ष की दर से अर्धवार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज 1545 रुपये है?

HINTS CI = 1545, दर = 12% प्रतिवर्ष

समय = 1 वर्ष = 12 महीने
चूँकि ब्याज वार्षिक रूप से संयोजित होता है

∴ समय' $= \frac{12}{6} = 2$ चक्र,

दर' $= \frac{12}{12} \times 6\,\% = 6\%$

(क्रमिक विधि द्वारा)

2 वर्ष के लिए 6% प्रतिवर्ष की दर से चक्रवृद्धि ब्याज की समतुल्य दर = 12.36%

यहाँ, CI (12.36%) = 1545

∴ मूलधन (100%) $= \frac{1545 \times 100}{12.36} =$ ₹12,500

Ex. एक निश्चित धनराशि 10% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज दर पर 1 वर्ष 9 महीने की अवधि के लिए उधार दी गई। यदि चक्रवृद्धि ब्याज ₹1460 है, तो उधार दी गई धनराशि ज्ञात कीजिए।

HINTS 1 वर्ष के लिए ब्याज की दर = 10%

शेष 9 माह के लिए ब्याज की दर $= \frac{10 \times 9}{12}\% = 7.5\%$

1 वर्ष 9 महीने के लिए समतुल्य ब्याज दर

$= \left[10 + 7.5 + \frac{10 \times 7.5}{100}\right]\%$

= (17.50 + 0.75)% = 18.25%

∴ मूलधन $= \frac{1460}{18.25} \times 100 =$ ₹8000

Ex. ₹6,400 पर 5% प्रति वर्ष चक्रवृद्धि ब्याज की दर से 1 वर्ष के लिए वार्षिक और अर्धवार्षिक रूप से संयोजित चक्रवृद्धि ब्याज के बीच क्या अंतर है?

HINTS समय = 1 वर्ष = 2 चक्र (अर्धवार्षिक)

R = 5% वार्षिक

$R = \frac{5}{2}\% = 2.5\%$ (अर्धवार्षिक)

प्रभावी दर $= \left(2.5 + 2.5 + \frac{2.5 \times 2.5}{100}\right)\%$

= 5.0625%

अंतर = 0.0625% × 6400 = ₹4

@apna_channels
Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

3 वर्ष/चक्र के लिए

Ex. 1000 रुपये की राशि 3 वर्षों के लिए 20% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज (वार्षिक रूप से संयोजित) पर निवेश की जाती है। ज्ञात कीजिए।

(i) चक्रवृद्धि ब्याज (ii) मिश्रधन

(iii) तीसरे वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज

HINTS (क्रमिक विधि द्वारा)

3 वर्ष के लिए 20% पर CI की समतुल्य दर = 72.8%

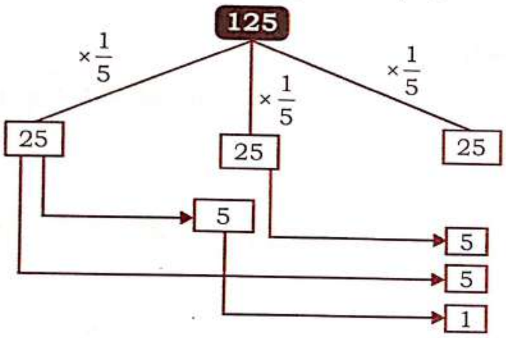
(i) दिया है, मूलधन (100%) = ₹1000

∴ CI (72.8%) = ₹728

(ii) मिश्रधन (172.8%) = ₹1728

वैकल्पिक विधि (ट्री विधि द्वारा) $R = 20\% = \frac{1}{5}$

3 वर्ष के लिए, माना मूलधन $(5)^3 = 125$ इकाई



कुल CI = 3 × 25 + 3 × 5 + 1 = 91 इकाई

दिया है, 125 इकाई = ₹1000

(i) CI (91 इकाई) = $\frac{1000}{125} \times 91$ = ₹728

(ii) मिश्रधन = मूलधन + CI = 1000 + 728 = ₹1728

(iii) तीसरे वर्ष का CI = 25 + 2 × 5 + 1 = 36 इकाई ⇒ $\frac{1000}{125} \times 36$ = ₹288

वैकल्पिक विधि (अनुपात विधि द्वारा)

मूलधन		मिश्रधन
5^3	:	6^3
125	:	216

CI = 91 इकाई

मूलधन (125 इकाई) = ₹1000

(i) CI = 91 × 8 = ₹728

(ii) मिश्रधन (216 इकाई) = 216 × 8 = ₹1728

Ex. ₹25,000 पर 3 वर्षों के लिए 10% वार्षिक ब्याज दर से चक्रवृद्धि ब्याज क्या है?

HINTS 3 वर्षों के लिए समतुल्य दर 10% = 33.1%

CI = 25000 का 33.1% = ₹8275

वैकल्पिक विधि

	मूलधन	:	मिश्रधन
प्रथम वर्ष →	10	:	11
द्वितीय वर्ष →	10	:	11
तृतीय वर्ष →	10	:	11
	1000		1331

×25 → ₹25000; CI = 331 इकाई $\xrightarrow{\times 25}$ ₹8275

गोल्डन अनुपात विधि

2 वर्ष के लिए → 2 : 1

3 वर्ष के लिए → 3 : 3 : 1

4 वर्ष के लिए → 4 : 6 : 4 : 1

5 वर्ष के लिए → 5 : 10 : 10 : 5 : 1

6 वर्ष के लिए → 6 : 15 : 20 : 15 : 6 : 1

Ex. यदि ब्याज त्रैमासिक रूप से संयोजित किया जाता है तो ₹75000 की धन राशि 16% वार्षिक दर से एक वर्ष में कितनी हो जाएगी।

HINTS दर = $\frac{16}{4}\%$ = 4% (त्रैमासिक), समय = 1 वर्ष = 4चक्र (त्रैमासिक)

4 चक्र के लिए

		CI
4	$75000 \times \frac{4}{100} = 3000$	12000
6	$3000 \times \frac{4}{100} = 120$	720
4	$120 \times \frac{4}{100} = 4.8$	19.2
1	$4.8 \times \frac{4}{100} = 0.192$	~0.2
		12739.4

कुल मिश्रधन = 75000 + 12739.4 = ₹87739.4

Ex. एक बैंक से ₹1,00,000 की राशि 7% वार्षिक चक्रवृद्धि प्रतिवर्ष की दर से 5 वर्षों के लिए ली गई। चक्रवृद्धि ब्याज की गणना करें (₹ के निकटतम)

HINTS 5 वर्ष के लिए

		CI
5	$100000 \times \frac{7}{100} = 7000$	35000
10	$7000 \times \frac{7}{100} = 490$	4900
10	$490 \times \frac{7}{100} = 34.3$	343
5	$34.3 \times \frac{7}{100} = 2.401$	12
1	$2.401 \times \frac{7}{100} = 0.168$	~0.1
		40255

Ex यदि 6,500 रुपये की राशि 2 वर्षों के लिए 10% वार्षिक ब्याज पर उधार ली जाती है, यदि ब्याज अर्धवार्षिक रूप से संयोजित होता है, तो मिश्रधन (केवल पूर्णांक मान) ज्ञात कीजिए।

HINTS 4 चक्र के लिए

		CI
4	$6500 \times \frac{5}{100} = 325$	1300
6	$325 \times \frac{5}{100} = 16.25$	97.5
4	$16.25 \times \frac{5}{100} = 0.8125$	3.25
1		~1400

मिश्रधन = 6500 + 1400 = 7900

वैकल्पिक विधि

P		A
20	:	21
20	:	21
20	:	21
20	:	21
160000	:	194481

160000 इकाई = 6500 ⇒ 194481 इकाई = 7900

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

जब समय भिन्न में दिया गया है

Ex. ₹20,000 की राशि पर 15% प्रति वर्ष की दर से $2\frac{2}{3}$ वर्षों के लिए चक्रवृद्धि ब्याज क्या होगा, जब ब्याज का संयोजन वार्षिक है।

HINTS मूलधन = ₹20000

सामान्य = $2\frac{2}{3}$ वर्ष, दर = 15% प्रतिवर्ष

∵ "ब्याज वार्षिक रूप से चक्रवृद्धि होता है"

∴ पहले 2 वर्षों के लिए ब्याज दर = 15%

& शेष $\frac{2}{3}$ वर्ष के लिए ब्याज दर = $15 \times \frac{2}{3} = 10\%$

(अनुपात विधि द्वारा)

मूलधन	:	मिश्रधन
20	:	23
20	:	23
10	:	11
4000		5819

CI = 1819

4000 ×5 → 20000

1819 ×5 → **9095**

जहाँ हमारे पास अलग-अलग वर्षों के लिए अलग-अलग ब्याज दरें हों, वहाँ अनुपात विधि लागू करना बेहतर होता है।

वैकल्पिक विधि

(क्रमिक विधि द्वारा)

2 वर्ष के लिए 15% पर CI की समतुल्य दर = 32.25%

फिर, 32.25% और 10% के लिए समतुल्य दर =

$\left[32.25+10+\frac{32.25\times10}{100}\right]\%$

= (42.25 + 3.225)% = 45.475%

दिया है, मूलधन (100%) = ₹20,000

45.475% = ₹9095

Ex. ₹8192 की राशि पर 15% प्रति वर्ष की दर से $1\frac{1}{2}$ वर्षों के लिए चक्रवृद्धि ब्याज (₹ में) क्या है, यदि ब्याज 5-मासिक संयोजित होता है?

HINTS दर $=\frac{15}{12}\times5\% = \frac{25}{4}\% = \frac{1}{16}$

समय $=1\frac{1}{4}=\frac{5}{4}\times12 = 15$ महीने = 3 चक्र

	मूलधन	:	मिश्रधन
प्रथम वर्ष →	16	:	17
द्वितीय वर्ष →	16	:	17
तृतीय वर्ष →	16	:	17
	4096		4913

CI = 817 इकाई

4096 ×2 → ₹8192

817 इकाई ×2 → ₹1634

CI और SI के अंतर पर आधारित

Ex. किसी धनराशि पर 9% वार्षिक दर से दो वर्षों के साधारण ब्याज और चक्रवृद्धि ब्याज का अंतर ₹162 है। मूलधन कितना है?

HINTS 2 वर्षों के लिए चक्रवृद्धि ब्याज और साधारण ब्याज का अंतर

$= P\left(\frac{R}{100}\right)^2 \Rightarrow 162 = P\left(\frac{9}{100}\right)^2$

$\Rightarrow P = \frac{162\times10000}{81} = ₹20000$

वैकल्पिक विधि

2 वर्षों के लिए क्रमिक दर= $\left(9+9+\frac{9\times9}{100}\right)\% = 18.81\%$

प्रश्नानुसार,

अंतर = (18.81–18)= 0.81% → ₹162

100% → = 20,000

⇒ मूलधन = ₹20,000

Ex. ₹15,625 की राशि को 3 वर्षों के लिए 4% प्रति वर्ष की दर से निवेश करने पर चक्रवृद्धि ब्याज और साधारण ब्याज के बीच अंतर ज्ञात कीजिए।

HINTS 3 वर्षों के लिए चक्रवृद्धि ब्याज और साधारण ब्याज के बीच अंतर

$=P\left(\frac{r}{100}\right)^2\left(3+\frac{r}{100}\right) = 15625\left(\frac{4}{100}\right)^2\left(3+\frac{4}{100}\right)$

$= 15625\times\frac{16}{10000}\times\frac{304}{100} = ₹76$

Ex. ₹12,000 की राशि पर 12% वार्षिक दर से $1\frac{1}{4}$ के चक्रवृद्धि ब्याज (5 माह की चक्रवृद्धि) तथा साधारण ब्याज में अंतर ज्ञात करें।

HINTS मूलधन = ₹12000

समय = $1\frac{1}{4}$ वर्ष = 15 महीने, दर = 12% प्रतिवर्ष

5 महीने पर चक्रवृद्धि ब्याज, अब

समय' = $\frac{15}{5}$ = 3 चक्र & दर ' = $\frac{12}{12}\times5 = 5\%$

अंतर = $P\left(\frac{R}{100}\right)^2\left(\frac{300+R}{100}\right)$

$= 12000\times\frac{25}{100\times100}\times\frac{305}{100} = ₹91.50$

वैकल्पिक विधि

(क्रमिक विधि द्वारा)

3 वर्ष के लिए 5% पर CI की समतुल्य दर

= 15.7625%

अंतर = (15.7625 – 15)% = 0.7625%

दिया है, 100% = ₹12000

अंतर (0.7625%) = $\frac{12000}{100}\times0.7625 = ₹91.5$

@apna_channels
Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

CI और SI का संयोजन

Ex. एक निश्चित राशि 10% वार्षिक ब्याज दर पर 4 वर्षों में ₹14,641 हो जाती है, जब ब्याज वार्षिक रूप से संयोजित होता है। साधारण ब्याज की समान दर पर $3\frac{2}{5}$ वर्षों में समान राशि (₹ में) क्या होगी?

HINTS 4 वर्षों के लिए 10% पर CI की समतुल्य दर = 46.41%

मिश्रधन = 146.41%

⇒ 146.41% = 14641

1% = 100

मूलधन (100%) = ₹10000

$\therefore$ मिश्रधन = $10000 + 10000 \times \frac{17}{5} \times \frac{10}{100}$

= 10000 + 3400

= ₹13400

Ex. वरुण और मधुर ने अलग-अलग योजनाओं में ₹25,000 का निवेश किया। वरुण ने 11% वार्षिक दर से साधारण ब्याज अर्जित किया, जबकि मधुर ने 10% वार्षिक दर से चक्रवृद्धि ब्याज अर्जित किया। 2 वर्ष बाद किसे अधिक ब्याज प्राप्त हुआ और कितना?

HINTS वरुण के लिए समतुल्य दर = 22%

मधुर के लिए समतुल्य दर = 21%

वरुण को मिली अधिक ब्याज = (22 – 21)% = 1% अधिक

$\Rightarrow \frac{1}{100} \times 25000$ = ₹250

दर ज्ञात करने के लिये

Ex. वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज के आधार पर निवेशित ₹6,400 की राशि दो वर्षों में बढ़कर ₹7,056 हो जाती है। ब्याज की प्रतिशत दर क्या है?

HINTS

मूलधन		मिश्रधन
6400	:	7056
सरल रूप		
400	:	441
2 वर्ष के लिए, वर्गमूल ज्ञात करने पर		
20	:	21

ब्याज की दर = $\frac{1}{20} \times 100\% = 5\%$

Ex. हेमा ने ₹1728 की राशि चक्रवृद्धि ब्याज पर 3 वर्षों के लिए निवेश की। 3 वर्षों के बाद उसे ₹4096 प्राप्त हुए तो वार्षिक ब्याज दर क्या थी?

HINTS मूलधन = 1728, मिश्रधन = 4096

मूलधन : मिश्रधन

(1728 : 4096)

3 वर्ष के लिए, घनमूल ज्ञात करने पर

12 : 16

दर = $\frac{4}{12} \times 100\% = 33\frac{1}{3}\%$

Ex. ₹8,000 की राशि पर चक्रवृद्धि ब्याज 18 महीनों में ₹9,261 हो जाता है। यदि ब्याज अर्धवार्षिक रूप से संयोजित होता है, तो ब्याज दर ज्ञात कीजिए।

HINTS

मूलधन : मिश्रधन

(8000 : 9261)

3 चक्र के लिए, घनमूल ज्ञात करने पर

20 : 21

ब्याज दर = $\frac{1}{20} \times 100\% = 5\%$

वार्षिक ब्याज दर = 10%

समय ज्ञात करने के लिये

Ex. यदि 12.5% वार्षिक दर से ब्याज संयोजित किया जाए तो ₹320 की राशि कितने वर्षों में ₹405 हो जाएगी?

HINTS

	मूलधन		मिश्रधन
	320	:	405
सरल रूप	64	:	81
यह पूर्ण वर्ग है (वर्गमूल)	8	:	9

$\therefore$ समय = 2 वर्ष

Ex. 5% प्रति वर्ष की दर से ₹4,000 पर चक्रवृद्धि ब्याज ₹630.50 है, तो समय अवधि है:

HINTS

	मूलधन		मिश्रधन
	40000	:	46305
सरल रूप	8000	:	9261
यह पूर्ण घन है (घनमूल)	20	:	21

$\therefore$ समय = 3 वर्ष

Ex. ₹10,000 पर 20% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज ₹4,641 है। जब ब्याज अर्द्धवार्षिक रूप से संयोजित होता है, तो राशि कितने वर्षों के लिए निवेशित की गई थी?

HINTS

दर = 10% (अर्द्धवार्षिक)

मिश्रधन = 10,000 + 4641 = 14641

$\because A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$

$\Rightarrow 14,641 = 10000\left(\frac{11}{10}\right)^n \Rightarrow \frac{14641}{10000} = \left(\frac{11}{10}\right)^n \Rightarrow \left(\frac{11}{10}\right)^4 = \left(\frac{11}{10}\right)^n$

$\therefore n = 4$

आवश्यक समय = $\frac{4}{2} = 2$ वर्ष

वैकल्पिक विधि

दर = $\frac{20\%}{2} = 10\%$ (अर्द्धवार्षिक)

P		A
10000	:	14641
↓		↓
10^4	:	11^4

आवश्यक समय = $\frac{4}{2} = 2$ वर्ष

यदि मूलधन और राशि का सरलीकृत अनुपात पूर्ण वर्ग है तो समय 2 वर्ष (चक्र) है और यदि यह पूर्ण घन है तो समय 3 वर्ष (चक्र) है।

@apna_channels
Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

मुन्नी विधि

Ex. चक्रवृद्धि ब्याज पर निवेश की गई एक राशि 3 वर्षों में ₹7,800 और 5 वर्षों में ₹11,232 हो जाती है। ब्याज दर प्रतिशत क्या है?

HINTS

P —3 वर्ष→ 7800 —2 वर्ष→ 11232 (5 वर्ष)

सरल करने पर 100 : 144

2 वर्ष के लिए, वर्गमूल लेने पर 10 : 12

ब्याज की दर = $\frac{2}{10} \times 100\% = 20\%$

Ex. एक धनराशि समान ब्याज दर पर चक्रवृद्धि ब्याज (वार्षिक संयोजन) पर 2 वर्षों में ₹6580 हो जाती है और 3 वर्षों में ₹7896 हो जाती है। वार्षिक ब्याज दर क्या है?

HINTS

मूलधन —2 वर्ष→ 6580 —1वर्ष→ 7896 (3 वर्ष)

1 वर्ष के लिए ब्याज = (7896 – 6580) = ₹1316

ब्याज की दर = $\frac{1316}{6580} \times 100\,\% = 20\%$

Ex. एक निश्चित प्रतिशत वार्षिक ब्याज दर पर, जब ब्याज वार्षिक रूप से संयोजित होता है, जब एक धनराशि 3 वर्षों में ₹8,028 और 6 वर्षों में ₹12,042 हो जाती है। धनराशि है:

HINTS

मूलधन —3 वर्ष→ 8028 —3 वर्ष→ 12042 (6 वर्ष)

सरल करने पर 2 : 3 ($\times\frac{3}{2}$)

चूँकि 3 वर्ष में राशि स्वयं की $\frac{3}{2}$ गुना हो जाती है।

$\Rightarrow$ मूलधन $\times \frac{3}{2} = 8028 \Rightarrow$ मूलधन = ₹5352

Ex. एक धनराशि चक्रवृद्धि ब्याज पर 4 वर्ष बाद ₹11,880 और 6 वर्ष बाद ₹17,820 हो जाती है, ब्याज वार्षिक रूप से संयोजित होता है। धनराशि का आधा (₹ में) क्या है?

HINTS

मूलधन —4 वर्ष→ 11880 —2 वर्ष→ 17820 (6 वर्ष)

सरल रूप में 2 : 3 ($\times\frac{3}{2}$)

चूँकि 2 वर्ष में राशि स्वयं की $\frac{3}{2}$ गुना हो जाती है।

$\Rightarrow$ मूलधन $\times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = 11880 \Rightarrow$ मूलधन = ₹5280

$\therefore$ धनराशि का आधा = $\frac{5280}{2}$ = ₹2640

मूलधन 'T' वर्षों के बाद 'N' गुना हो जाता है

जब ब्याज दर संयोजित होती है तो एक निश्चित राशि n_1 वर्ष में x गुना और n_2 वर्ष में y गुना हो जाती है, तो $x^{\frac{1}{n_1}} = y^{\frac{1}{n_2}}$

Ex. एक धनराशि चक्रवृद्धि ब्याज (वार्षिक रूप से संयोजित) की दर से 10 वर्षों में 3 गुना हो जाती है, कितने वर्षों में यह 243 गुना हो जाएगी?

HINTS सूत्र का उपयोग करते हुए,

$n_1 = 10, x = 3, y = 243, n_2 = ?$

$\Rightarrow 3^{\frac{1}{10}} = 3^{\frac{5}{n_2}} \Rightarrow \frac{1}{10} = \frac{5}{n_2}$

$\Rightarrow n_2 = 50$ वर्ष

वैकल्पिक विधि

10 वर्ष → 3^1 गुना

×5 ↓ ×5

50 वर्ष → 3^5 गुना

Ex. एक धनराशि चक्रवृद्धि ब्याज पर 4 वर्षों में दोगुनी हो जाती है। समान ब्याज दर पर कितने वर्षों में वह धनराशि 8 गुना हो जाएगी?

HINTS प्रश्नानुसार,

1 —4 वर्ष (×2)→ 2 —4 वर्ष (×2)→ 4 —4 वर्ष (×2)→ 8

कुल समय = 4 + 4 + 4 = 12 वर्ष

वैकल्पिक विधि

4 वर्ष → 2^1 गुना

×3 ↓ ×3

12 वर्ष → 2^3 गुना

Ex. एक निश्चित धनराशि चक्रवृद्धि ब्याज पर 5 वर्षों में तीन गुनी हो जाती है। इसे 9 गुनी होने में कितने वर्ष लगेंगे?

HINTS प्रश्नानुसार,

1 —5 वर्ष (×3)→ 3 —5 वर्ष (×3)→ 9

कुल समय = 5 + 5 = 10 वर्ष

वैकल्पिक विधि

5 वर्ष → 3^1 गुना

×2 ↓ ×2

10 वर्ष → 3^2 गुना

चरण-1: समय (गुना) को घात में बदलें

चरण-2: "घात (Power) में गुणक (Multiplication Factor) को समय (Time) में उसी गुणक से गुणा किया जाएगा।"

@apna_channels
Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

विविध

राशि और CI_1, CI_2, CI_3 इत्यादि गुणोत्तर श्रेणी (GP) में होंगे।
"आइये, इस उदाहरण को ध्यान से समझते हैं।"
माना, मूलधन = ₹10000, दर = 10%
और समय = 3 वर्ष

दर = 10% = गुणन कारक (Multiplying Factor) = $\frac{11}{10}$ or 1.1

P	A_1	A_2	A_3
10000	11000	12100	13310
	×1.1	×1.1	×1.1
1000	1100	1210	
	×1.1	×1.1	

हम किसी भी दो राशियों या CI का अनुपात लेकर दर या मूलधन ज्ञात कर सकते हैं।

Ex. यदि दूसरे वर्ष के लिए चक्रवृद्धि ब्याज ₹100 है और तीसरे वर्ष के लिए ₹110 है, तो प्रति वर्ष ब्याज की दर ज्ञात कीजिए।

HINTS 100 : 110
सरल करने पर 10 : 11

दर = $\frac{1}{10} \times 100\% = 10\%$

Ex. चौथे वर्ष के अंत में एक निश्चित राशि पर चक्रवृद्धि ब्याज ₹625 है। पाँचवें वर्ष के अंत में चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए, यदि ब्याज दर (वार्षिक रूप से संयोजित) 8% प्रति वर्ष है।

HINTS 5^{th} वर्ष के अंत में C.I. = $625 \times \frac{27}{25}$ = ₹675

Ex. 25600 रुपये की राशि 25% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज पर निवेश की जाती है। चौथे वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए।

HINTS 4^{th} वर्ष का CI = $25600 \times \frac{1}{4} \times \frac{5}{4} \times \frac{5}{4} \times \frac{5}{4}$ = ₹12,500

मूलधन को $\frac{1}{4}$ से गुणा करने पर हमे पहले वर्ष का CI प्राप्त होता है, उसके बाद $\frac{5}{4}$ से गुणा करने पर दूसरे वर्ष का CI और फिर $\frac{5}{4}$ और $\frac{5}{4}$ से गुणा करने पर तीसरे और चौथे वर्ष का CI प्राप्त होता है।

Ex. किसी राशि पर पहले वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज ₹6400 है। यदि ब्याज दर $12\frac{1}{2}$% प्रति वर्ष है, तो चौथे वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए।

HINTS 4^{th} वर्ष का CI = $6400 \times \frac{9}{8} \times \frac{9}{8} \times \frac{9}{8}$
$= \frac{72900}{8}$ = ₹9112.5

चूंकि पहले वर्ष का CI 6400 है, इसलिए $\frac{9}{8}$ से गुणा करने पर दूसरे वर्ष का CI और फिर $\frac{9}{8}$ और $\frac{9}{8}$ से गुणा करने पर तीसरे और चौथे वर्ष का CI प्राप्त होता है।

Ex. किसी धनराशि पर तीसरे वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज ₹1,25,000 है। यदि ब्याज दर 25% प्रति वर्ष है, तो पहले वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए।

HINTS 1^{st} वर्ष का CI = $125000 \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5}$ = ₹80,000

Ex. ₹4,000 की राशि 10% प्रति वर्ष की दर से उधार दी जाती है, जिस पर ब्याज वार्षिक रूप से संयोजित होता है। तो दूसरे वर्ष और तीसरे वर्ष के चक्रवृद्धि ब्याज में क्या अंतर है?

HINTS मूलधन = ₹4000, दर = 10%

3^{rd} वर्ष का CI – 2^{nd} वर्ष का CI = $4000 \times \frac{1}{10} \times \frac{11}{10} \times \frac{1}{10}$ = ₹44

मूलधन को $\frac{1}{10}$ से गुणा करने पर हमे पहले वर्ष का CI प्राप्त होता है, उसके बाद $\frac{11}{10}$ से गुणा करने पर दूसरे वर्ष का CI और फिर $\frac{1}{10}$ से गुणा करने पर तीसरे और दूसरे वर्ष का अंतर प्राप्त होता है।

Ex. ₹18000 की एक राशि 10% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज पर उधार दी जाती है, जो वार्षिक रूप से संयोजित होती है। तो तीसरे वर्ष और चौथे वर्ष के चक्रवृद्धि ब्याज में क्या अंतर है?

HINTS 4^{th} वर्ष का CI – 3^{th} वर्ष का CI

$= 18000 \times \frac{1}{10} \times \frac{11}{10} \times \frac{11}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{198 \times 11}{10}$ = ₹217.8

Ex. यदि किसी निश्चित राशि पर तीसरे वर्ष में 8% प्रति वर्ष की दर से चक्रवृद्धि ब्याज ₹3600 है, तो चौथे और पाँचवें वर्ष में चक्रवृद्धि ब्याज के बीच क्या अंतर है? (में एक पूर्णांक के निकटतम)

HINTS 5^{th} वर्ष का CI – 4^{th} वर्ष का CI = $3600 \times \frac{27}{25} \times \frac{2}{25}$ = ₹311.04

Ex. जोसेफ ने अपनी 15 और 16 वर्ष की दो बेटियों के नाम बैंक में कुल ₹52,500 इस तरह जमा किए कि 18 वर्ष की होने पर उन्हें बराबर रकम मिले। यदि बैंक 10% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज देता है, तो जोसेफ ने अपनी छोटी बेटी के नाम कितनी रकम (₹ में) जमा की थी?

HINTS $P_1\left(1+\frac{R}{100}\right)^3 = P_2\left(1+\frac{R}{100}\right)^2$

$\Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{1}{\left(1+\frac{R}{100}\right)} = \frac{1}{\left(1+\frac{10}{100}\right)} \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{10}{11}$

दिया है, $P_1 + P_2$ = 21 इकाई → ₹52500

$\Rightarrow P_1 = \frac{52500}{21} \times 10$ = ₹25000

वैकल्पिक विधि

दर = 10% = $\frac{1}{10}$

छोटी बड़ी
10^1 + 11^1 (घात = आयु का अंतर)

(10 + 11 = 21) इकाई = ₹52500
छोटी (10 इकाई) = ₹25000

@apna channels
Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. 66,300 रुपये को A और B के बीच इस प्रकार विभाजित करें कि 8 वर्ष बाद A को प्राप्त होने वाली राशि, 10 वर्ष बाद B को प्राप्त होने वाली राशि के बराबर हो यदि चक्रवृद्धि ब्याज 10% प्रति वर्ष की दर से वार्षिक रूप से संयोजित होगा।

HINTS दर = 10% = $\frac{1}{10}$

A	B
11^2	10^2 (घात = आयु का अंतर)
121	100

121 + 100 (योग)

221 इकाई = ₹66300

A (121 इकाई) = ₹36300

B (100 इकाई) = ₹30000

किस्त

भुगतान की कुल राशि को नियमित रूप से दिया जाने वाला भाग ही किस्त कहलाता है

चक्रवृद्धि ब्याज की किस्त से संबंधित अवधारणाएँ को एक परिदृश्य (scenario) के माध्यम से समझते हैं।

दो किस्तों के लिए विधि:

दर = 10% = $\frac{1}{10}$

	P		I
प्रथम वर्ष →	$10_{\times 11}$	:	$11_{\times 11}$
द्वितीय वर्ष →	100	:	121
	210	:	242

32 इकाई = CI

Ex. ₹4,620 की राशि को दो बराबर वार्षिक किस्तों में चुकाया जाना है। यदि ब्याज 10% वार्षिक दर से संयोजित होता है, तो प्रत्येक किस्त की राशि (₹ में) कितनी है?

HINTS दर = 10% = $\frac{1}{10}$

P		I
$10_{\times 11}$	:	$11_{\times 11}$
100	:	121
210	:	242

210 ×22 → 4620

242 ×22 → **2662**

Ex. ऋण को दो बराबर वार्षिक किश्तों में चुकाया जाना है। यदि ब्याज दर 10% प्रति वर्ष है, जो वार्षिक रूप से संयोजित होती है और प्रत्येक किस्त ₹6,897 है, तो कुल ब्याज ज्ञात कीजिए।

HINTS दर = 10% = $\frac{1}{10}$

P		I
$10_{\times 11}$	:	$11_{\times 11}$
100	:	121 ×57 → ₹6897
210	:	242

CI = 32 इकाई → ₹1824

तीन किस्तों के लिए विधि:

दर = 10% = $\frac{1}{10}$

	P		I
प्रथम वर्ष →	$10_{\times 121}$	:	$11_{\times 121}$
द्वितीय वर्ष →	$100_{\times 11}$	:	$121_{\times 11}$
तृतीय वर्ष →	1000	:	1331
	3310	:	3993

683 इकाई = CI

Ex. एक मोबाइल फ़ोन ₹79,860 में नकद भुगतान पर या ₹60,000 नकद अग्रिम भुगतान और शेष राशि तीन बराबर वार्षिक किस्तों में चुकाने पर उपलब्ध है। यदि दुकानदार वार्षिक चक्रवृद्धि 10% की दर से ब्याज लेता है, तो प्रत्येक किस्त की राशि (₹ में) होगी:

HINTS दर = 10% = $\frac{1}{10}$

बकाया ऋण = 79860 − 60000 = ₹19860

P		I
$10_{\times 121}$	:	$11_{\times 121}$
$100_{\times 11}$	:	$121_{\times 11}$
1000	:	1331
3310	:	3993

3310 ×6 → 19860

3993 ×6 → **7986**

Ex. एक व्यक्ति ने एक निश्चित राशि उधार ली और पहले वर्ष के अंत में ₹4000 और दूसरे वर्ष के अंत में ₹7700 देकर इसे चुकाने का वचन दिया। यदि वार्षिक रूप से संयोजित चक्रवृद्धि ब्याज की दर 10% है, तो राशि (₹में) ज्ञात कीजिए।

HINTS $\left[(\text{राशि})\times\frac{110}{100}-4000\right]\times\frac{110}{100}-7700=0$

$\Rightarrow$ राशि $\times\frac{11}{10}-4000=7000$ $\Rightarrow$ राशि $\times\frac{11}{10}=11000$

$\Rightarrow$ राशि = ₹10000

Ex. अमित 4 वर्षों के लिए 10% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज पर ₹8,000 उधार लेता है। वह पहले वर्ष के अंत में ₹2,800 और दूसरे वर्ष के अंत में ₹2,600 चुकाता है। ऋण चुकाने के लिए, उसे 4 वर्षों के बाद कितनी राशि चुकानी होगी, जबकि ब्याज वार्षिक रूप से संयोजित होता है?

HINTS दिया गया है, मूलधन = ₹8000

प्रथम वर्ष के बाद बची राशि = 8000 × (1.1) − 2800 = ₹6000

द्वितीय वर्ष के बाद बची राशि = 6000 × (1.1) − 2600 = ₹4000

चौथे वर्ष के अंत में भुगतान की गई राशि = 4000 × (1.21) = ₹4840

वैकल्पिक विधि 2 वर्ष बाद शेष राशि

$=\left(8000\times\frac{11}{10}-2800\right)\times\frac{11}{10}-2600$

$=6000\times\frac{11}{10}-2600=4000$

चौथे वर्ष के अंत में भुगतान की गई राशि

$=4000\times\frac{11}{10}\times\frac{11}{10}=4840$

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

अध्याय 19

अनुपात और समानुपात

अनुपात

- यदि 'a' और 'b' एक ही प्रकार के हों तो $\frac{a}{b}$ अनुपात कहलाता है।
- 'a' और 'b' का अनुपात $\frac{a}{b}$ है और इसे a : b के रूप में लिखा जाता है और इसे "a अनुपात b" के रूप में पढ़ा जाता है, जहाँ 'a' को **'पूर्ववर्ती'** और 'b' को **'अनुवर्ती'/परिणामी** कहा जाता है।

☞ (i) यदि ad = bc, तब $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

(ii) यदि ad > bc, तब $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$.

(iii) यदि ad < bc, तब $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$.

(iv) यदि $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, तब

(a) $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

(b) $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

(c) $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

(d) $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

(e) $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

(f) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ के लिए

a = bk, c = dk (k विधि)

(g) निरंतर अनुपात के लिए, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k$

b = ck और a = bk

$a = (ck)k = ck^2$

मिश्रित अनुपात

यदि x : y और P : Q दो अनुपात हैं, तो Px : Qy को मिश्रित अनुपात या यौगिक अनुपात कहा जाता है।

वर्गानुपात

किसी निश्चित अनुपात के वर्ग को उसका वर्गानुपात कहते हैं।

$\frac{a}{b}$ का वर्गानुपात $= \frac{a^2}{b^2}$

घनानुपाती

किसी निश्चित अनुपात के घन को उसका घनानुपाती कहते हैं।

$\frac{a}{b}$ का घनानुपात $= \frac{a^3}{b^3}$

व्युत्क्रमानुपाती

किसी अनुपात के व्युत्क्रम को उसका व्युत्क्रमानुपाती कहते हैं। यदि अनुपात 'a : b' है, तो उसका व्युत्क्रम अनुपात 'b : a' होगा।

वर्गमूलानुपात

किसी निश्चित अनुपात के वर्गमूल को उसका वर्गमूलानुपात कहा जाता है।

$\frac{a}{b}$ का वर्गमूलानुपात $= \sqrt{\frac{a}{b}}$

घनमूलानुपाती

किसी निश्चित अनुपात के घनमूल को उसका घनमूलानुपाती कहा जाता है।

$\frac{a}{b}$ का घनमूलानुपात $= \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$

@apna_channels

Ex. 3 : 4 और 6 : 7 का मिश्रित अनुपात 36 : x है। 'x' ज्ञात कीजिए।

HINTS मिश्रित अनुपात $= \frac{3}{4} \times \frac{6}{7}$

$\Rightarrow \frac{36}{x} = \frac{3 \times 6}{4 \times 7} \Rightarrow x = 56$

Ex. 5 : 8 का व्युत्क्रम अनुपात ज्ञात कीजिए।

HINTS व्युत्क्रम अनुपात = 8 : 5

Ex. 14 : 17 का वर्गानुपात ज्ञात कीजिए।

HINTS वर्गानुपात $= \frac{(14)^2}{(17)^2} = \frac{196}{289}$

Ex. $\frac{1}{0.225} : \frac{1}{0.256}$ का वर्गमूलानुपात ज्ञात कीजिए।

HINTS $\frac{1}{0.225} : \frac{1}{0.256} = \frac{1000}{225} \times \frac{1000}{256} = 256 : 225$

$\therefore$ वर्गमूलानुपात $= \sqrt{256} : \sqrt{225} = 16 : 15$

Ex. $\frac{1}{0.49} : \frac{1}{0.343}$ का घनानुपाती ज्ञात कीजिए

HINTS $\frac{1}{0.49} : \frac{1}{0.343} = \frac{100}{49} : \frac{1000}{343} = 7 : 10$

$\therefore$ घनानुपाती $= (7)^3 : (10)^3 = 343 : 1000$

Ex. 512 : 729 का घनमूलानुपाती ज्ञात कीजिए।

HINTS घनमूलानुपाती $= \sqrt[3]{512} : \sqrt[3]{729} = 8 : 9$

(i) यदि हम किसी अनुपात को किसी निश्चित संख्या से गुणा करें तो अनुपात में कोई परिवर्तन नहीं होता।

$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{ak}{bk}$

(ii) यदि हम किसी अनुपात को किसी निश्चित संख्या से विभाजित करते हैं, तो अनुपात नहीं बदलता है $\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a}{k} \times \frac{k}{b}$

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

सरल अनुपात पर आधारित

Ex. यदि a : b = 2 : 3 और b : c = 6 : 8 है, तो a : b : c ज्ञात कीजिए।

HINTS

a	:	b	:	c
2	:	3	:	
		6	:	8
12	:	18	:	24
2	:	3	:	4

Ex. यदि a : b = 3 : 4, b : c = 2 : 3 तथा c : d = 5 : 6 है, तो a : b : c : d ज्ञात कीजिए।

HINTS

a	:	b	:	c	:	d
3	:	4	→	4	:	4
2	←	2	:	3	→	3
5	:	5	←	5	:	6
30	:	40	:	60	:	72
15	:	20	:	30	:	36

Ex. यदि P : Q = 3 : 4 और Q : R = 4 : 7 है, तो (P + Q) : (Q + R) : (R : P) का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS P : Q = 3 : 4

Q : R = 4 : 7

P : Q : R = 3 : 4 : 7

∴ (P + Q) : (Q + R) : (R : P) = 7 : 11 : 10

Ex. यदि a : (b + c) = 5 : 7, b : (c + a) = 7 : 9, तो c : (a + b) का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS $\frac{a}{b+c} = \frac{5_{\times 4}}{7_{\times 4}}$ कुल → $12_{\times 4}$

$\frac{b}{a+c} = \frac{7_{\times 3}}{9_{\times 3}}$ कुल → $16_{\times 3}$

∴ a = 20, b = 21 और a + c = 27 ⇒ c = 7

$\therefore \frac{c}{a+b} = \frac{7}{20+21} = \frac{7}{41}$

Ex. यदि $\frac{p}{q} = \frac{r}{s} = \frac{t}{u} = \frac{2}{5}$ है, तो (4p + 3r + 7t) : (4q + 3s + 7u) का मान क्या है?

HINTS

$\frac{p}{q} = \frac{r}{s} = \frac{t}{u} = \frac{2}{5}$

$\therefore \frac{4p+3r+7t}{4q+3s+7u} = \frac{2(4+3+7)}{5(4+3+7)} = \frac{2}{5}$ $\left\{\begin{matrix} \because p = r = t = 2 \\ \& \ q = s = u = 5 \end{matrix}\right\}$

Ex. तीन संख्याएँ $\frac{1}{2} : \frac{2}{3} : \frac{3}{4}$ के अनुपात में हैं। सबसे बड़ी और सबसे छोटी संख्या का अंतर 27 है। सबसे छोटी संख्या है:

HINTS

(2, 3, 4) का लघुत्तम समापवर्त्य = 12

I : II : III

6 : 8 : 9

अंतर 3 इकाई → 27

6 ×9 → 54

∴ सबसे छोटी संख्या = 54

Ex. A, B और C ₹10,500 की राशि को आपस में क्रमशः 5 : 7 : 9 के अनुपात में बाँटते हैं। यदि प्रत्येक को ₹500 अधिक मिलते हैं, तो A, B और C के पास मौजूद राशियों का अनुपात क्या होगा?

HINTS A : B : C

5 : 7 : 9 = 21 इकाई → ₹10500

1 इकाई → ₹500

∵ प्रत्येक को 500 रुपये अधिक मिलेंगे, इसलिए उनका नया अनुपात 1 से बढ़ जाएगा:

अभीष्ट अनुपात = 6 : 8 : 10 = 3 : 4 : 5

Ex. गलती से ₹702 को राम, रमेश और नरेश के बीच $\frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{1}{6}$ के अनुपात में विभाजित करने के बजाय, इसे 3 : 4 : 6 के अनुपात में विभाजित किया गया। सबसे अधिक लाभ किसे हुआ और कितना?

HINTS

	राम	:	रमेश	:	नरेश
गलती →	3	:	4	:	6
सही →	$\frac{1}{3}$	:	$\frac{1}{4}$	:	$\frac{1}{6}$
	4	:	3	:	2

स्पष्टतः नरेश को सबसे अधिक लाभ हुआ।

नरेश का वास्तविक हिस्सा = $\frac{2}{9} \times 702$ = ₹156

नरेश का गलत हिस्सा = $\frac{6}{13} \times 702$ = ₹324

∴ लाभ = 324 – 156 = ₹168

सिक्कों पर आधारित

Ex. एक बैग में 1 रुपया, 50 पैसे और 25 पैसे के सिक्कों 3 : 4 : 6 के अनुपात में हैं। यदि कुल राशि 143 रुपये है, तो 50 पैसे के सिक्कों की संख्या है:

HINTS

मूल्यवर्ग → ₹1 ₹0.50 ₹0.25

सिक्कों की संख्या → 3 : 4 : 6

कुल मूल्य → 3 2 1.5 = 6.5 इकाई

2 ×22 → 44; 6.5 ×22 → 143

∴ 50 पैसे के सिक्कों की संख्या = $\frac{44}{0.5}$ = 88

Ex. एक बैग में 5 रुपये, 10 रुपये और 20 रुपये के सिक्के हैं। बैग में सिक्कों की कुल संख्या 240 है। यदि 5 रुपये, 10 रुपये और 20 रुपये के सिक्कों की संख्या 2 : 3 : 5 के अनुपात में है, तो बैग में कुल कितनी राशि है?

HINTS

मूल्यवर्ग → ₹5 ₹10 ₹20

सिक्कों की संख्या → 2 : 3 : 5

कुल मूल्य → 10 : 30 : 100

जब 10 सिक्के हों, तो मूल्य = ₹140

जब 240 सिक्के हों, तो मूल्य = 14 × 240 = ₹3,360

∴ बैग में कुल धनराशि = ₹3,360

वैकल्पिक विधि

₹5 : ₹10 : ₹20

2 : 3 : 5 = 10 ×24 → 240

×24 ×24 ×24

48 : 72 : 120

∴ कुल राशि = (48 × 5) + (72 × 10) + (120 × 20)

= 240 + 720 + 2400 = ₹3,360

∴ बैग में कुल धनराशि = ₹3,360

@apna_channels
Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. अमन के पास ₹20 और ₹10 मूल्यवर्ग के कुछ नोट हैं, जिनकी कुल कीमत ₹390 है। यदि प्रत्येक प्रकार के नोटों की संख्या को आपस में बदल दिया जाए, तो नई राशि पहले से ₹90 कम हो जाती है। ₹20 मूल्यवर्ग के नोटों की संख्या ज्ञात कीजिए।

HINTS मूल्यवर्ग → ₹20 ₹10
नोटों की संख्या → x y

प्रश्नानुसार,

$20x + 10y = 390$ ...... (i)

$10x + 20y = 300$ ...... (ii)

समीकरण (i) और (ii) को जोड़ने पर,

$x + y = 23$ ...... (iii)

समीकरण (i) और (ii) को घटाने पर,

$x - y = 9$ ...... (iv)

समीकरण (iii) और (iv) से,

$x = 16$

∴ ₹20 मूल्यवर्ग के नोटों की संख्या = 16

जोड़ या घटाव के आधार पर

Ex. दो संख्याएँ 3 : 4 के अनुपात में हैं। उनमें से प्रत्येक में 30 जोड़ने पर अनुपात 9 : 10 हो जाता है। संख्याएँ हैं:

HINTS 3 : 4
9 : 10 } 6 इकाई → 30

1 इकाई → 5

∴ अभीष्ट संख्याएँ = 15, 20

Ex. तीन कक्षाओं में विद्यार्थियों की संख्या 3 : 4 : 5 के अनुपात में है। यदि प्रत्येक कक्षा में 20 विद्यार्थी बढ़ा दिए जाएँ, तो यह अनुपात 4 : 5 : 6 हो जाता है। इन कक्षाओं में विद्यार्थियों की मूल संख्या कितनी थी?

HINTS

	A	B	C
प्रारंभिक →	3	4	5
	↓+20	↓+20	↓+20
अंतिम →	4	5	6

1 इकाई → 20

12 इकाई → 12 × 20 = 240

∴ प्रारंभ में छात्रों की संख्या = 240

Ex. एक स्कूल में कक्षा 10 के तीन सेक्शन में छात्रों की संख्या 3: 5: 8 के अनुपात में है। यदि तीनों सेक्शन में क्रमशः 15, 30 और 15 और छात्रों को प्रवेश दिया जाता है, तो नया अनुपात 4: 7: 9 हो जाता है। नए प्रवेश से पहले छात्रों की कुल संख्या क्या है?

HINTS

सेक्शन →	A	B	C
	3	5	8 → 16 × 15 = 240
	↓+15	↓+30	↓+15
	4	7	9

आय और व्यय के आधार पर

Ex. A और B की मासिक आय का अनुपात 11:13 है और उनके व्यय का अनुपात 9:11 है। यदि वे दोनों प्रति माह ₹4000 बचाने में कामयाब हो जाते हैं, तो उनकी आय में अंतर (₹ में) ज्ञात कीजिए।

HINTS

	A	B
आय →	11	13
व्यय →	9	11
बचत →	4000	4000

∵ (121 – 117) इकाई → ₹44,000 – ₹36,000

4 इकाई → ₹8,000

2 इकाई → ₹4,000

∴ अभीष्ट अंतर = ₹4,000

Ex. A और B की आय 5 : 3 के अनुपात में है। A, B और C के व्यय 8:5:2 के अनुपात में हैं। यदि C 2000 रुपये खर्च करता है और B 700 रुपये बचाता है, तो A कितनी राशि बचाता है?

HINTS

	A	B	C
व्यय →	8	5	2
	↓×1000	↓×1000	↓×1000
	₹8000	₹5000	₹2000

B की आय = ₹5,000 + ₹700 = ₹5,700

A की आय = $\frac{5700}{3} \times 5$ = ₹9,500

∴ A की बचत = ₹9,500 – ₹8,000 = ₹1,500

Ex. A, B और C की पिछले वर्ष की आय का अनुपात 3 : 4 : 5 है, जबकि उनकी पिछले वर्ष की आय का वर्तमान वर्ष की आय से अनुपात क्रमशः 4 : 5, 2 : 3 और 3 : 4 है। यदि उनकी कुल वर्तमान वर्ष की आय ₹98,500 है, तो (B + C) की वर्तमान आय ज्ञात कीजिए।

HINTS A, B और C की पिछले वर्ष की आय का अनुपात = 3 : 4 : 5

A, B और C की वर्तमान वर्ष की आय का अनुपात

$= \frac{3\times5}{4} : \frac{3\times4}{2} : \frac{5\times4}{3} = \frac{15}{4} : 6 : \frac{20}{3}$

$\left(\frac{15}{4}+6+\frac{20}{3}\right)$ इकाई → ₹98,500

$\frac{197}{12}$ इकाई → ₹98,500 ⇒ 1 इकाई → ₹6,000

$\left(6+\frac{20}{3}\right)$ इकाई = $\frac{38}{3}$ इकाई → $\frac{38}{3} \times 6000$ = ₹76,000

∴ (B + C) की वर्तमान आय = ₹76,000

Ex. एक व्यक्ति के व्यय और बचत का अनुपात 4:3 है। उसकी बचत उसकी आय के $\frac{1}{5}$ भाग से बढ़ जाती है और आय वही रहती है। उसके व्यय और बचत का नया अनुपात क्या है?

HINTS

	व्यय	बचत	आय
प्रारंभिक →	4	3	7
	↓	↓	↓
अंतिम →	2.6	$3 + \frac{7}{5} = 4.4$	7

∴ व्यय और बचत का नया अनुपात = 2.6 : 4.4 = 13 : 22

@apna_channels
Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. P और Q का कुल वेतन ₹9,60,000 है। P और Q अपने व्यक्तिगत वेतन का क्रमशः 64% और 44% बचाते हैं। यदि P का व्यय Q के व्यय का 1.5 गुना है, तो P के वेतन का Q के वेतन से अनुपात क्या है?

HINTS

	आय	व्यय	बचत
P →	$100x$	$36x$	$64x$
Q →	$100y$	$56y$	$44y$

प्रश्नानुसार,

$\frac{36x}{56y} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{7}{3}$

$\therefore x : y = 7 : 3$

आयु के आधार पर

Ex. दो मित्रों की आयु का अनुपात 4:3 है जो 4 वर्ष बाद 6:5 हो जाएगा। अब से 22 वर्ष बाद उनकी आयु का योग (वर्षों में) क्या होगा?

HINTS वर्तमान आयु → 4 : 3

4 साल बाद → 6 : 5

अंतर) 2 इकाई → 4 वर्ष

1 इकाई → 2 वर्ष

पहले मित्र की वर्तमान आयु = 4 × 2 = 8 वर्ष

दूसरे मित्र की वर्तमान आयु = 3 × 2 = 6 वर्ष

22 वर्ष बाद उनकी आयु का योग = 8 + 22 + 6 + 22 = 58 वर्ष

Ex. एक माँ की वर्तमान आयु का बेटी की आयु से अनुपात 7:1 है। पांच वर्ष बाद यह अनुपात 4:1 हो जाएगा। उनकी वर्तमान आयु में अंतर (वर्षों में) क्या है?

HINTS

	माँ		बेटी		माँ		बेटी
वर्तमान में →	7	:	1	=	7	:	1
5 साल बाद →	$4_{\times 2}$	:	$1_{\times 2}$		8	:	2

∵ 1 इकाई → 5 वर्ष

6 इकाई → 30 वर्ष

∴ उनकी वर्तमान आयु में अंतर = 30 वर्ष

"दो व्यक्तियों की आयु में अन्तर सदैव समान रहेगा।"

Ex. आठ वर्ष पहले, A और B की आयु का अनुपात 5:4 था। उनकी वर्तमान आयु का अनुपात 6 : 5 है। अब से 7 वर्ष बाद A और B की आयु का योग (वर्षों में) क्या होगा?

HINTS

	A		B
8 वर्ष पहले →	5	:	4
वर्तमान में →	6	:	5

अंतर) 1 इकाई → 8 वर्ष

A की वर्तमान आयु = 6 × 8 = 48 वर्ष

B की वर्तमान आयु = 5 × 8 = 40 वर्ष

∴ अब से 7 वर्ष बाद A और B की आयु का योग

= (40 + 48) + 2 × 7 = 102 वर्ष

Ex. 5 वर्ष पहले, A की आयु का B की आयु से अनुपात 4 : 5 था। पांच वर्ष बाद, A की आयु का B की आयु से अनुपात 6 : 7 होगा। यदि वर्तमान में C, B से 10 वर्ष छोटा है, तो A की वर्तमान आयु का C की आयु से अनुपात क्या होगा?

HINTS

	A		B
5 वर्ष पहले →	4	:	5
5 वर्ष बाद →	6	:	7

अंतर) 2 इकाई → 10 वर्ष

1 इकाई → 5 वर्ष

A की वर्तमान आयु = 6 × 5 – 5 = 25 वर्ष

B की वर्तमान आयु = 7 × 5 – 5 = 30 वर्ष

C की वर्तमान आयु = B की वर्तमान आयु – 10 वर्ष

= 30 – 10 = 20 वर्ष

∴ A और C की वर्तमान आयु का अनुपात = 25 : 20 = 5 : 4

Ex. 8 वर्ष पहले A और B की आयु का अनुपात 5 : 7 था। अब से 8 वर्ष बाद उनकी आयु का अनुपात 9 : 11 होगा। यदि C की वर्तमान आयु B की तुलना में 13 वर्ष कम है और D की वर्तमान आयु A की तुलना में 8 वर्ष कम है, तो C और D की वर्तमान आयु का वर्षों में योग है:

HINTS

	A		B
8 वर्ष पहले →	5	:	7
अब से 8 वर्ष बाद →	9	:	11

अंतर) 4 इकाई → 16 वर्ष

1 इकाई → 4 वर्ष

A की वर्तमान आयु = 5 × 4 + 8 = 28 वर्ष

B की वर्तमान आयु = 7 × 4 + 8 = 36 वर्ष

C की वर्तमान आयु = B की वर्तमान आयु – 13 = 23 वर्ष

D की वर्तमान आयु = A की वर्तमान आयु – 8 = 20 वर्ष

∴ C और D की वर्तमान आयु का योग = 23 + 20 = 43 वर्ष

Ex. एक परिवार में पति, पत्नी और बेटे की कुल आयु 90 वर्ष है। पति सबसे बड़ा है। पति और पत्नी की आयु में अंतर उनके बेटे की आयु का $\frac{1}{3}$ है। 10 वर्ष बाद, बेटे की आयु उसके पिता की आयु की आधी होगी। उसकी माँ की वर्तमान आयु (वर्षों में) क्या है?

HINTS दिया है,

$H + W + S = 90$ ...... (i)

$H - W = \frac{1}{3}S$ ...... (ii)

भी, $S + 10 = \frac{1}{2}(H + 10)$

$\Rightarrow H = 2S + 10$ ...... (iii)

समीकरण (ii) और (iii) से,

$6S + 30 - 3W = S \Rightarrow 3W = 5S + 30$

$\Rightarrow W = \frac{5S}{3} + 10$ ...... (iv)

समीकरण (iii) और समीकरण (iv) को समीकरण (i) में रखें,

$\Rightarrow (2S + 10) + \left(\frac{5S}{3} + 10\right) + S = 90$

$\Rightarrow 14S = 210 \Rightarrow S = 15$

$\therefore W = 5 \times \frac{15}{3} + 10 = 35$ वर्ष

Ex. अनिल और बीना दोस्त हैं और उनकी उम्र में 5 साल का अंतर है। अनिल के पिता दिनेश की उम्र अनिल से तीन गुनी है और बीना की उम्र अपनी बहन चारू से दोगुनी है। दिनेश और चारू की उम्र में 45 साल का अंतर है। यदि बीना अनिल से बड़ी है, तो दिनेश और चारू दोनों की वर्तमान उम्र का योग ज्ञात कीजिए।

HINTS माना, अनिल की वर्तमान आयु = x

	दिनेश	अनिल	बीना	चारु
	↓	↓	↓	↓
आयु →	$3x$	x	$x+5$	$\frac{x+5}{2}$

प्रश्नानुसार,

$3x - \frac{x+5}{2} = 45$

$\Rightarrow 6x - x - 5 = 90 \Rightarrow x = 19$

∴ दिनेश और चारु दोनों की वर्तमान आयु का योग

$= 3x + \frac{x+5}{2} = \frac{7x+5}{2} = \frac{7\times19+5}{2} = \frac{138}{2} = 69$ वर्ष

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

समानुपात

जब दो अनुपात बराबर होते हैं, अर्थात, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, तो a, b, c, d को समानुपात में कहा जाता है और a, b, c और d को क्रमशः पहला, दूसरा, तीसरा और चौथा अनुपात कहा जाता है।

जब 3 संख्याएँ दी गई हों

$x : a :: b : c$

प्रथम समानुपात	द्वितीय समानुपात	तृतीय समानुपात	चतुर्थ समानुपात
$x : a :: b : c \Rightarrow x = \frac{ab}{c}$	$a : x :: b : c \Rightarrow x = \frac{ac}{b}$	$a : b :: x : c \Rightarrow x = \frac{ac}{b}$	$a : b :: c : x \Rightarrow x = \frac{bc}{a}$

Ex. तीन संख्याओं 6, 12 और 24 का प्रथम समानुपातिक क्या है?

HINTS प्रथम समानुपातिक = $\frac{6\times12}{24}=3$

Ex. तीन संख्याओं 28, 4 और 5 का द्वितीय समानुपातिक क्या है?

HINTS द्वितीय समानुपातिक = $\frac{28\times5}{4}=35$

Ex. तीन संख्याओं 2, 3 और 15 का तृतीय समानुपातिक क्या है?

HINTS तृतीय समानुपातिक = $\frac{2\times15}{3}=10$

Ex. 12, 14 और 24 का चतुर्थ समानुपातिक है:

HINTS चतुर्थ समानुपातिक = $\frac{14\times24}{12}=28$

जब 2 संख्याएँ दी गई हों

$x : a :: a : b$

प्रथम समानुपात	माध्य समानुपात	तृतीय समानुपात
$x : a :: a : b \Rightarrow x = \frac{a^2}{b}$	$a : x :: x : b \Rightarrow x = \sqrt{ab}$	$a : b :: b : x \Rightarrow x = \frac{b^2}{a}$

Ex. दो संख्याओं 3 और 5 का प्रथम समानुपातिक क्या है?

HINTS प्रथम समानुपातिक = $\frac{(3)^2}{5}=\frac{9}{5}$

Ex. 3 और 27 का माध्य अनुपात ज्ञात कीजिए।

HINTS माध्य अनुपात = $\sqrt{3\times27}=9$

Ex. 81 और 27 का तृतीयानुपाती है:

HINTS तृतीयानुपाती = $\frac{27\times27}{81}=9$

जोड़ के बाद समानुपातिक

मान लीजिए, 'x' एक संख्या है जिसे a, b, c और d में जोड़कर उन्हें समानुपातिक बनाया जाता है, तो:

$$x=\frac{bc-ad}{(a+d)-(b+c)}$$

Ex. जब 2, 3, 30 और 35 में से प्रत्येक में 'x' जोड़ा जाता है, तो इस क्रम में प्राप्त संख्याएँ समानुपात में होती हैं। $(x + 7)$ और $(x - 2)$ के बीच माध्य समानुपात क्या है?

HINTS

$x=\frac{bc-ad}{(a+d)-(b+c)}=\frac{3\times30-2\times35}{(2+35)-(3+30)}$

$=\frac{90-70}{37-33}=\frac{20}{4}=5$

$\therefore$ $(x + 7)$ और $(x - 2)$ का माध्य समानुपातिक = $\sqrt{12\times3}$

$=\sqrt{36}=6$

वैकल्पिक विधि

$\frac{2+x}{3+x}=\frac{30+x}{35+x}$

माना, $x = 5$

$\frac{2+5}{3+5}=\frac{30+5}{35+5}\Rightarrow\frac{7}{8}=\frac{35}{40}\Rightarrow\frac{7}{8}=\frac{7}{8}$ (संतुष्ट)

$\therefore$ $(x + 7)$ और $(x - 2)$ का माध्य समानुपातिक = $\sqrt{12\times3}$

$=\sqrt{36}=6$

वैकल्पिक विधि

अंतर = 1 $\frac{2+x}{3+x}=\frac{30+x}{35+x}$ अंतर = 5

$\Rightarrow 5\times(2+x)=1\times(30+x)$

$\Rightarrow 10+5x=30+x\Rightarrow 4x=20\Rightarrow x=5$

$\therefore$ $(x + 7)$ और $(x - 2)$ का माध्य समानुपातिक = $\sqrt{12\times3}$

$=\sqrt{36}=6$

Ex. जब 7, 11, 18 और 23 में से प्रत्येक में 'x' जोड़ा जाता है, तो प्राप्त संख्याएँ समानुपात में होती हैं। $(x - 1)$ और $(2x - 10)$ के बीच माध्य समानुपात क्या है?

HINTS

$x=\frac{11\times18-7\times23}{(7+23)-(11+18)}=\frac{11\times18-7\times23}{(7+23)-(11+18)}$

$=\frac{198-161}{30-29}=37$

$\therefore$ $(x - 1)$ और $(2x - 10)$ के बीच मध्य आनुपातिक

$=\sqrt{(37-1)\times(2\times37-10)}=\sqrt{36\times64}=6\times8=48$

@apna_channels
Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

वैकल्पिक विधि

अंतर = 4 $\left(\dfrac{7+x}{11+x} = \dfrac{18+x}{23+x}\right)$ अंतर = 5

$\Rightarrow 5(7+x) = 4(18+x) \Rightarrow 35 + 5x = 72 + 4x \Rightarrow x = 37$

$\therefore$ $(x-1)$ और $(2x-10)$ के बीच मध्य आनुपातिक

$= \sqrt{(37-1)\times(2\times37-10)} = \sqrt{36\times64} = 6\times8 = 48$

वैकल्पिक विधि

11 (ऊपर), 12 (नीचे)

अंतर = 4 $\left(\dfrac{7}{11} = \dfrac{18}{23}\right)$ अंतर = 5 $\quad \dfrac{11}{12}$: $\times4 \rightarrow 44$, $1 \rightarrow 4$, $\times4 \rightarrow 48$ $\quad 44 - 7 = 37$ (अंतर)

$\therefore$ $(x-1)$ और $(2x-10)$ के बीच मध्य आनुपातिक

$= \sqrt{(37-1)\times(2\times37-10)} = \sqrt{36\times64} = 6\times8 = 48$

घटाव के बाद समानुपात

मान लीजिए, 'x' एक संख्या है जिसे a, b, c और d से घटाकर उन्हें समानुपातिक बनाया जाता है, तो:

$$x = \frac{ad-bc}{(a+d)-(b+c)}$$

Ex. यदि 24, 40, 33 और 57 में से प्रत्येक में से 'x' घटाया जाए, तो प्राप्त संख्याएँ समानुपात में होंगी। $(5x+12)$ का $(4x+15)$ से अनुपात क्या है?

HINTS $x = \dfrac{ad-bc}{(a+d)-(b+c)} = \dfrac{24\times57-40\times33}{(24+57)-(40+33)}$

$= \dfrac{1368-1320}{81-73} = \dfrac{48}{8} = 6$

$\therefore \dfrac{5x+12}{4x+15} = \dfrac{5\times6+12}{4\times6+15} = \dfrac{42}{39} = \dfrac{14}{13}$

वैकल्पिक विधि

अंतर = 16 = 2 $\left(\dfrac{24-x}{40-x} = \dfrac{33-x}{57-x}\right)$ अंतर = 24 = 3

$\Rightarrow 3(24-x) = 2(33-x) \Rightarrow 72-3x = 66-2x \Rightarrow x = 6$

$\therefore \dfrac{5x+12}{4x+15} = \dfrac{5\times6+12}{4\times6+15} = \dfrac{42}{39} = \dfrac{14}{13}$

वैकल्पिक विधि

$\dfrac{24-x}{40-x} = \dfrac{33-x}{57-x} \Rightarrow$ माना, $x = 6$

$\dfrac{24-6}{40-6} = \dfrac{33-6}{57-6} \Rightarrow \dfrac{18}{34} = \dfrac{27}{51} \Rightarrow \dfrac{9}{17} = \dfrac{9}{17}$ (संतुष्ट)

$\therefore \dfrac{5x+12}{4x+15} = \dfrac{5\times6+12}{4\times6+15} = \dfrac{42}{39} = \dfrac{14}{13}$

वैकल्पिक विधि

9 (ऊपर), 17 (नीचे)

16 $\left(\dfrac{24}{40}, \dfrac{33}{57}\right)$ 24 $\quad \dfrac{9}{17}$: $\times2 \rightarrow 18$, $8 \rightarrow 16$, $\times2 \rightarrow 34$ $\quad 24 - 18$ (अंतर = 6)

$\therefore \dfrac{5x+12}{4x+15} = \dfrac{5\times6+12}{4\times6+15} = \dfrac{42}{39} = \dfrac{14}{13}$

Ex. जब 24, 33, 20 और 26 में से प्रत्येक में से 'x' घटाया जाता है, तो इस क्रम में प्राप्त संख्याएँ समानुपात में होती हैं। $(2x+1)$ और $(5x-11)$ के बीच माध्य समानुपात क्या है?

HINTS $x = \dfrac{ad-bc}{(a+d)-(b+c)} = \dfrac{24\times26-33\times20}{(24+26)-(33+20)}$

$= \dfrac{624-660}{50-53} = \dfrac{36}{3} = 12$

$\therefore$ $(2x+1)$ और $(5x-11)$ के बीच माध्य समानुपात

$= \sqrt{25\times49} = 5\times7 = 35$

वैकल्पिक विधि

अंतर = 9 = 3 $\left(\dfrac{24-x}{33-x} = \dfrac{20-x}{26-x}\right)$ अंतर = 6 = 2

$\Rightarrow (24-x)\times2 = (20-x)\times3$

$\Rightarrow 48-2x = 60-3x \Rightarrow x = 12$

$\therefore$ $(2x+1)$ और $(5x-11)$ के बीच मध्यानुपात

$= \sqrt{25\times49} = 5\times7 = 35$

वैकल्पिक विधि

4 (ऊपर), 7 (नीचे)

9 $\left(\dfrac{24}{33}, \dfrac{20}{26}\right)$ 6 $\quad \dfrac{4}{7}$: $\times3 \rightarrow 12$, $3_{\times3} \rightarrow 9$, $\times3 \rightarrow 21$ $\quad 24 - 12$ (अंतर = 12)

$\therefore$ $(2x+1)$ और $(5x-11)$ के बीच मध्यानुपात

$= \sqrt{25\times49} = 5\times7 = 35$

योगान्तरानुपात का नियम

माना, $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$

यदि हम दोनों पक्षों में 1 जोड़ दें, तो:

$\dfrac{a}{b} + 1 = \dfrac{c}{d} + 1$

$\Rightarrow \dfrac{a+b}{b} = \dfrac{c+d}{d}$ .... (i)

यदि हम दोनों पक्षों से 1 घटा दें, तो:

$\dfrac{a}{b} - 1 = \dfrac{c}{d} - 1$

$\Rightarrow \dfrac{a-b}{b} = \dfrac{c-d}{d}$ .... (ii)

समीकरण (i) को (ii) से भाग दें,

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

Ex. यदि $\dfrac{5x+3y}{5x-3y} = \dfrac{7}{3}$ है, तो $x : y$ ज्ञात कीजिए।

HINTS $\dfrac{5x+3y}{5x-3y} = \dfrac{7}{3}$

योगान्तरानुपात के नियम का उपयोग करते हुए,

$\dfrac{5x+3y+5x-3y}{5x+3y-5x+3y} = \dfrac{7+3}{7-3}$

$\Rightarrow \dfrac{10x}{6y} = \dfrac{10}{4} \Rightarrow \dfrac{5x}{3y} = \dfrac{5}{2}$

$\therefore x : y = 3 : 2$

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

समानुपाती और व्युत्क्रमानुपाती

समानुपातिक: यदि $x = ky$, जहाँ k एक स्थिरांक है, तो x, y के समानुपातिक है।

$$x \propto y$$

व्युत्क्रमानुपाती: यदि $x = \frac{k}{y}$, जहाँ k एक स्थिरांक है, तो x, y के व्युत्क्रमानुपाती है।

$$x \propto \frac{1}{y}$$

Ex. A, B के समानुपाती है। यदि A = 52, B = 91 है। जब B = 126 है तो A का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS A, B के समानुपाती है ($x \propto y$)

$$\Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \Rightarrow \frac{52}{A_2} = \frac{91}{126} \Rightarrow A_2 = 72$$

Ex. M, N के व्युत्क्रमानुपाती है। यदि M, 20 है, तो N, 70 है। यदि N = 50 है, तो M का मान क्या है?

HINTS $M \propto \frac{1}{N}$

$$\Rightarrow M_1N_1 = M_2N_2 \Rightarrow 20 \times 70 = M_2 \times 50 \Rightarrow M_2 = 28$$

Ex. 'A', 'B' के धनात्मक वर्गमूल के समानुपाती होता है, और 'C' के घन के व्युत्क्रमानुपाती होता है। यदि A = 15 है, जब B = 27 और C = 2 है, तो B ज्ञात कीजिए जब A = 9 और C = 2 है।

HINTS $A \propto \frac{\sqrt{B}}{C^3}$

$$\Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{\sqrt{B_1}}{\sqrt{B_2}} \times \frac{C_2^3}{C_1^3} \Rightarrow \frac{15}{9} = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{B_2}} \times \frac{2^3}{2^3}$$

$$\Rightarrow \frac{27}{B_2} = \left(\frac{15}{9}\right)^2 = \frac{25}{9} \Rightarrow B_2 = \frac{243}{25}$$

Ex. एक हीरे की कीमत उसके भार के वर्ग के समानुपाती है। एक बार यह हीरा 4 : 3 : 2 : 1 के अनुपात में भार वाले चार टुकड़ों में टूट गया। जब टुकड़ों को बेचा गया, तो व्यापारी को पूरे हीरे की कीमत से ₹63,000 कम मिले। हीरे की मूल कीमत ज्ञात कीजिए।

HINTS लागत ∝ (वजन)²

पूरे हीरे की कीमत = k × (10)² = 100k

चार टुकड़ों की कीमत = (16 + 9 + 4 + 1)k = 30k

प्रश्नानुसार,

100k – 30k = ₹63,000

⇒ k = ₹900

∴ हीरे का मूल मूल्य = 900 × 100 = ₹90,000

Ex. एक पेड़ की उम्र उसके तने में मौजूद वलयों की संख्या पर निर्भर करती है। ऐसे पेड़ का मूल्य उसकी उम्र के समानुपाती होता है। यदि 40 वलयों और 50 वर्ष की आयु वाले पेड़ का मूल्य ₹50,000 है, तो 30 वलयों वाले पेड़ की आयु ______ वर्ष है और उसका मूल्य ₹ ______ है।

HINTS आयु ∝ छल्लों की संख्या

पेड़ का मान ∝ आयु

प्रश्नानुसार,

$$\frac{40}{30} = \frac{50}{A} = \frac{50000}{V}$$

$$\therefore A = \frac{30 \times 50}{40} = 37.5 \text{ वर्ष}$$

और

$$V = \frac{37.5 \times 50000}{50} = ₹37,500$$

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

अध्याय 20

साझेदारी

साझेदारी दो या दो से अधिक व्यक्तियों के बीच एक कानूनी संबंध है जो एक साथ मिलकर व्यवसाय चलाने तथा उसके लाभ-हानि को साझा करने के लिए सहमत होते हैं।

- **सरल साझेदारी:** यदि सभी साझेदार अलग-अलग समय के लिए समान पूंजी या एक ही समय के लिए अलग-अलग पूंजी निवेश करते हैं तो उसे सरल साझेदारी कहा जाता है।
- **मिश्रित साझेदारी:** यदि सभी साझेदार अलग-अलग समयावधि के लिए अलग-अलग पूंजी निवेश करते हैं।

साझेदार के प्रकार

- सक्रिय साझेदार
- निष्क्रिय साझेदार

- **सक्रिय साझेदार:** यह धन का निवेश करने के साथ-साथ व्यावसायिक गतिविधियों में भी भाग लेता है, जिसके लिए उसे लाभ से वेतन दिया जाता है।
- **निष्क्रिय साझेदार:** जो केवल धन निवेश करते हैं और व्यावसायिक गतिविधियों में भाग नहीं लेते हैं।

मूलभूत पद	
I	निवेश
P	लाभ
C	पूंजी
T	समय

लाभ, लागत और समय के बीच संबंध

(i) लाभ = लागत × समय

Ex. X, Y और Z ने एक व्यवसाय में क्रमशः ₹4,000, ₹6,000 और ₹8,000 निवेश किए। उन्होंने क्रमशः 3, 2 और 4 वर्षों के लिए धन का निवेश किया। यदि कुल लाभ ₹56,000 है, तो लाभ में Y का हिस्सा क्या है?

HINTS

	X		Y		Z	
निवेश →	4000	:	6000	:	8000	
समय →	3	:	2	:	4	
लाभ →	12	:	12	:	32	
	3	:	3	:	8	= 14

3 ×4000 → ₹12000; 14 ×4000 → ₹56000

(ii) निवेश = $\frac{\text{लाभ}}{\text{समय}}$

Ex. तीन साझेदारों ने एक व्यवसाय में लाभ को 8:7:5 के अनुपात में साझा किया। उन्होंने अपनी पूंजी क्रमशः 7 महीने, 8 महीने और 14 महीने के लिए निवेश की। उनकी पूंजी का अनुपात क्या था,

HINTS

	A	:	B	:	C
लाभ →	8	:	7	:	5
समय →	7	:	8	:	14

निवेश → $\left(\frac{8}{7} : \frac{7}{8} : \frac{5}{14}\right) \times 56$

= 64 : 49 : 20

(iii) समय = $\frac{\text{लाभ}}{\text{निवेश}}$

Ex. किसी व्यवसाय में A और B द्वारा किए गए निवेश का अनुपात 14 : 15 है तथा वर्ष के अंत में उनके लाभ का अनुपात क्रमशः 2 : 5 है। यदि A ने 3 महीने के लिए धन का निवेश किया, तो B ने कितने समय (महीनों में) के लिए अपना धन निवेश किया?

HINTS

	A	:	B
निवेश →	14	:	15
समय →	3	:	x
लाभ →	2	:	5

$\frac{3}{x} = \frac{2}{14} \times \frac{15}{5} \Rightarrow x = 7$ महीने

जब कोई शामिल होता है या छोड़ के जाता है।

Ex. A और B एक कंपनी में क्रमशः ₹25,000 और ₹50,000 के साथ एक वर्ष के लिए साझेदारी करते हैं। 7 महीने बाद, C उनके साथ ₹30,000 के साथ साझेदारी करता है और 9 महीने बाद A अपनी साझेदारी वापस ले लेता है। वर्ष के अंत में ₹3,900 का कुल लाभ मानते हुए, लाभ में C का हिस्सा क्या होगा?

HINTS निवेश × समय = लाभ

	A	:	B	:	C	
निवेश →	5	:	10	:	6	
समय →	9	:	12	:	5	
लाभ →	45	:	120	:	30	
	3	:	8	:	2	= 13

13 ×300 → ₹3900

C का हिस्सा = 2 × 300 = ₹600

Ex. A, B और C ने क्रमशः ₹100000, ₹140000 और ₹200000 के निवेश के साथ एक व्यवसाय शुरू किया। 3 महीने बाद, C ने व्यवसाय छोड़ दिया। C के व्यवसाय छोड़ने के 7 महीने बाद, B ने भी व्यवसाय छोड़ दिया। B और C अपने निवेश को अपने साथ ले गए। वर्ष के अंत में, C को लाभ का अपना हिस्सा ₹1155 के रूप में प्राप्त हुआ। A और B के लाभ का कुल हिस्सा क्या है?

HINTS

	A	:	B	:	C
निवेश →	10	:	14	:	20
समय →	12	:	10	:	3
लाभ →	120	:	140	:	60
	6	:	7	:	3

योग 13 ×385 → 5005; 3 ×385 → 1155

@apna_channels
Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

पूंजी में वृद्धि/कमी

Ex. तीन साझेदारों X, Y और Z ने क्रमशः ₹40,000, ₹38,000, ₹30,000 का निवेश करके अपना व्यवसाय शुरू किया। 6 महीने के बाद, X और Z ने क्रमशः ₹20,000 और ₹15,000 का अतिरिक्त निवेश किया, जबकि Y ने ₹8,000 निकाल लिए। वर्ष के अंत में अर्जित ₹38,880 के कुल लाभ में Y का हिस्सा (₹ में) ज्ञात कीजिए।

HINTS X, Y और Z ने क्रमशः ₹40,000, ₹38,000 और ₹30,000 का निवेश करके अपना व्यवसाय शुरू किया।

	X	Y	Z
प्रथम 6 महीने के लिए	40,000 :	38,000 :	30,000
अगले 6 महीनो के लिए	60,000 :	30,000 :	45,000
लाभ	100 :	68 :	75

Y का हिस्सा = $\frac{38880}{243} \times 68 = 10880$

वैकल्पिक विधि

X Y Z

निवेश → $40_{\times 6}$: $38_{\times 6}$: $30_{\times 6}$

→ $60_{\times 6}$: $30_{\times 6}$: $45_{\times 6}$

600 : 408 : 450

लाभ → 100 : 68 : 75 = 243

↓×160 ↓×160

10880 38880

Ex. A, B और C ने 2 : 3 : 5 के अनुपात में अपनी पूंजी के साथ एक व्यवसाय शुरू किया। A ने 4 महीने बाद अपनी पूंजी में 50% की वृद्धि की, B ने 6 महीने बाद अपनी पूंजी में $33\frac{1}{3}\%$ की वृद्धि की और C ने व्यवसाय की शुरुआत से 8 महीने बाद अपनी पूंजी का 50% निकाल लिया। यदि एक वर्ष के अंत में कुल लाभ ₹86,800 था, तो लाभ में A और C के शेयरों के बीच का अंतर था:

HINTS

A : B : C

$200 \times 4 + 300 \times 8 : 300 \times 6 + 400 \times 6 : 500 \times 8 + 250 \times 4$

3200 : 4200 : 5000

16 : 21 : 25 = 62

↓×1400

86800

अंतर

9 इकाई = 12600

∴ A और C के लाभ के बीच अंतर = ₹12600

दान/कर पर आधारित

Ex. मयूर और अहम 2:3 के अनुपात में निवेश करके साझेदारी में प्रवेश करते हैं। कुल लाभ का 10% दान में जाता है। यदि अहम का हिस्सा ₹4,860 है, तो अर्जित कुल लाभ (₹ में) क्या है?

HINTS

मयूर अहम

निवेश → 2 : 3

लाभ → 2 : 3

\+

5 इकाई ↓×1620

×1620↓ 4860

₹8100

कुल लाभ = $\frac{8100}{90} \times 100 = ₹9000$

वितरण के आधार पर

Ex. A और B ने ₹30,000 और ₹20,000 का निवेश किया और कुल लाभका 80% उनके बीच समान रूप से वितरित किया गया। शेष लाभ निवेश अनुपात के अनुसार वितरित किया गया। A और B के शेयरों के बीच का अंतर ₹4000 है। कुल लाभ ज्ञात करें और A और B का हिस्सा ज्ञात करें?

HINTS

A और B के निवेश का अनुपात = 3:2

माना कुल लाभ = 100 इकाई

A का हिस्सा = 40 + 12 = 52 इकाई

B का हिस्सा = 40 + 8 = 48 इकाई

(52 – 48) = 4 इकाई = ₹4000

∴ 1 इकाई = ₹1000

कुल लाभ = 100 × 1000 = ₹1,00,000

A का हिस्सा (52 इकाई) = ₹52,000

B का हिस्सा (48 इकाई) = ₹48,000

100

80 20

A B A B

40 : 40 12 : 8

Ex. केशव, सुरजीत और थॉमस ने 2:3:4 के अनुपात में निवेश के साथ एक व्यवसाय शुरू किया। उनके निवेश की अवधि का अनुपात 5:6:9 है। लाभ का 20% कार्यालय के किराए और रखरखाव पर खर्च किया गया। शेष लाभ को आपस में बांट लिया गया। यदि केशव और सुरजीत के लाभ के हिस्सों में अंतर ₹7264 है, तो कुल लाभ (₹ में) कितना है?

HINTS

लाभ = निवेश × समय

केशव सुरजीत थॉमस

निवेश → 2 : 3 : 4

समय → 5 : 6 : 9

लाभ → 5 : 9 : 18 = 32 इकाई

लाभ का 80% उनके संबंधित लाभ अनुपात में वितरित किया जाता है।

तब, केशव और सुरजीत के लाभ के बीच अंतर = $\frac{(9-5)\times 80}{100}$

= 3.2 इकाई

3.2 इकाई → ₹7264

32 इकाई → ₹72640

वैकल्पिक विधि

केशव सुरजीत थॉमस

निवेश → 2 : 3 : 4

समय → 5 : 6 : 9

लाभ → 5 : 9 : 18 = 32 इकाई

केशव और सुरजीत के लाभ में अंतर = 7264

4 इकाई = 7264

32 इकाई = $\frac{7264}{4} \times 32 = 58112$ जो कि लाभ के 80% के बराबर है।

कुल लाभ = $58112 \times \frac{100}{80}$

= ₹72640

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

प्रबंधन पर आधारित

Ex. नासिर एक व्यवसाय में सक्रिय भागीदार है और रोहित निष्क्रिय भागीदार है, नासिर ₹5,000 लगाता है और रोहित ₹6,000 लगाता है। नासिर को व्यवसाय के प्रबंधन के लिए लाभ का 15% प्राप्त होता है और बाकी को उनकी पूंजी के अनुपात में विभाजित किया जाता है। ₹880 के कुल लाभ में से नासिर को प्राप्त राशि क्या हैं?

HINTS

नासिर और रोहित के लाभ का अनुपात = 5 : 6

कुल लाभ = ₹880

व्यवसाय के प्रबंधन के लिए नासिर को प्राप्त धन = ₹880 का 15%= ₹132

शेष राशि = ₹880 – ₹132 = ₹748

नासिर द्वारा प्राप्त राशि = ₹132 + ₹748 × $\frac{5}{11}$ = 132 + 340 = ₹472

Ex. A, B और C ने मिलकर एक व्यवसाय शुरू किया जिसमें A ने 12 महीने के लिए ₹7,000, B ने 10 महीने के लिए ₹8,000 और C ने 6 महीने के लिए ₹12,000 निवेश किए। A कार्यरत सदस्य था जिसके लिए उसे पारिश्रमिक के रूप में लाभ का 20% प्राप्त हुआ। एक वर्ष के अंत में अर्जित कुल लाभ ₹14,750 था। लाभ में C का हिस्सा (₹ में) क्या है।

HINTS

	A	B	C
निवेश →	7	8	12
समय →	12	10	6
लाभ →	84	80	72
	21	20	18

100% = ₹14750

80% = ₹11800

C का हिस्सा = $\frac{18}{21+20+18} \times 11800 = \frac{18}{59} \times 11800$

= ₹3600

लाभ और वेतन पर आधारित

Ex. P और Q क्रमशः ₹1,50,000 और ₹4,50,000 की पूंजी के साथ एक दुकान शुरू करते हैं। एक वर्ष के बाद, ₹2,00,000 के लाभ में से, P को लाभ का हिस्सा और कुछ पैसे वेतन के रूप में मिलते हैं जो लाभ का हिस्सा नहीं है। यदि P को कुल ₹90,000 मिलते हैं, तो उसे मिलने वाला वेतन (₹ में) क्या है?

HINTS

	P	:	Q
	150,000	:	450,000
लाभ →	1	:	3

कुल लाभ में से P का हिस्सा = $\frac{1}{4} \times 2,00,000$ = ₹50,000

लेकिन वह ₹90,000 पाता है।

वेतन = 90,000 – 50,000 = ₹40,000

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

अध्याय 21

मिश्रण

मिश्रण दो या दो से अधिक विभिन्न पदार्थों से बना एक पदार्थ है।

मिश्रण की सांद्रता

किसी मिश्रण में किसी विशेष घटक की प्रतिशत में उपस्थिति को उस घटक की सांद्रता कहा जाता है।

कुछ मात्रा को जोड़ना या हटाना

Ex. 200 लीटर मिश्रण में दूध और पानी का अनुपात 17:3 है। इसमें कुछ और दूध मिलाने के बाद, परिणामी मिश्रण में दूध और पानी का अनुपात 7:1 हो जाता है। इसमें मिलाई गई दूध की मात्रा थी:

HINTS [इस प्रकार के प्रश्नों में, जिन भागों को प्रतिस्थापित नहीं किया जाता है उनकी मात्रा समान रहेगी]

इस प्रश्न में पानी की मात्रा समान होगी।

	दूध	:	पानी		दूध	:	पानी
प्रारंभिक →	(17	:	$3)_{\times 1}$	⇒	17 ↓+4	:	3
अंतिम →	(7	:	$1)_{\times 3}$		21	:	3

प्रश्नानुसार,

(17 + 3) इकाई = 20 इकाई → 200 लीटर

1 इकाई → 10 लीटर

(21 – 17) इकाई = 4 इकाई → 40 लीटर

∴ मिलाए गए दूध की मात्रा = 40 लीटर

Ex. एक वर्तन में अम्ल और पानी का 32 लीटर घोल है जिसमें अम्ल और पानी का अनुपात 5:3 है। यदि 12 लीटर घोल निकाल लिया जाए और उसमें $7\frac{1}{2}$ लीटर पानी मिला दिया जाए, तो परिणामी घोल में अम्ल और पानी का अनुपात क्या है?

HINTS 32 – 12 = 20 लीटर

20 लीटर

↙ ↘

अम्ल		पानी
5	:	3
12.5 लीटर		7.5 लीटर
		+7.5
12.5	:	15
5	:	6

Ex. एक बीकर में अम्ल और जल का अनुपात 1 : x है। जब 300 मिलीलीटर मिश्रण में 50 मिलीलीटर जल मिलाया जाता है, तो अम्ल और जल का अनुपात 2 : 5 हो जाता है। 'x' का मान क्या है?

HINTS

अम्ल		पानी
1	:	x
2	:	5

∵ (5 + 2) इकाई = 7 इकाई → 300 + 50 = 350 मिली

1 इकाई → 50 मिली

2 इकाई → 100 मिली

पानी की प्रारंभिक मात्रा = 300 – 100 = 200 मिली

∴ $x = 200$

Ex. एक बर्तन में दूध और पानी का अनुपात 2 : 3 है। यदि हम रासायनिक प्रक्रिया द्वारा कुछ पानी निकाल लें, तो अनुपात 5 : 7 हो जाता है और मिश्रण की मात्रा घटकर 36 लीटर रह जाती है। ज्ञात कीजिए कि कितनी मात्रा में पानी निकाला गया।

HINTS

[इस प्रकार के प्रश्नों में, जिन भागों को प्रतिस्थापित नहीं किया जाता है उनकी मात्रा समान रहेगी]

इस प्रश्न में दूध की मात्रा समान होगी।

	दूध	:	पानी		दूध	:	पानी
प्रारंभिक →	(2	:	$3)_{\times 5}$	⇒	10	:	15
अंतिम →	(5	:	$7)_{\times 2}$		10	:	14

प्रश्नानुसार,

(10 + 14) इकाई = 24 इकाई → 36 लीटर

(15 – 14) इकाई =1 इकाई → 1.5 लीटर

∴ निकाले गए पानी की मात्रा = 1.5 लीटर

Ex. एक मिश्रण में दूध और पानी का अनुपात 1 : 3 है। यदि हम मिश्रण में 'x' लीटर दूध मिलाते हैं, तो अनुपात 7 : 15 हो जाता है। यदि हम मिश्रण में 50 लीटर पानी मिलाते हैं, तो अनुपात 2 : 5 हो जाता है। 'x' का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS

दूध	:	पानी		दूध	:	पानी
1 ↓+x	:	3		10 ↓ x = 4 इकाई	:	30
$7_{\times 2}$	:	$15_{\times 2}$ ↓+50 लीटर	⇒	14	:	30 ↓+50 लीटर
$2_{\times 7}$	:	$5_{\times 7}$		14	:	35

प्रश्नानुसार,

(35 – 30) इकाई = 5 इकाई → 50 लीटर

1 इकाई → 10 लीटर

(14 – 10) इकाई = 4 इकाई → 40 लीटर

∴ $x = 40$

प्रतिस्थापन की अवधारणा

इस अवधारणा के आधार पर 2 प्रकार के प्रश्न पूछे जाते हैं।

➤ **समान मात्रा का प्रतिस्थापन**

जब किसी पदार्थ 's' के मिश्रण की मात्रा 'x' को अन्य पदार्थ की 'p' मात्रा से n-गुना प्रतिस्थापित किया जाता है, तो प्रतिस्थापित मिश्रण में पदार्थ 's' की मात्रा

$$= x\left(1-\frac{p}{x}\right)^n$$

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. एक बर्तन 90 लीटर दूध से भरा है। इसमें से 18 लीटर दूध निकालकर उसकी जगह पानी डाल दिया जाता है और यह प्रक्रिया 2 बार दोहराई जाती है, तीसरी बार दूध डालने के बाद शेष दूध की मात्रा है:

HINTS प्रतिस्थापन के बाद बचे दूध की मात्रा

$= 90\left(1-\frac{18}{90}\right)^3 = 90\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5} = 46.08$ लीटर

> **असमान मात्रा का प्रतिस्थापन**
>
> जब किसी पदार्थ 's' के मिश्रण की मात्रा 'x' को अन्य पदार्थ की मात्रा 'p', 'q', 'r' और इसी प्रकार से प्रतिस्थापित किया जाता है, तो प्रतिस्थापित मिश्रण में पदार्थ 's' की मात्रा = $x\left(1-\frac{p}{x}\right)\left(1-\frac{q}{x}\right)\left(1-\frac{r}{x}\right)$.......

Ex. एक बर्तन 90 लीटर दूध से भरा है। इसमें से 18 लीटर दूध निकालकर उसकी जगह पानी डाल दिया जाता है, फिर से 15 लीटर मिश्रण निकालकर उसकी जगह पानी डाल दिया जाता है और फिर से 10 लीटर मिश्रण निकालकर उसकी जगह पानी डाल दिया जाता है। तीसरी बार मिश्रण डालने के बाद शेष दूध की मात्रा है:

HINTS प्रतिस्थापन के बाद बचे दूध की मात्रा

$= 90\left(1-\frac{18}{90}\right)\left(1-\frac{15}{90}\right)\left(1-\frac{10}{90}\right)$

$= 90\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{8}{9}\right) = \frac{160}{3} = 53.33$ लीटर

> एक बर्तन में द्रव 'A' की 'x' मात्रा है और 'p' द्रव 'A' की वह मात्रा है जिसे बर्तन से निकालकर उसी मात्रा में द्रव 'B' से प्रतिस्थापित किया जाता है। यदि इस प्रक्रिया को 'n' बार इस प्रकार दोहराया जाए कि परिणामी मिश्रण में द्रव 'A' और 'B' का अनुपात 'a : b' हो, तो:
>
> $\frac{a}{a+b} = \left(\frac{x-p}{x}\right)^n$

@apna_channels

Ex. एक बर्तन में थोड़ा दूध है। बर्तन से 6 लीटर दूध निकालकर उसकी जगह 6 लीटर पानी डाला गया और फिर से 6 लीटर मिश्रण निकालकर उसकी जगह पानी डाला गया। अब दूध और पानी का अनुपात 100 : 69 हो गया। बर्तन में दूध की प्रारंभिक मात्रा ज्ञात कीजिए।

HINTS मान लीजिए कि प्रारम्भ में दूध की मात्रा 'x' लीटर है।

सूत्र का प्रयोग करें:

$\frac{100}{100+69} = \left(\frac{x-6}{x}\right)^2$

$\Rightarrow \frac{100}{169} = \left(\frac{x-6}{x}\right)^2 \Rightarrow \frac{10}{13} = 1-\frac{6}{x} \Rightarrow x = 26$

∴ दूध की प्रारंभिक मात्रा = 26 लीटर

वैकल्पिक विधि

दूध (प्रारंभिक)	:	दूध (अंतिम)
169	:	100
$\sqrt{169}$	:	$\sqrt{100}$
13	:	10

∴ (13 – 10) इकाई = 3 इकाई → 6 लीटर

13 इकाई → 26 लीटर

∵ दूध की प्रारंभिक मात्रा = 26 लीटर

विभिन्न मिश्रणों को मिलाकर एकल मिश्रण बनाना

Ex. मिश्रधातु A और B में तांबे और जस्ते का अनुपात क्रमशः 3 : 4 और 5 : 9 है। A और B को 2 : 3 के अनुपात में लिया जाता है और पिघलाकर एक नई मिश्रधातु C बनाई जाती है। C में तांबे और जस्ते का अनुपात क्या है?

HINTS

[जब भी ऐसे प्रश्न पूछे जाएं, मिश्रधातुओं की मात्रा बराबर रखें]

	तांबे : जस्ते		तांबे : जस्ते
मिश्र धातु A →	$(3 : 4)_{\times 2}$	⇒	$(6 : 8)_{\times 2}$
मिश्र धातु B →	5 : 9		$(5 : 9)_{\times 3}$
			12 : 16
			15 : 27

∴ मिश्र धातु C में तांबे और जस्ता का अनुपात

= (12 + 15) : (16 + 27) = 27 : 43

Ex. मिश्रधातु A और B में तांबा और जस्ता क्रमशः 7 : 8 और 4 : 1 के अनुपात में हैं। 2 : 1 के अनुपात में तांबा और जस्ता युक्त एक नई मिश्रधातु C प्राप्त करने के लिए A और B को किस अनुपात में मिलाया जाना चाहिए?

HINTS

[जब भी ऐसे प्रश्न पूछे जाएं, मिश्रधातुओं की मात्रा बराबर रखें]

	तांबा : जस्ता		तांबा : जस्ता
मिश्र धातु A →	7 : 8	⇒	7 : 8
मिश्र धातु B →	$(4 : 1)_{\times 3}$		12 : 3

मान लीजिए, मिश्रधातु A और B को x : y अनुपात में मिलाया जाता है।

प्रश्नानुसार,

$\frac{Cu}{Zn} = \frac{7x+12y}{8x+3y} \Rightarrow \frac{2}{1} = \frac{7x+12y}{8x+3y}$

$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{2}{3}$

वैकल्पिक विधि

इस प्रकार के प्रश्नों को एलीगेशन का उपयोग करके भी हल किया जा सकता है।

	तांबा : जस्ता		तांबा : जस्ता
मिश्र धातु A →	7 : 8		7 : 8
मिश्र धातु B →	$(4 : 1)_{\times 3}$	⇒	12 : 3
मिश्र धातु C →	$(2 : 1)_{\times 5}$		10 : 5

अब,

7 : 12

10

2 : 3

∴ आवश्यक अनुपात = 2 : 3

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

अध्याय 22

पृथ्थीकरण

विभिन्न अध्यायों में मिश्रण के अनुप्रयोग।

- मिश्रण-आधारित प्रश्न
- प्रतिशत आधारित प्रश्न
- साधारण ब्याज आधारित प्रश्न
- लाभ और हानि आधारित प्रश्न
- छूट आधारित प्रश्न
- औसत आधारित प्रश्न
- समय और दूरी आधारित प्रश्न
- संख्या प्रणाली आधारित प्रश्न

मिश्रण

- 1st मिश्रण   2nd मिश्रण

  कुल मिश्रण

  मात्रा$_1$ मात्रा$_2$

Ex. दो बर्तनों में दूध और पानी का मिश्रण क्रमशः 3 : 2 और 6 : 5 के अनुपात में है। दोनों बर्तनों में मिश्रण को किस अनुपात में मिलाया जाना चाहिए ताकि अंतिम मिश्रण में दूध और पानी का अनुपात 4 : 3 हो जाए?

HINTS

$\frac{3}{5}\times 11\times 5\times 7 = 231$ $\frac{6}{11}\times 11\times 5\times 7 = 210$

$\frac{4}{7}\times 11\times 5\times 7 = 220$

10 : 11

Ex. 300 ग्राम चीनी के घोल में 40% चीनी है। घोल में 50% चीनी बनाने के लिए कितनी चीनी मिलानी चाहिए?

HINTS

दी गई चीनी   मिलाई गई चीनी

40%   100%

50%

50 : 10

↓×6   ↓×6

300 ग्राम   60 ग्राम

∴ अतिरिक्त चीनी की मात्रा = 60 ग्राम

प्रतिशत

- वृद्धि/कमी % (पुरुष)   वृद्धि/कमी % (महिला)

  कुल जनसंख्या में वृद्धि/कमी %

  पुरुषों की प्रारंभिक संख्या : महिलाओं की प्रारंभिक संख्या

Ex. एक कस्बे की जनसंख्या 1,20,000 है। यदि पुरुषों की संख्या में 7% और महिलाओं की संख्या में 10% की वृद्धि होती है, तो कस्बे की जनसंख्या में 9.5% की वृद्धि होगी। उस कस्बे में रहने वाली पुरुष और महिला जनसंख्या के बीच अंतर ज्ञात कीजिए।

HINTS

7%   10%

9.5%

0.5 : 2.5

1 : 5

प्रश्नानुसार,

(5 + 1) इकाई = 6 इकाई → 1,20,000

(5 – 1) इकाई = 4 इकाई → 80,000

∴ अभीष्ट अंतर = 80,000

@apna_channels

आय, व्यय और बचत

- खर्च में वृद्धि/कमी %   बचत में वृद्धि/कमी %

  आय में वृद्धि/कमी %

  खर्च : बचत

Ex. यदि किसी परिवार की आय 6% कम हो जाती है और व्यय 8% कम हो जाता है तथा उसकी बचत 4% बढ़ जाती है, तो उस परिवार की आय और व्यय का अनुपात ज्ञात कीजिए।

HINTS

खर्च   बचत

– 8%   + 4%

– 6%

4 – (– 6) : – 6 – (– 8)

10 : 2

5 : 1

∴ आय : व्यय = 6 : 5

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

साधारण ब्याज

- ब्याज की दर (R_1) ब्याज की दर (R_2)
  कुल ब्याज दर
  मूलधन$_1$: मूलधन$_2$

Ex. हरीश के पास ₹40,000 हैं। उसने इसे दो बैंकों में जमा किया। पहले बैंक द्वारा दिया जाने वाला ब्याज 9.5% प्रति वर्ष है और दूसरे बैंक द्वारा दिया जाने वाला ब्याज 5.5% प्रति वर्ष है। यदि एक वर्ष के अंत में हरीश को ₹3,200 ब्याज मिले, तो दोनों बैंकों में जमा राशि के बीच का अंतर ज्ञात कीजिए।

HINTS $r = \frac{SI}{p} \times \frac{100}{t} = \frac{3200 \times 100}{40000 \times 1} = 8\%$

9.5% 5.5%
8%
2.5 : 1.5
मूलधन = 5 : 3

प्रश्नानुसार,
(5 + 3) इकाई = 8 इकाई → ₹40,000
(5 – 3) इकाई = 2 इकाई → ₹10,000
∴ अभीष्ट अंतर = ₹10,000

लाभ और हानि

- क्रयमूल्य$_1$ क्रयमूल्य$_2$
  मिश्रण का क्रयमूल्य
  मात्रा$_1$: मात्रा$_2$

Ex. एक पंसारी को ₹60 प्रति किग्रा और ₹65 प्रति किग्रा मूल्य की दो प्रकार की चाय को किस अनुपात में मिलाना चाहिए कि मिश्रण को ₹68.20 प्रति किग्रा पर बेचकर उसे 10% का लाभ हो?

HINTS मिश्रण का क्रयमूल्य = $\frac{68.20}{11} \times 10$ = ₹62

अब,

60 65
62
3 : 2

∴ अभीष्ट अनुपात = 3 : 2

- लाभ$_1$/हानि$_1$% लाभ$_2$/हानि$_2$%
  कुल लाभ/हानि %
  क्रयमूल्य$_1$ या मात्रा$_1$: क्रयमूल्य$_2$ या मात्रा$_2$

Ex. एक छात्र ने ₹150 में 10 पेंसिल और 8 पेन खरीदे। उसने पेंसिल को 4% लाभ पर और पेन को 7% लाभ पर बेचा। कुल मिलाकर उसे ₹9 का लाभ हुआ। प्रत्येक पेंसिल और पेन का क्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

HINTS कुल लाभ % = $\frac{9}{150} \times 100\% = 6\%$

पेंसिल 4% पेन 7%
6%
1 : 2 = 3 इकाई → ₹150
क्रय मूल्य → ₹50 : ₹100 1 इकाई → ₹50

∴ प्रत्येक पेंसिल का क्रयमूल्य = $\frac{50}{10}$ = ₹5

प्रत्येक पेन का क्रयमूल्य = $\frac{100}{8}$ = ₹12.5

छूट (बट्टा)

- छूट$_1$% छूट$_2$%
  कुल छूट %
  अंकित मूल्य$_1$: अंकित मूल्य$_2$

Ex. एक विक्रेता दो घड़ियाँ क्रमशः 8% और 15% की छूट पर बेचता है। दोनों घड़ियों का कुल अंकित मूल्य ₹2,100 है। यदि कुल छूट 12% है, तो दोनों घड़ियों के अंकित मूल्य के बीच का अंतर ज्ञात कीजिए।

HINTS

8% 15%
12%
अंकित मूल्य → 3 : 4

प्रश्नानुसार,
(3 + 4) इकाई = 7 इकाई → ₹2,100
(4 – 3) इकाई = 1 इकाई → ₹300
∴ अभीष्ट अंतर = ₹300

औसत

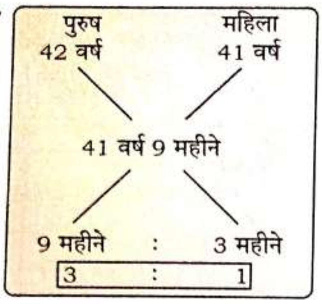
- औसत$_1$ औसत$_2$
  कुल औसत
  1st संख्या : 2nd संख्या

Ex. 600 कर्मचारियों वाली एक कंपनी में, पुरुष कर्मचारियों की औसत आयु 42 वर्ष और महिला कर्मचारियों की औसत आयु 41 वर्ष है। यदि कंपनी के सभी कर्मचारियों की औसत आयु 41 वर्ष और 9 महीने है, तो महिला कर्मचारियों की संख्या कितनी है?

@apna channels
Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

HINTS



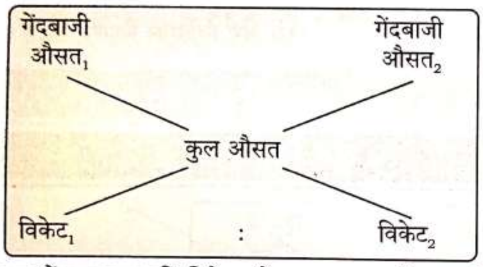
प्रश्नानुसार,

(3 + 1) इकाई = 4 इकाई → 600

1 इकाई → 150

∴ महिला कर्मचारियों की संख्या = 150

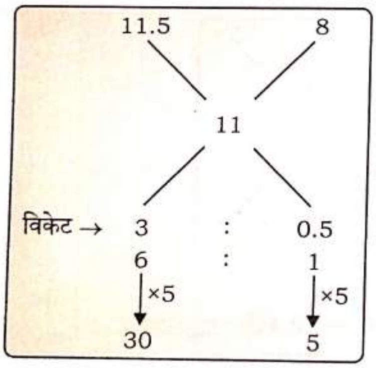
•



Ex. एक गेंदबाज का प्रति विकेट औसत रन 11.5 है। अगली पारी में, गेंदबाज ने 5 विकेट लिए और 40 रन दिए, जिससे उसका गेंदबाजी औसत 0.5 कम हो गया। कुल विकेटों की संख्या ज्ञात कीजिए।

HINTS

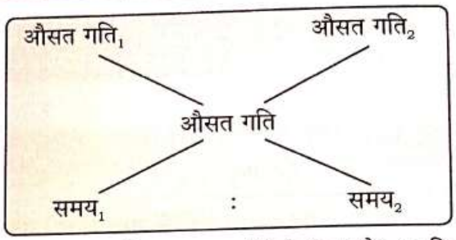
$$\text{गेंदबाजी औसत} = \frac{\text{कुल रन}}{\text{कुल विकेट}} = \frac{40}{5} = 8$$



∴ कुल विकेटों की संख्या = 30 + 5 = 35

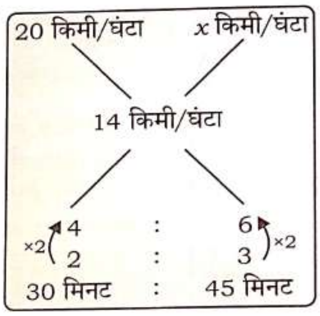
समय और दूरी

•



Ex. एक कार 30 मिनट तक 20 किमी/घंटा और 45 मिनट तक 'x' किमी/घंटा की गति से चलती है। यदि पूरी यात्रा में कार की औसत गति 14 किमी/घंटा है, तो 'x' का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS



∴ x = 14 − 4 = 10 किमी/घंटा

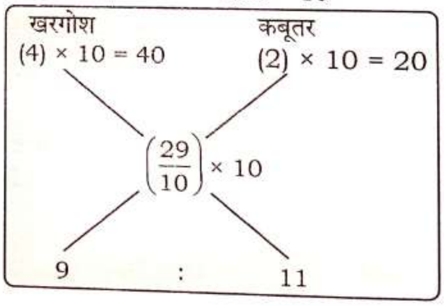
संख्या प्रणाली

Ex. एक चिड़ियाघर में खरगोश और कबूतर हैं। अगर सिर गिने जाएँ तो 200 होंगे और पैर गिने जाएँ तो 580 होंगे। कुल कितने कबूतर हैं?

HINTS सिरों की संख्या = 200

पैरों की संख्या = 580

$$\text{पैरों की औसत संख्या} = \frac{580}{200} = \frac{29}{10}$$



$$\therefore \text{कबूतरों की संख्या} = 200 \times \frac{11}{20} = 110$$

@apna_channels
Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

अध्याय 23

औसत

दो या दो से अधिक पदों को एक साथ जोड़ कर पदों की संख्या से विभाजित करने पर जो परिणाम मिलता है, उसे औसत कहते हैं।

$$\text{औसत} = \frac{\text{सभी पदों का योग}}{\text{पदों की संख्या}}$$

Ex. पाँच दोस्तों का भार 67 किग्रा, 85 किग्रा, 70 किग्रा, 90 किग्रा और 103 किग्रा है। उनके भार का औसत (किग्रा में) ज्ञात कीजिए।

HINTS औसत $= \frac{67+85+70+90+103}{5} = \frac{415}{5} = 83$ किग्रा

Ex. 72, 81, 90, 68, 61 का औसत ज्ञात कीजिए।

HINTS औसत $= \frac{72+81+90+68+61}{5} = \frac{372}{5} = 74.4$

क्रमागत प्राकृतिक संख्या

क्रमागत प्राकृतिक संख्या

- प्रथम 'n' संख्याओं का औसत $= \frac{(n+1)}{2}$
- प्रथम 'n' संख्याओं के वर्गों का औसत $= \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$
- प्रथम 'n' संख्याओं के घनों का औसत $= \frac{n(n+1)^2}{4}$

Ex. प्रथम 10 प्राकृतिक संख्याओं का औसत ________ है।

HINTS प्रथम 10 प्राकृतिक संख्याओं का औसत $= \frac{n+1}{2} = \frac{10+1}{2}$

$= 5.5$

Ex. प्रथम 47 प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का औसत है:

HINTS प्रथम 47 प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का औसत $= \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$

$= \frac{(47+1)(2\times47+1)}{6} = \frac{48\times95}{6} = 95 \times 8 = 760$

Ex. प्रथम 10 प्राकृतिक संख्याओं के घन का औसत ज्ञात कीजिए।

HINTS प्रथम 10 प्राकृतिक संख्याओं के घन का औसत

$= \frac{n(n+1)^2}{4} = \frac{10\times(10+1)^2}{4} = \frac{1210}{4} = 302.5$

क्रमागत सम संख्या

- प्रथम 'n' संख्याओं का औसत = (n+1)
- प्रथम 'n' संख्याओं के वर्गों का औसत $= \frac{2(n+1)(2n+1)}{3}$
- प्रथम 'n' संख्याओं के घनों का औसत $= 2n(n+1)^2$

Ex. प्रथम 91 सम संख्याओं का औसत है:

HINTS प्रथम 91 सम संख्याओं का = (n + 1) = 91 + 1 = 92

Ex. प्रथम पाँच सम संख्याओं के वर्गों का औसत ज्ञात कीजिए।

HINTS प्रथम पाँच सम संख्याओं के वर्गों का औसत

$= \frac{2}{3}(n+1)(2n+1) = \frac{2}{3} \times 6 \times 11 = 44$

Ex. प्रथम 15 सम संख्याओं के घनों का औसत ज्ञात कीजिए।

HINTS प्रथम 15 सम संख्याओं के घनों का औसत $= 2n(n+1)^2$

$= 2 \times 15 \times (15+1)^2 = 30 \times 16 \times 16 = 7680$

क्रमागत विषम संख्या

- प्रथम 'n' संख्याओं का औसत = n
- प्रथम 'n' संख्याओं के वर्गों का औसत $= \frac{(2n+1)(2n-1)}{3}$
- प्रथम 'n' संख्याओं के घनों का औसत $= n(2n^2-1)$

Ex. प्रथम 125 विषम संख्याओं का औसत ज्ञात कीजिए।

HINTS प्रथम 125 विषम संख्याओं का औसत = n = 125

Ex. प्रथम 23 विषम संख्याओं के वर्ग का औसत ज्ञात कीजिए।

HINTS प्रथम 23 विषम संख्याओं के वर्ग का औसत

$= \frac{(2n+1)(2n-1)}{3} = \frac{(2\times23+1)(2\times23-1)}{3} = \frac{47\times45}{3} = 705$

Ex. प्रथम 10 विषम संख्याओं के घन का औसत ज्ञात कीजिए।

HINTS प्रथम 10 विषम संख्याओं के घन का औसत $= n(2n^2-1)$

$= 10(2 \times 10^2 - 1) = 1990$

$$\text{क्रमागत संख्याओं का औसत} = \frac{\text{प्रथम संख्या + अंतिम संख्या}}{2}$$

Ex. 49 से 125 तक के सभी प्राकृतिक संख्याओं का औसत क्या है?

HINTS औसत $= \frac{(\text{प्रथम संख्या + अंतिम संख्या})}{2}$

$= \frac{49+125}{2} = \frac{174}{2} = 87$

किसी संख्या के प्रथम 'n' गुणज का औसत $= a \times \frac{(n+1)}{2}$

जहाँ, a = संख्या का पहला गुणज

n = पदों की संख्या

Ex. 7 के प्रथम 20 गुणजों का औसत ज्ञात कीजिए।

HINTS औसत $= a \times \frac{(n+1)}{2} = 7 \times \frac{(20+1)}{2} = 7 \times 10.5 = 73.5$

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

विचलन विधि का प्रयोग करके औसत ज्ञात करना

चरण I: प्रेक्षण में किसी भी पद को औसत मानें।

चरण II: प्रेक्षण और अनुमानित औसत के बीच अंतर की गणना करें। (इन अंतरों को विचलन के रूप में जाना जाता है)।

चरण III: चरण-II में गणना किए गए सभी विचलनों को जोड़े और इसे प्रेक्षणों में दिए गए पदों की कुल संख्या से विभाजित करें। (इसे औसत में शुद्ध विचलन के रूप में जाना जाता है)।

चरण IV: वास्तविक औसत प्राप्त करने के लिए, अनुमानित औसत में शुद्ध विचलन जोड़ें या घटाएँ (चरण-III के परिणाम के अनुसार)।

Ex. निम्नलिखित प्रेक्षणों का औसत ज्ञात कीजिए:

48, 52, 40, 60, 53, 54, 49

HINTS **चरण I:** माना, औसत = 50

चरण II: प्रेक्षणों और अनुमानित औसत के बीच अंतर की गणना करे।

48 52 40 60 53 54 49

माना औसत = 50

विचलन → −2 +2 −10 +10 +3 +4 −1 = 6

चरण III: शुद्ध विचलन $= \frac{+6}{7} = +0.857$

चरण IV: अभीष्ट औसत = 50 + 0.857 = 50.857

भारित औसत पर आधारित

यदि 'n'$_1$ प्रेक्षणों का औसत 'a'$_1$, 'n'$_2$ प्रेक्षणों का औसत 'a'$_2$ तथा आगे भी इसी प्रकार हों, तो:

सभी प्रेक्षणों का औसत $= \frac{n_1a_1 + n_2a_2 + ...}{n_1 + n_2 + ...}$

Ex. जॉन 20 किग्रा गेहूं 30 रुपये प्रति किग्रा की दर से तथा 30 किग्रा गेहूं 50 रुपये प्रति किग्रा की दर से खरीदता है। उसका औसत मूल्य ज्ञात कीजिए।

HINTS

मात्रा → 2 : 3

दर → 30 : 50

कुल मूल्य → 60 : 150

$\therefore$ औसत मूल्य $= \frac{60+150}{2+3} = \frac{210}{5} = ₹42/\text{किग्रा}$

Ex. एक प्राथमिक विद्यालय में 60 लड़के प्रत्येक 12 वर्ष के, 40 लड़के प्रत्येक 13 वर्ष के, 50 लड़के प्रत्येक 14 वर्ष के और 50 लड़के प्रत्येक 15 वर्ष के हैं। विद्यालय के सभी लड़कों की औसत आयु (वर्ष में) है:

HINTS माना, औसत = 12

लड़कों की संख्या → 60 40 50 50

अनुपात → 6 : 4 : 5 : 5

औसत आयु → 12 13 14 15

माना, औसत = 12

विचलन → 0 +1 +2 +3

शुद्ध विचलन $= \frac{4\times1+5\times2+5\times3}{6+4+5+5} = \frac{29}{20} = 1.45$

$\therefore$ औसत = 12 + 1.45 = 13.45 वर्ष

जब कोई समूह में शामिल होता है

यदि समूह में एक नया व्यक्ति जोड़ा जाता है, तो जोड़े गए व्यक्ति की आयु/आय/भार/ऊँचाई = प्रारंभिक औसत ± औसत वृद्धि/कमी × व्यक्तियों की अंतिम संख्या

Ex. एक स्कूल के 34 छात्रों का औसत भार 42 किग्रा है। यदि शिक्षक का भार भी शामिल कर लिया जाए, तो औसत 400 ग्राम बढ़ जाता है। शिक्षक का भार (किग्रा में) ज्ञात कीजिए।

HINTS शिक्षक का भार = प्रारंभिक औसत + वृद्धि × व्यक्तियों की अंतिम संख्या = 42 + 0.4 × 35 = 42 + 14 = 56 किग्रा

यदि समूह में एक से अधिक व्यक्ति जोड़े जाते हैं:

Ex. एक कक्षा के 20 छात्रों का औसत वजन 30.5 किग्रा था। 6 नए छात्रों के कक्षा में शामिल होने के बाद, इसका औसत वजन 2 किग्रा बढ़ गया। कक्षा में शामिल होने वाले 6 नये छात्रों का औसत वजन ज्ञात करें (एक दशमलव स्थान तक पूर्णांकित करें)।

HINTS 6 नये छात्रों का औसत वजन

$= 30.5 + \frac{(26\times2)}{6} = 30.5 + 8.7 = 39.2$ किग्रा

जब व्यक्तियों की प्रारंभिक संख्या पूछी जाती है:

Ex. एक कक्षा में कुछ छात्रों का औसत वजन 58.4 किग्रा था। जब 62.8 किग्रा औसत वजन वाले 5 छात्र कक्षा में शामिल हुए, तो कक्षा में सभी छात्रों का औसत वजन 0.55 किग्रा बढ़ गया। कक्षा में शुरू में छात्रों की संख्या थी:

HINTS कुल विचलन = 5 × 4.4 = +22

अब छात्रों की संख्या $= \frac{22}{0.55} = 40$

$\therefore$ छात्रों की प्रारंभिक संख्या = 40 − 5 = 35

Ex. छात्रों की निश्चित संख्या वाली एक कक्षा में यदि 30 किग्रा वजन वाला एक छात्र जोड़ा जाता है, तो कक्षा का औसत वजन 1 किग्रा बढ़ जाता है। यदि 30 किग्रा वजन वाला एक और छात्र जोड़ा जाता है, तो कक्षा का औसत वजन मूल औसत से 1.5 किग्रा बढ़ जाता है। कक्षा का प्रारंभिक औसत वजन (किग्रा में) क्या है?

HINTS माना, छात्रों की संख्या = n

प्रारंभिक औसत = x

छात्रों का कुल वजन = nx

स्थिति I:

$\frac{nx+30}{n+1} = x + 1$

$\Rightarrow nx + 30 = nx + x + n + 1$

$\Rightarrow x + n = 29$ ....(i)

स्थिति II:

$\frac{nx+30+30}{n+2} = x + 1.5$

$\Rightarrow nx + 60 = nx + 2x + 1.5n + 3$

$\Rightarrow 2x + 1.5n = 57$ ....(ii)

@apna_channels
Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

समीकरण (i) और (ii) से,

$57 = 2(29 - n) + 1.5n$

$\Rightarrow 57 = 58 - 2n + 1.5n$

$\Rightarrow -1 = -0.5n \Rightarrow n = 2$

समीकरण (i) से,

$x + n = 29$

$\Rightarrow x = 27$

∴ कक्षा का प्रारंभिक औसत वजन = 27 किग्रा

वैकल्पिक विधि

माना, प्रारम्भ में विद्यार्थियों की कुल संख्या 'n' है।

स्थिति I:

मूल औसत $= 30 - 1(n + 1)$ ....(i)

स्थिति II:

$1 +$ मूल औसत $= 30 - \frac{1}{2}(n + 2)$

$\Rightarrow$ मूल औसत $= 30 - \frac{1}{2}(n + 2) - 1$ ....(ii)

समीकरण (i) और (ii) से,

$30 - (n + 1) = 30 - \frac{1}{2}(n + 2) - 1$

$\Rightarrow n = 2$

∴ कक्षा का प्रारंभिक औसत वजन $= 30 - (2 + 1) = 27$ किग्रा

जब कोई समूह छोड़ कर जाता है

जब कोई व्यक्ति समूह छोड़ता है तो छोड़ने वाले व्यक्ति की आयु/आय/ऊँचाई/वजन = प्रारंभिक औसत ± औसत वृद्धि/कमी × व्यक्तियों की अंतिम संख्या

Ex. 24 कर्मचारियों और उनके पर्यवेक्षक की औसत आयु 41 वर्ष है। यदि पर्यवेक्षक की आयु को निकाल दिया जाए, तो औसत 0.75 वर्ष कम हो जाता है। पर्यवेक्षक की आयु है:

HINTS पर्यवेक्षक की आयु $= 41 + 24 \times 0.75 = 41 + 18 = 59$ वर्ष

@apna_channels

जब एक से अधिक व्यक्ति समूह छोड़ देते हैं

Ex. 25 लड़कों की औसत ऊँचाई 1.4 मीटर है। जब 5 लड़के समूह छोड़ देते हैं, तो औसत ऊँचाई 0.15 मीटर बढ़ जाती है। समूह छोड़ने वाले 5 लड़कों की औसत ऊँचाई क्या है?

HINTS समूह छोड़ने वाले लड़कों की औसत ऊँचाई $= 1.4 - \frac{0.15 \times 20}{5}$

$= 1.4 - 0.6 = 0.8$ मीटर

जब समूह में किसी को प्रतिस्थापित किया जाता हैं

यदि किसी व्यक्ति को नए व्यक्ति द्वारा प्रतिस्थापित किया जाता है, तो नए व्यक्ति की आयु ऊँचाई/वजन/आय = प्रतिस्थापित सदस्य की आयु के ± औसत वृद्धि/कमी × व्यक्तियों की संख्या

Ex. एक कक्षा में 50 छात्र हैं। उनमें से 50 किग्रा भार वाला एक छात्र चला जाता है और एक नया छात्र शामिल हो जाता है। इससे कक्षा का औसत भार $\frac{1}{2}$ किग्रा बढ़ जाता है। नए छात्र का भार है:

HINTS नए छात्र का भार = छोड़ने वाले छात्र का भार + औसत वृद्धि × छात्रों की प्रारंभिक संख्या $= 50 + \frac{1}{2} \times 50 = 50 + 25 = 75$ किग्रा

जब एक से अधिक व्यक्तियों को समान संख्या में व्यक्तियों द्वारा प्रतिस्थापित किया जाता है:

Ex. एक कक्षा में 49 छात्रों का औसत वजन 39 किग्रा है। उनमें से सात जिनका औसत वजन 40 किग्रा है, कक्षा छोड़ देते हैं और अन्य सात छात्र जिनका औसत वजन 54 किग्रा है, कक्षा में शामिल हो जाते हैं। कक्षा का नया औसत वजन (किग्रा में) क्या है?

HINTS शुद्ध विचलन $= (-40 + 39) \times 7 + (54 - 39) \times 7$

$= -7 + 105 = 98$

∴ नया औसत वजन $= 39 + \frac{98}{49} = 39 + 2 = 41$ किग्रा

जब व्यक्तियों को समान संख्या में व्यक्तियों द्वारा प्रतिस्थापित नहीं किया जाता है:

Ex. एक कोचिंग सेंटर में 45 छात्रों की कक्षा के अंग्रेजी परीक्षा में औसत अंक 52 हैं। 40 औसत अंक वाले 6 लड़कों का एक समूह कक्षा छोड़ देता है और 43 औसत अंक वाले आठ लड़कों का एक अन्य समूह कक्षा में शामिल हो जाता है। कक्षा का नया औसत अंक क्या है?

HINTS

	प्रारंभिक	छोड़ने वाले	शामिल होने वाले
छात्रों की संख्या →	45	6	8
औसत →	52	40	43

∴ कक्षा के औसत अंक $= 52 - (52 - 40) \times 6 + (52 - 43) \times 8$

$= 52 - 72 + 72 = 52$

Ex. एक शिविर में कुछ बच्चों का औसत भार 40 किग्रा है। यदि 36 किग्रा औसत भार वाले 5 बच्चे शिविर में शामिल होते हैं या यदि 43.2 किग्रा औसत भार वाले 5 बच्चे शिविर छोड़ देते हैं, तो दोनों मामलों में बच्चों का औसत भार बराबर है। शुरुआत में शिविर में कितने बच्चे हैं?

HINTS प्रश्नानुसार,

माना, प्रारंभिक छात्रों की कुल संख्या $= x$

$\Rightarrow \frac{x+5}{5\times4} = \frac{x-5}{3.2\times5}$

$\Rightarrow \frac{x+5}{20} = \frac{x-5}{16}$

$\Rightarrow x = 45$

∴ शुरुआत में शिविर में 45 बच्चे हैं।

Ex. 12 लड़कियों के एक समूह का औसत वजन 48 किग्रा है। यदि 2 लड़कियाँ, R और S, P और Q की जगह ले लें, तो नया औसत वजन 46 किग्रा हो जाता है। P का वजन, Q के वजन के बराबर है। R का वजन, S के वजन के बराबर है। समूह में एक और लड़की, T को शामिल किया जाता है और नया औसत वजन 46 किग्रा हो जाता है। T का वजन, R के वजन के बराबर है। तो, P का वजन क्या है? (किग्रा में)

HINTS $10G + (P + Q) = 48 \times 12 = 576$

$10G + (R + S) = 46 \times 12 = 552$

$2P - 2R = 24$

$\Rightarrow P - R = 12$

$10G + (R + S) + T = 46 \times 13$

$\Rightarrow T = 598 - 552 = 46$

$T = R = 46$ किग्रा

$P - 46 = 12$

$\Rightarrow P = 58$ किग्रा

∴ P का वजन = 58 किग्रा

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

गलत दर्ज किए गए डेटा पर आधारित

(A) यदि 'n' संख्याओं का औसत 'm' है, लेकिन बाद में यह पाया गया कि संख्या 'a' को गलती से 'b' पढ़ लिया गया था, तो:

$$\text{सही औसत} = m + \frac{(a-b)}{n}$$

Ex. 10 दी गई संख्याओं का औसत ज्ञात करते समय एक छात्र ने गलती से संख्या 46 के स्थान पर 64 लिख दिया और उसका औसत 50 हो गया। दी गई संख्याओं का सही औसत क्या है?

HINTS सही औसत $= 50 + \frac{(46-64)}{10} = 50 + \frac{(-18)}{10} = 48.2$

(B) यदि 'n' संख्याओं का औसत 'm' है, लेकिन बाद में यह पाया गया कि दो संख्याएँ 'a' और 'b' को क्रमशः 'p' और 'q' के रूप में गलत पढ़ा गया है, तो

$$\text{सही औसत} = m + \frac{(a+b-p-q)}{n}$$

Ex. 40 छात्रों के औसत अंक 68 पाए गए। जब दो छात्रों के अंक क्रमशः 84 और 46 के बजाय गलत तरीके से 48 और 64 दर्ज किए गए थे, तो सही औसत क्या है?

HINTS सही औसत $= 68 + \frac{(84+46-48-64)}{40} = 68.45$

एलिगेशन पर आधारित

Ex. किसी परीक्षा में लड़के और लड़कियों के औसत अंक (100 में से) क्रमशः 75 और 80 है। यदि उस परीक्षा में सभी छात्रों के औसत अंक 78 है, तो लड़कों की संख्या का लड़कियों की संख्या से अनुपात ज्ञात कीजिए।

HINTS

लड़का   लड़की
75   80
78
2 : 3

∴ लड़कों की संख्या का लड़कियों की संख्या से अनुपात = 2 : 3

Ex. एक कक्षा में 60 छात्र है। पूरी कक्षा का औसत वजन 42 किग्रा है। यदि कक्षा में 36 लड़के है और सभी लड़कों का औसत वजन 50 किग्रा है, तो सभी लड़कियों का औसत वजन (किग्रा में) क्या है?

HINTS

लड़का   लड़की
50 किग्रा   30 किग्रा
42 किग्रा
संख्या → 12 : 8
×4   36 : 24   ×4
3 : 2

∴ लड़कियों का औसत वजन = 30 किग्रा

क्रिकेट पर आधारित

Ex. क्रिकेट के पहले 10 ओवरों में रन रेट केवल 7.2 था। 272 रनों के लक्ष्य तक पहुँचने के लिए शेष 40 ओवरों में औसत रन रेट क्या होना चाहिए?

HINTS

	10 ओवर	40 ओवर
औसत →	7.2	5
कुल रन →	72	200
	कुल 272	

∴ औसत रन रेट = 5

वैकल्पिक विधि

ओवर → 10 : 40 → 1 : 4
7.2 x
×0.44 $\frac{272}{50} = 5.44$ ×0.44
0.44   1.76

$x = 5.44 - 0.44 = 5$

∴ औसत रन रेट = 5

Ex. एक क्रिकेट बल्लेबाज ने 11 पारियों में एक निश्चित औसत रन बनाए। 12वीं पारी में उसने 90 रन बनाए, जिसके बाद उसके औसत रन में 5 की कमी हो गई। 12वीं पारी के बाद उसके रनों का औसत ज्ञात कीजिए।

HINTS माना, प्रारंभिक औसत = x

$$\text{नया औसत} = \frac{(\text{प्रारंभिक पारी}) \times \text{औसत} + \text{वर्तमान रन}}{\text{कुल पारी}}$$

$\Rightarrow x - 5 = \frac{11 \times x + 90}{12}$

$\Rightarrow x = 150$

∴ नया औसत = 150 – 5 = 145

वैकल्पिक विधि

माना, 11 पारियों का औसत 'x' है।

N = प्रारंभिक औसत ± औसत वृद्धि/कमी × पारियों की कुल संख्या

$\Rightarrow 90 = x - 5 \times 12$

$\Rightarrow x = 150$

∴ नया औसत = 150 – 5 = 145

Ex. एक खिलाड़ी की 64 पारियों का औसत 62 रन है, उसके अधिकतम और न्यूनतम स्कोर के बीच का अंतर 180 रन है। यदि इन दो पारियों को छोड़ दिया जाए तो शेष पारियों का औसत 60 रन है। तो उसका अधिकतम स्कोर है:

HINTS $64 \times 62 - H - L = 62 \times 60$

$\Rightarrow 248 = H + L$ ....(i)

दिया है:

$H - L = 180$ ....(ii)

(i) और (ii) को जोड़ने पर,

$248 = H + L$

$180 = H - L$

$428 = 2H$

$\Rightarrow H = 214$

∴ अधिकतम स्कोर = 214

@apna_channels
Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

वैकल्पिक विधि

60   x
    62
62   2
×1 (62 : 2) ×1

$x = 62 + 62 = 124$

अधिकतम + न्यूनतम = 2 × 124 = 248

248 = H + L

180 = H − L

428 = 2 H

⇒ H = 214

∴ अधिकतम स्कोर = 214

Ex. एक क्रिकेटर जिसका गेंदबाजी औसत 11.125 रन प्रति विकेट है। वह 38.5 रन देकर 7 विकेट लेता है और इस तरह उसका औसत 1.125 कम हो जाता है। अंतिम मैच तक उसके द्वारा लिए गए विकेटों की संख्या थी:

HINTS औसत गेंदबाजी = $\frac{\text{कुल रन}}{\text{कुल विकेट}} = \frac{38.5}{7} = 5.5$

11.125   5.5
    10
4.5   1.125
4   :   1
×7 (28 : 7) ×7

इसलिए, $\frac{7}{1.125} \times 4.5 = 28$

∴ अंतिम मैच तक विकेटों की संख्या = 28 + 7 = 35

आयु पर आधारित

Ex. 5 वर्ष पहले, A, B, C और D की औसत आयु 45 वर्ष थी। E के शामिल होने पर, सभी पाँचों की औसत आयु 48 वर्ष हो जाती है। E की आयु कितनी है?

HINTS (A, B, C, D) की कुल वर्तमान आयु = (45 + 5) × 4 = 200 वर्ष

(A, B, C, D, E) की कुल वर्तमान आयु = 48 × 5 = 240 वर्ष

∴ E की वर्तमान आयु = 240 − 200 = 40 वर्ष

वैकल्पिक विधि

(A, B, C, D) का कुल वर्तमान औसत = 45 + 5 = 50

(A, B, C, D, E) का कुल वर्तमान औसत = 48

∴E की आयु = प्रारंभिक औसत ± औसत वृद्धि/कमी × कुल सदस्य

= 50 − (2 × 5) = 40 वर्ष

Ex. रवि, उसकी पत्नी और उनके दो बच्चों की औसत आयु 23 वर्ष है। उसकी पत्नी रवि से सिर्फ 4 वर्ष छोटी है और जब उसकी बेटी का जन्म हुआ तब उसकी पत्नी 24 वर्ष की थी। जब उसका बेटा पैदा हुआ तब वह 32 वर्ष का था। रवि और उसकी बेटी की औसत आयु क्या है?

HINTS कुल योग = 23 × 4 = 92

(R)	(W)	(D)	(S)	
32	28	4	0	= 64
↓+x	↓+x	↓+x	↓+x	

⇒ 64 + 4x = 92

⇒ x = 7

रवि की आयु = 32 + 7 = 39 वर्ष

बेटी की आयु = 4 + 7 = 11 वर्ष

∴ रवि और उसकी बेटी की औसत आयु

$= \frac{(39+11)}{2} = \frac{50}{2}$

= 25 वर्ष

संख्याओं पर आधारित

Ex. 25 प्राकृतिक संख्याओं का औसत 67 है। पहली संख्या में 1 की वृद्धि की जाती है, दूसरी संख्या में 3 की वृद्धि की जाती है और तीसरी संख्या में 5 की वृद्धि की जाती है और इसी प्रकार आगे भी। नया औसत ज्ञात कीजिए।

HINTS हम जानते हैं कि 'n' विषम संख्याओं का औसत = n

इसलिए, 25 विषम संख्याओं का औसत = 25

∴ नया औसत = 67 + 25 = 92

Ex. 15 परिणामों का औसत 21 है। उनमें से पहले 7 का औसत 21 है और अंतिम 7 का औसत 20 है। 8वाँ परिणाम क्या है?

@apna_channels

HINTS 8वाँ परिणाम = 15 × 21 − (7 × 21 + 7 × 20) = 315 − 287 = 28

वैकल्पिक विधि

	प्रथम	अंतिम	8वाँ
परिणाम →	7	7	1
औसत →	21	20	x

(21)

शुद्ध विचलन = (− 1) × 7 = − 7

∴ x = 21 + 7 = 28

Ex. 21 संख्याओं का औसत 44 है। प्रथम 11 संख्याओं का औसत 48 है तथा अंतिम 11 संख्याओं का औसत 42 है। यदि 11 वीं संख्या को निकाल दिया जाए, तो शेष संख्याओं का औसत क्या है?

HINTS

संख्या →	21	11	11
औसत →	44	48	42
विचलन →		+4	−2

शुद्ध विचलन = 11 × 4 − 11 × 2 = 44 − 22 = +22

11वीं संख्या = 44 + 22 = 66

∴ 11वीं संख्या को हटाने के बाद नया औसत = $\frac{21 \times 44 - 66}{20}$

= 42.9

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. 15 संख्याओं का औसत 45 है। पहली छः संख्याओं का औसत 42 है और अंतिम छः संख्याओं का औसत 43 है। 7वीं संख्या, 8वीं संख्या की दोगुनी है लेकिन 9वीं संख्या से 5 अधिक है। 7वीं और 9वी संख्या का औसत है:

HINTS

	कुल	प्रथम	अंतिम
संख्या →	15	6	6
औसत →	45	42	43
विचलन →		–3	–2

शुद्ध विचलन = (–3 × 6) + (–2 × 6) = –30

माना, 8वीं संख्या = x

$7^{वीं}$	$8^{वीं}$	$9^{वीं}$
$2x$	x	$2x-5$

अब, $5x - 5 = 45 \times 3 + 30$

$\Rightarrow 5x = 170 \Rightarrow x = 34$

$\therefore$ $7^{वीं}$ और $9^{वीं}$ संख्या का औसत = $\frac{68+63}{2} = 65.5$

Ex. 21 संख्याओं का औसत 36 है, जिसमें से पहली 12 संख्याओं का औसत 15 है। शेष 9 संख्याओं का औसत है:

HINTS शेष 9 संख्याओं का औसत

$= \frac{\text{(कुल योग-पहले 12 डेटा का योग)}}{9}$

$= \frac{(21\times36-12\times15)}{9} = \frac{576}{9} = 64$

वैकल्पिक विधि

	प्रथम		शेष
संख्या →	12		9
अनुपात →	4	:	3
औसत →	15		x
विचलन →	–21		

(औसत = 36)

शुद्ध विचलन = $\frac{-4\times21}{3} = -28$

$\therefore$ शेष संख्याओं का औसत (x) = 36 + 28 = 64

विविध प्रश्न

यदि 3 प्राकृतिक संख्याएँ दी गई हों और किन्हीं दो संख्याओं के औसत को यदि तीसरी संख्या में जोड़ा जाए तो प्राप्त संख्याएँ क्रमशः a, b तथा c हों, तो:

> संख्याओं का योग = $\frac{a+b+c}{2} = k$
> पहली संख्या = 2a – k
> दूसरी संख्या = 2b – k
> तीसरी संख्या = 2c – k

Ex. तीन संख्याएँ इस प्रकार हैं कि यदि उनमें से किन्हीं दो का औसत तीसरी संख्या में जोड़ा जाए, तो प्राप्त योग क्रमशः 168, 174 और 180 हैं। मूल तीन संख्याओं का औसत क्या है?

HINTS योग = $\frac{168+174+180}{2} = \frac{522}{2} = 261$

औसत = $\frac{261}{3} = 87$

Ex. जनवरी के पहले सोलह दिनों के लिए एक शहर का औसत तापमान 22°C है और उसी महीने के आखिरी सोलह दिनों का औसत तापमान 26°C है। यदि पूरे महीने का औसत तापमान 24°C है, तो 16वें दिन का तापमान क्या होगा?

HINTS 31 दिनों का तापमान = 24°C × 31 = 744

प्रथम 16 दिनों का तापमान = 22°C × 16 = 352

अंतिम 16 दिनों का तापमान = 26°C × 16 = 416

16वें दिन का तापमान = (352 + 416) – 744

= 768 – 744 = 24°C

वैकल्पिक विधि

	प्रथम		अंतिम
दिन →	16	:	16
औसत →	22°C	:	26°C

(24°C)

शुद्ध विचलन = (24 – 22) × 16 + (24 – 26) × 16

= 32 – 32 = 0

$\therefore$ 16वें दिन का तापमान = 24°C

Ex. एक सार्वजनिक पुस्तकालय में रविवार को औसतन 410 लोग आते हैं और बाकी दिनों में 230 लोग आते हैं। रविवार से शुरू होने वाले 30 दिनों के महीने में प्रतिदिन औसत उपस्थिति होगी:

HINTS रविवार से शुरू होने वाले 30 दिनों के महीने में 5 रविवार होते हैं।

	रविवार		सोमवार-शनिवार
दिन →	5	:	25
औसत →	410	:	230

माना, औसत = 230

शुद्ध विचलन = (410 – 230) × 5 = 900

$\therefore$ पूरे महीने की औसत उपस्थिति = 230 + $\frac{900}{30}$

= 230 + 30 = 260

वैकल्पिक विधि

रविवार से शुरू होने वाले 30 दिनों के महीने में 5 रविवार होते हैं

दिन → 5 : 25

1 : 5

↓×410 ↓×230

$\therefore$ औसत = $\frac{410\times1+230\times5}{6} = 260$

Ex. 27 संख्याओं का औसत शून्य है। उनमें से अधिकतम कितनी संख्याएँ शून्य से बड़ी हो सकती हैं?

HINTS अधिकतम 26 संख्याएँ शून्य से अधिक हो सकती हैं तथा 27वी संख्या, 26 संख्याओं के योग का विपरीत चिह्न होगा।

@apna_channels
Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. ग्यारह दोस्तों में से प्रत्येक ने एक यात्रा पर ₹18 खर्च किए और 12वें दोस्त ने उन सभी 12 के औसत खर्च से ₹11 कम खर्च किए। सभी बारह दोस्तों द्वारा खर्च की गई कुल राशि कितनी है?

HINTS माना, औसत = x

प्रश्नानुसार,

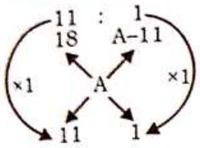
$12x = 18 \times 11 + (x - 11)$

$\Rightarrow 12x = 198 + x - 11$

$\Rightarrow 11x = 187 \Rightarrow x = 17$

$\therefore$ कुल राशि = 12×17 = ₹204

वैकल्पिक विधि



$A = 18 - 1 = 17$

$\therefore$ कुल खर्च की गई राशि = 17×12 = ₹204

Ex. किसी छात्रावास में 75 छात्र हैं। नए प्रवेश के कारण, 15 नए छात्र मेस में शामिल हो गए और मेस का दैनिक खर्च ₹240 बढ़ गया, जबकि प्रति व्यक्ति औसत खर्च ₹5 कम हो गया। मेस का मूल खर्च (₹ में) क्या था?

HINTS

छात्र	खर्च/व्यक्ति	दैनिक खर्च
75	x	$75x$
90	$(x-5)$	$90x - 450$

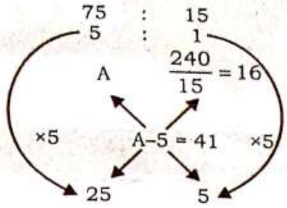
(+240)

$\Rightarrow 90x - 450 - 75x = 240$

$\Rightarrow 15x = 690 \Rightarrow x = 46$

$\therefore$ मूल खर्च = 75×46 = ₹3450

वैकल्पिक विधि



$A - 5 = 41 \Rightarrow A = 46$

मूल खर्च = 75×46 = ₹3450

Ex. 3 लोग, A, B और C के समूह का औसत भार 70 किग्रा है। जब D इस समूह में शामिल होता है, तो औसत 60 किग्रा हो जाता है। एक व्यक्ति E, जिसका भार D से 5 किग्रा अधिक है, A की जगह लेता है और B, C, D और E का औसत भार अब 59 किग्रा हो जाता है। A का भार (किग्रा में) है:

HINTS $A + B + C = 70 \times 3 = 210$ किग्रा

$A + B + C + D = 60 \times 4 = 240$ किग्रा

$D = 240 - 210 = 30$ किग्रा

$E = 30 + 5 = 35$ किग्रा

$B + C + D + E = 59 \times 4 = 236$ किग्रा

$B + C = 236 - 30 - 35 = 171$ किग्रा

$A + B + C = 210$ किग्रा

$A = 210 - 171 = 39$ किग्रा

वैकल्पिक विधि

$D = (70 - 60) \times 3 = 30$ किग्रा

$E = 30 + 5 = 35$ किग्रा

$A - E = (60 - 59) \times 4$

$\Rightarrow A - E = 4$ किग्रा $\Rightarrow A - 35 = 4$ किग्रा

$\Rightarrow A = 39$ किग्रा

@apna_channel

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

अध्याय 24

समय और कार्य

दो चरों पर आधारित

☞ यदि A किसी कार्य को x दिनों में पूरा करता है और B उसी कार्य को y दिनों में पूरा करता है, तो A और B दोनों द्वारा कार्य पूरा करने में लिया गया कुल समय $=\left(\frac{xy}{x+y}\right)$

Ex. A किसी काम को 12 दिनों में पूरा कर सकता है जबकि B उसी काम को 18 दिनों में पूरा कर सकता है। A और B मिलकर उसी काम को कितने दिनों में पूरा कर सकते हैं?

HINTS A और B द्वारा मिलकर कार्य पूरा करने में लिया गया समय

$=\frac{18\times12}{30}=7\frac{1}{5}$ दिन

वैकल्पिक विधि

12 और 18 का ल.स.प. = 36

क्षमता ↓, कुल कार्य ↓

A → 12 दिन — 3

B → 18 दिन — 2 → 36 इकाई

$\therefore T_{(A+B)}=\frac{\text{कुल कार्य}}{\text{कुल क्षमता}}=\frac{36}{5}=7\frac{1}{5}$ दिन

☞ यदि A एक कार्य का $\frac{m}{n}$ भाग D दिनों में पूरा कर सकता है। तो A द्वारा कार्य पूरा करने में लिया गया कुल समय $=\frac{n}{m}\times D$ दिन

Ex. A किसी कार्य का $\frac{1}{3}$ भाग 7 दिन में पूरा कर सकता है और B उसी कार्य का $\frac{2}{7}$ भाग 10 दिन में पूरा कर सकता है। A और B दोनों मिलकर उस कार्य को कितने दिन में पूरा कर सकते हैं?

HINTS

क्षमता ↓, कुल कार्य ↓

$A=\frac{1}{3}\to 7$ दिन, $3\to21$ दिन — 5

$B=\frac{2}{7}\to 10$ दिन, $7\to35$ दिन — 3 → 105 इकाई

(A + B) द्वारा लिया गया समय $=\frac{105}{8}=13\frac{1}{8}$ दिन

तीन चरों पर आधारित

☞ यदि A किसी कार्य को x दिनों में कर सकता है, B उसी कार्य को y दिनों में कर सकता है तथा C उसी कार्य को z दिनों में कर सकता है, तो A, B और C द्वारा एक साथ कार्य पूरा करने में लिया गया कुल समय

$=\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=\frac{xyz}{xy+yz+zx}$

Ex. A, B और C किसी कार्य को क्रमशः 12, 15 और 20 दिनों में कर सकते हैं। वे एकसाथ मिलकर उसी कार्य को कितने दिनों में पूरा करेंगे?

HINTS A, B और C द्वारा मिलकर कार्य पूरा करने में लिया गया समय

$=\frac{12\times15\times20}{(12\times15)+(15\times20)+(20\times12)}=\frac{12\times15\times20}{720}=5$ दिन

वैकल्पिक विधि

12, 15 और 20 का ल.स.प. = 60

क्षमता ↓, कुल कार्य ↓

A → 12 दिन — 5

B → 15 दिन — 4 → 60 इकाई

C → 20 दिन — 3

$\therefore T_{(A+B+C)}=\frac{\text{कुल कार्य}}{E_A+E_B+E_C}=\frac{60}{12}=5$ दिन

☞ यदि A और B किसी कार्य को x दिनों में पूरा कर सकते हैं। B और C उसी कार्य को y दिनों में पूरा कर सकते हैं। C और A उसी कार्य को 2 दिनों में पूरा कर सकते हैं तो A, B और C को एक साथ कार्य करने में लगा कुल समय

$=\frac{2xyz}{xy+yz+zx}$ दिन

Ex. राघव और आदित्य एक कार्य को 3 दिन में पूरा कर सकते हैं। आदित्य और ईशान उसी कार्य को 4 दिन में पूरा कर सकते हैं। ईशान और राघव उसी कार्य को 6 दिन में पूरा कर सकते हैं। राघव, आदित्य और ईशान को एक साथ कार्य करते हुए उसी कार्य को पूरा करने में कितने दिन लगेंगे?

HINTS राघव, आदित्य और ईशान द्वारा कार्य पूरा करने में लिया गया समय

$=\frac{2\times3\times4\times6}{(3\times4)+(4\times6)+(6\times3)}$

$=\frac{2\times3\times4\times6}{54}=2\frac{2}{3}$ दिन

वैकल्पिक विधि

क्षमता ↓, कुल कार्य ↓

R+A → 3 दिन — 4

A+I → 4 दिन — 3 → 12 इकाई

I+R → 6 दिन — 2

2(I+ R+A) = 9 इकाई

(I+R+A) की क्षमता $=\frac{9}{2}$ इकाई

$\therefore T_{I+R+A}=\frac{\text{कुल कार्य}}{\text{कुल क्षमता}}$

$=\frac{12\times2}{9}=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}$ दिन

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

एकांतर दिनों पर आधारित

Ex. A और B किसी कार्य को क्रमशः 10 दिन और 20 दिन में पूरा कर सकते हैं। A ने कार्य शुरू किया और वे वैकल्पिक दिनों पर कार्य करते हैं। कुल कार्य कितने दिनों में पूरा होगा?

HINTS

क्षमता ↓, कुल कार्य ↓

A → 10 दिन — 2

B → 20 दिन — 1

→ 20 इकाई

दिन	आदमी	कार्य
1^{st}	A	2 इकाई
2^{nd}	B	1 इकाई
$2\text{ दिन}_{\times 6}$	→	$3\text{ इकाई}_{\times 6}$
12 दिन	→	18 इकाई
1 दिन	→ A →	2 इकाई
13 दिन	→	20 इकाई

अतः कार्य 13 दिनों में पूरा हो जाएगा।

Ex. यदि मोहित, नीतू और सोमा किसी कार्य को क्रमशः 5 दिन, 6 दिन और 8 दिन में पूरा कर सकते हैं, तो यदि वे वैकल्पिक दिनों पर कार्य करें, जिसमें पहले दिन मोहित, दूसरे दिन नीतू, तीसरे दिन सोमा, चौथे दिन मोहित और इसी प्रकार आगे कार्य करते हैं, तो कार्य कितने दिनों में पूरा होगा?

HINTS 5, 6 और 8 का ल.स.प. = 120

क्षमता ↓, कुल कार्य ↓

मोहित → 5 दिन — 24

नीतू → 6 दिन — 20

सोमा → 8 दिन — 15

→ 120 इकाई

दिन	आदमी	कार्य
1^{st} →	M →	24
2^{nd} →	N →	20
3^{rd} →	S →	15
$3\text{ दिन}_{\times 2}$	→	$59\text{ इकाई}_{\times 2}$
6 दिन	→	118 इकाई
$\frac{1}{12}$ दिन	→ M →	2 इकाई
$6\frac{1}{12}$ दिन	→	120 इकाई

इसलिए, वे यह कार्य $6\frac{1}{12}$ दिन में पूरा कर लेंगे।

Ex. रत्नेश और विनीत वैकल्पिक दिनों पर कार्य करते हैं और रत्नेश पहले 3 दिन कार्य शुरु करता है। संपूर्ण कार्य $54\frac{3}{4}$ दिनों में पूरा हो जाता है। यदि रत्नेश अकेले कार्य को 48 दिनों में पूरा कर सकता है, तो विनीत अकेले कार्य को कितने दिनों में पूरा कर सकता है?

HINTS

कुल दिनों की संख्या= $54\frac{3}{4}$ दिन

रत्नेश: $27\frac{3}{4}$ दिन ; विनीत: 27 दिन

माना, रत्नेश और विनीत की कार्यक्षमता क्रमशः R और V है।

$\therefore$ कुल कार्य $= 48R = R \times \frac{111}{4} + 27V \Rightarrow 81R = 108V$

$\Rightarrow \frac{R}{V} = \frac{4}{3}$ (क्षमता)

कुल कार्य = 48 × 4 = 192 इकाई

$\therefore$ विनीत द्वारा अकेले कार्य करने में लिया गया समय $= \frac{192}{3} = 64$ दिन

Ex. अमन और राजन एक निर्माण स्थल पर कार्य कर रहे हैं। किसी इंजीनियरिंग प्रयोग में, अमन एक दीवार बना रहा है जबकि राजन उस दीवार को गिरा रहा है। अमन दीवार को 15 दिनों में पूरी तरह से बना सकता है जबकि राजन को इसे पूरी तरह से गिराने में 20 दिन लगेंगे। यदि वे वैकल्पिक दिनों पर कार्य करते हैं, जिसमें अमन पहले दिन कार्य करता है, तो पहली बार पूरी दीवार कितने दिनों में बनेगी?

HINTS 15 और 20 का ल.स.प. = 60

क्षमता ↓, कुल कार्य ↓

अमन → 15 दिन — 4

राजन → 20 दिन — –3

→ 60 इकाई

दिन	आदमी	कार्य
1^{st} →	A →	+4
2^{nd} →	R →	–3
$2\text{ दिन}_{\times 56}$	⟶	$1\text{ इकाई}_{\times 56}$
112 दिन	⟶	56 इकाई
1 दिन	→ A →	4 इकाई
113 दिन	⟶	60 इकाई

$\therefore$ दीवार पहली बार 113 दिनों में बनेगी।

@apna_channels

Ex. A और B समान रूप से कुशल हैं और यदि कोई भी छुट्टी नहीं लेता है। तो प्रत्येक व्यक्तिगत रूप से 30 दिनों में कार्य पूरा कर सकता है। A और B ने इस कार्य पर एक साथ कार्य करना शुरू किया लेकिन A ने हर चार दिन के कार्य के बाद एक दिन की छुट्टी ले ली, जबकि B ने हर पाँच दिन के कार्य के बाद एक दिन की छुट्टी ले ली। यदि दोनों ने 01 अगस्त 2022 को कार्य शुरू किया था, तो कार्य किस तारीख को पूरा हुआ?

HINTS

A : B

कार्यक्षमता → 1 : 1

कुल कार्य = 1 × 30 = 30 इकाई

दिन	आदमी	कार्य
4 दिन	A+B	8 इकाई
5^{th}	B	1 इकाई
6^{th}	A	1 इकाई
$6\text{ दिन}_{\times 3}$	→	$10\text{ इकाई}_{\times 3}$
18 दिन	→	30 इकाई

अतः 18 अगस्त 2022 को कार्य पूर्ण हो जाएगा।

कार्यविधि के दौरान कार्य छोड़ने की अवधारणा

☞ शुरुआत दिनों में काम छोड़ देना

यदि A किसी कार्य को x दिनों में पूरा कर सकता है तथा B उसी कार्य को y दिनों में पूरा कर सकता है। यदि वे दोनों d दिनों तक साथ मिलकर कार्य करते हैं, उसके बाद A कार्य छोड़ देता है, तो शेष कार्य को पूरा करने में B द्वारा लिया गया समय $= \frac{xy-(x+y)\times d}{x}$ दिन

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. A किसी कार्य को 16 दिनों में पूरा कर सकता है और B उसे 12 दिनों में पूरा कर सकता है। उन्होंने 4 दिन साथ कार्य किया और फिर A चला गया। B ने बचा हुआ कार्य पूरा किया। कार्य को पूरा करने के लिए B ने कितने दिन कार्य किया।

HINTS शेष कार्य पूरा करने में B द्वारा लिया गया समय

$= \frac{16\times12-(16+12)\times4}{16} = \frac{192-112}{16} = \frac{80}{16} = 5$ दिन

∴ कुल दिनों की संख्या जिसमें B ने काम किया = 4 + 5 = 9 दिन

वैकल्पिक विधि

16 और 12 का ल.स.प. = 48

क्षमता, कुल कार्य

A → 16 दिन — 3

B → 12 दिन — 4

→ 48 इकाई

यहाँ A और B ने 4 दिन कार्य किया और उसके बाद B ने बचा हुआ कार्य पूरा कर लिया। माना कि B ने अकेले जितने दिन कार्य किया वह t है।

इसलिए, 4(A+B) + B × t = कुल कार्य

⇒ 28 + 4t = 48 ⇒ 4t = 20 ⇒ t = 5 दिन

∴ कुल दिनों की संख्या जिसमें B ने कार्य किया = 4 + 5 = 9 दिन

☞ अंतिम दिनों में काम छोड़ देना

A किसी कार्य को p दिनों में पूरा कर सकता है और B उसी कार्य को q दिनों में पूरा कर सकता है। वे साथ मिलकर कार्य शुरू करते हैं लेकिन A कार्य खत्म होने से d दिन पहले ही कार्य छोड़ देता है। कार्य पूरा करने में लगने वाला समय = $\frac{pq+qd}{p+q}$ दिन

Ex. A और B अकेले काम करते हुए क्रमशः 8 दिन और 12 दिन में एक कार्य पूरा कर सकते हैं। उन्होंने एक साथ कार्य करना शुरू किया लेकिन A ने कार्य पूरा होने से 2 दिन पहले कार्य छोड़ दिया। कार्य कितने दिनों में पूरा हुआ?

HINTS कार्य पूरा करने के लिए आवश्यक समय

$= \frac{8\times12+12\times2}{(8+12)} = \frac{120}{20} = 6$ दिन

वैकल्पिक विधि

सुझावः बचे हुए दिनों (कार्य पूरा होने से पहले) के कार्य को कुल कार्य में जोड़ें और मूल अवधारणा का उपयोग करके हल करें।

8 और 12 का ल.स.प. = 24

क्षमता, कुल कार्य

A → 8 दिन — 3

B → 12 दिन — 2

→ 24 +6 = 30 इकाई

कार्य पूरा करने के लिए आवश्यक समय = $\frac{\text{कुल कार्य}}{\text{कुल क्षमता}} = \frac{30}{5} = 6$ दिन

☞ शुरुआत और अंत दोनों ओर से कार्य छोड़ देना

A किसी कार्य को x दिनों में, B, y दिनों में तथा C, z दिनों में पूरा कर सकता है। यदि वे तीनों एक साथ कार्य शुरू करते हैं, लेकिन B कार्य पूरा होने से d दिन पहले कार्य छोड़ देता है तथा C कार्य शुरू करने के D दिन बाद कार्य छोड़ देता है, तो कार्य पूरा करने में लगने वाला समय

$= \frac{xyz+zx\times d-xy\times D}{yz+zx}$ दिन

Ex. A, B और C किसी कार्य को क्रमशः 10, 12 और 15 दिनों में पूरा कर सकते हैं। वे एक साथ कार्य शुरू करते हैं लेकिन 3 दिन बाद, C कार्य छोड़ देता है और कार्य पूरा होने से 4 दिन पहले, B कार्य छोड़ देता है। कुल कार्य कितने दिनों में पूरा होगा?

HINTS कार्य पूरा करने के लिए आवश्यक समय

$= \frac{10\times12\times15+15\times10\times4-10\times12\times3}{12\times15+15\times10} = \frac{2040}{330} = \frac{68}{11}$ दिन

वैकल्पिक विधि

क्षमता, कुल कार्य

A → 10 दिन — 6

B → 12 दिन — 5

C → 15 दिन — 4

→ 60 इकाई

∴ कार्य पूरा करने के लिए आवश्यक समय

$= \frac{\text{कुल कार्य}}{\text{कुल क्षमता}} = \frac{60-3C+4B}{A+B} = \frac{60-12+20}{11} = \frac{68}{11}$ दिन

कार्यक्षमता की अवधारणा

किसी मशीन या व्यक्ति की कार्यक्षमता प्रति इकाई समय में किये गये कार्य की दर है।

कार्यक्षमता (E) = $\frac{\text{किया गया कार्य}}{\text{लिया गया समय}}$

साथ ही, कार्यक्षमता ∝ $\frac{\text{किया गया कार्य}}{\text{लिया गया समय}}$

☞ यदि A की कार्यक्षमता, B की कार्यक्षमता से दोगुनी है, तो A और B द्वारा लिए गए समय का अनुपात = 1 : 2

Ex. टिम, जोया से तीन गुना कुशल कारीगर है और वे दोनों मिलकर एक कार्य 75 दिनों में पूरा करते हैं। टिम अकेले उस कार्य को कितने दिनों में पूरा करेगा?

HINTS टिम : जोया

क्षमता → 3 : 1

कुल कार्य = $(E_T + E_J)$ × लिया गया समय = (3 + 1) × 75 = 300 इकाई

∴ टिम द्वारा अकेले कार्य पूरा करने में लिया गया समय

$= \frac{\text{कुल कार्य}}{E_T} = \frac{300}{3} = 100$ दिन

MDH पर आधारित

$$\frac{M_1D_1H_1}{W_1} = \frac{M_2D_2H_2}{W_2}$$

जहाँ,

M → आदमी, D → दिन

H → घंटे, W → कार्य/वेतन

Ex. यदि 35 आदमी एक काम को 6 दिन में पूरा कर सकते हैं, तो 7 आदमी उसी काम का आधा हिस्सा कितने दिन में पूरा कर सकेंगे?

HINTS

$\frac{M_1D_1H_1}{W_1} = \frac{M_2D_2H_2}{W_2}$

$\Rightarrow \frac{35\times6}{2} = \frac{7\times x}{1} \Rightarrow x = 15$ दिन

@apna_channels
Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. 18 व्यक्ति प्रतिदिन 8 घंटे कार्य करके 10 दिनों में 3 इकाई कार्य पूरा कर सकते हैं। 25 व्यक्तियों को प्रतिदिन 6 घंटे कार्य करके 5 इकाई कार्य पूरा करने में कितने दिन लगेंगे?

HINTS $\frac{M_1D_1H_1}{W_1} = \frac{M_2D_2H_2}{W_2}$

$\Rightarrow \frac{18\times10\times8}{3} = \frac{25\times x\times6}{5} \Rightarrow x = 16$ दिन

Ex. 64 आदमी प्रतिदिन 8 घंटे कार्य करके किसी कार्य को 9 दिन में पूरा करने की योजना बनाते हैं। हालांकि, 5 दिन बाद उन्हें पता चलता है कि उन्होंने केवल 40% कार्य ही पूरा किया है। अब वे शेष कार्य 4 दिन में पूरा करना चाहते हैं। लक्ष्य को प्राप्त करने के लिए उन्हें प्रतिदिन कितने घंटे कार्य करना होगा?

HINTS $\frac{M_1D_1H_1}{W_1} = \frac{M_2D_2H_2}{W_2}$

$\Rightarrow \frac{64\times5\times8}{40\%} = \frac{64\times4\times x}{60\%} \Rightarrow x = 15$ घंटे

Ex. एक छात्रावास में 300 छात्रों के लिए एक महीने के भोजन का प्रावधान था। 20 दिनों के बाद, 50 छात्र छात्रावास छोड़कर चले गए। बचा हुआ भोजन कितने दिनों तक चलेगा? (1 महीना = 30 दिन)

HINTS 20 दिन के बाद शेष समय = 30 – 20 = 10 दिन

20 दिन के बाद शेष छात्र = 300 – 50 = 250

$\because M_1D_1 = M_2D_2 \Rightarrow 300 \times 10 = 250 \times D_2 \Rightarrow D_2 = 12$

∵ शेष भोजन 12 दिनों तक चलेगा।

Ex. (N + 18) व्यक्ति, जिनमें से प्रत्येक प्रतिदिन 7.5 घंटे कार्य करता है, 20 दिनों में एक कार्य का 48% पूरा कर सकते हैं। (N + 12) व्यक्ति शेष कार्य 30 दिनों में पूरा कर सकते हैं यदि उनमें से प्रत्येक प्रतिदिन 6.5 घंटे कार्य करता है तो N का मान ज्ञात करें।

HINTS प्रश्नानुसार,

$\frac{(N+18)\times7.5\times20}{48\%} = \frac{(N+12)\times6.5\times30}{52\%}$

$\Rightarrow (N + 18)5 = 6(N + 12) \Rightarrow 5N + 90 = 6N + 72$

$\Rightarrow N = 18$

MWC पर आधारित

Ex. 6 पुरुष या 2 महिलाएँ या 4 लड़के एक कार्य को 77 दिनों में पूरा कर सकते हैं। 1 पुरुष, 1 महिला और 1 लड़का मिलकर उसी कार्य को कितने दिनों में पूरा करेंगे?

HINTS कुल कार्य $\Rightarrow 6M \times 77 = 2W \times 77 = 4B \times 77$

$\Rightarrow 6M = 2W = 4B$

M : W : B

2 : 6 : 3

माना, आवश्यक दिनों की संख्या 'x' है।

$\therefore (1M + 1W + 1B)x = 6M \times 77$

$\Rightarrow 11x = 6 \times 2 \times 77 \Rightarrow x = 84$ दिन

Ex. 3 पुरुष एक कार्य को 10 दिन में पूरा कर सकते हैं, 4 महिलाएँ इसे 12 दिन में पूरा कर सकती हैं और 10 योग्य कर्मचारी इसे 6 दिन में पूरा कर सकते हैं। 4 पुरुष, 4 महिलाएँ और 4 योग्य कर्मचारी प्रतिदिन एक साथ कार्य करके कितने दिनों में कार्य पूरा कर लेंगे?

HINTS प्रश्नानुसार,

कुल कार्य $\Rightarrow 3M \times 10 = 4W \times 12 = 10L \times 6$

$\Rightarrow 5M = 8W = 10L$

M : W : L

8 : 5 : 4

कुल कार्य = 30M = 30 × 8 = 240 इकाई

∴ 4M + 4W + 4L द्वारा लिया गया समय = $\frac{240}{4\times17} = \frac{60}{17}$ दिन

ठेकेदार पर आधारित

Ex. एक ठेकेदार ने 80 दिनों में एक काम पूरा करने का फैसला किया और शुरुआत में 60 पुरुषों को और 20 दिनों के बाद अतिरिक्त 20 पुरुषों को नियुक्त किया और काम को समय के अनुसार पूरा किया। यदि उसने अतिरिक्त पुरुषों को नियोजित नहीं किया होता, तो कार्य को पूरा करने के लिए उसे कितने अतिरिक्त दिनों की आवश्यकता होती (निकटतम पूर्णांक तक पूर्णांकित)?

HINTS 60 पुरुष → 20 दिन

80 पुरुष → 60 दिन

कुल कार्य = (60 × 20) + (80 × 60) = 6000

∴ आवश्यक दिन = $\frac{6000}{60}$ = 100 दिन

अतिरिक्त दिन = 100 – 80 = 20 दिन

वैकल्पिक विधि

60 M × 20 + 80 M × 60 = 60 M × n ⇒ 6000 = 60n

⇒ n = 100

∴ अतिरिक्त दिन = 100 – 80 = 20 दिन

@apna_channels

AP का अनुप्रयोग

Ex. पुरुषों के एक समूह ने 4 दिनों में एक कार्य पूरा करने का फैसला किया। हालांकि, हर दिन 10 पुरुष कार्य छोड़ देते थे, इसलिए काम 7वें दिन के अंत में पूरा हुआ। शुरुआत में कितने पुरुष थे?

HINTS कुल कार्य $\Rightarrow (x) + (x - 10) + \ldots\ldots\ldots\ldots + (x - 60) = 4x$

$\Rightarrow 7x - 210 = 4x \Rightarrow 3x = 210 \Rightarrow x = 70$

∴ शुरुआत में 70 आदमी थे।

Ex. 5 व्यक्तियों में से प्रत्येक व्यक्ति स्वतंत्र रूप से किसी कार्य को 20 दिनों में पूरा कर सकता है। कार्य एक व्यक्ति द्वारा शुरू किया जाता है। अगले दिन, एक और व्यक्ति जुड़ता है और हर अगले दिन, एक और व्यक्ति जुड़ता है। पांचवें दिन से, पांच व्यक्ति एक टीम के रूप में कार्य करना जारी रखते हैं। कार्य कितने दिनों में पूरा होगा?

HINTS माना, प्रत्येक व्यक्ति की कार्यक्षमता 1 इकाई है।

कुल कार्य = 20 इकाई

दिन → 1^{st} 2^{nd} 3^{rd} 4^{th} 5^{th} 6^{th}

व्यक्ति → 1 2 3 4 5 5

15 व्यक्ति = 15 इकाई

शेष कार्य = 20 - 15 = 5 इकाई

शेष कार्य पूरा होने में लगने वाले समय = $\frac{5}{5}$ = 1 दिन

∴ कुल कार्य = 5 + 1 = 6 दिन

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

विविध

☞ यदि A अकेले कार्य करते हुए A और B से 'x' दिन अधिक लेता है और B अकेले कार्य करते हुए A और B से 'y' दिन अधिक लेता है, तो A और B द्वारा एक साथ कार्य करते हुए समान कार्य पूरा करने में लगे दिनों की संख्या $= \sqrt{xy}$ दिन

Ex. A और B एक साथ कार्य करते हुए किसी कार्य को 'd' दिनों में पूरा कर सकते हैं। अकेले कार्य करते हुए, A को उसी कार्य को पूरा करने में (8 + d) दिन लगते हैं और B को (18 + d) दिन लगते हैं। 'd' का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS $d = \sqrt{18 \times 8} = \sqrt{144} = 12$ दिन

Ex. जब A अकेले कोई कार्य करता है, तो उसे A और B द्वारा मिलकर कार्य करने में लिए गए समय से 25 दिन अधिक लगते हैं। दूसरी ओर, B अकेले A और B द्वारा मिलकर कार्य करने में लिए गए समय से 16 दिन अधिक लेता है। A और B मिलकर कार्य करने में कितने दिन लेंगे?

HINTS A और B द्वारा मिलकर कार्य पूरा करने में लगने वाले समय

$= \sqrt{25 \times 16} = 20$ दिन

Ex. एक कार्यालय में, 75 कर्मचारी 60 दिनों में एक परियोजना पूरी कर सकते हैं। कुछ दिनों के बाद, 15 कर्मचारियों ने नौकरी छोड़ दी और परियोजना 65 दिनों में पूरी हो गई। कितने दिनों के बाद 15 कर्मचारी नौकरी छोड़ कर चले गए?

HINTS माना, 15 कर्मचारी 'n' दिनों के बाद चले गए।

प्रश्नानुसार,

$75 \times 60 = (75 \times n) + 60 \times (65 - n)$

$\Rightarrow 4500 = 75n + 3900 - 60n \Rightarrow 600 = 15n$

$\Rightarrow n = 40$ दिन

Ex. एक कार्य L, P और Q ने मिलकर पूरा किया। L और P ने मिलकर 50 प्रतिशत कार्य पूरा किया और P और Q ने मिलकर 60 प्रतिशत कार्य पूरा किया। तीनों में से कौन सबसे कुशल है?

HINTS माना, कुल कार्य = 100 इकाई

∵ L और P ने मिलकर 50% कार्य पूरा किया।

∴ Q = 100 – 50 = 50 इकाई

∵ P और Q ने मिलकर 60% कार्य पूरा किया।

∴ L = 100 – 60 = 40 इकाई

इसलिए, P = 100 – (50 + 40) = 10 इकाई

∴ Q सबसे कुशल है।

Ex. चार व्यक्ति, P, Q, R, S को एक कार्य करने के लिए इस शर्त के साथ नियुक्त किया गया था कि P; Q; R; S क्रमशः (सोमवार, गुरुवार); (मंगलवार, शुक्रवार); (बुधवार, शनिवार); (रविवार) को कार्य करेंगे। कार्य सोमवार को शुरू हुआ और 15वें दिन पूरा हुआ जो कि सोमवार भी था। यदि इस कार्य को करने के संबंध में P, Q, R, S की कार्यक्षमता 1 : 2 : 3 : 4 के अनुपात में थी, तो लगातार अकेले कार्य करते हुए R कितने दिनों में कार्य पूरा कर सकता था?

HINTS दिया है,

P, Q, R, S की कार्यक्षमता 1 : 2 : 3 : 4

7 दिनों का कुल कार्य = 1 + 2 + 3 + 1 + 2 + 3 + 4 = 16 इकाई

15 दिनों का कुल कार्य = 16 × 2 + 1 = 33 इकाई

∴ R के द्वारा लिया गया समय $= \frac{33}{3} = 11$ दिन

कार्य एवं मजदूरी पर आधारित

☞ कुल मजदूरी = प्रतिदिन मजदूरी × कार्य दिवसों की संख्या

☞ मजदूरी का बंटवारा व्यक्तियों की कार्यकुशलता के अनुपात में किया जाता है।

Ex. A और B ने मिलकर 15 दिनों में कार्य करके कुल 18,000 रुपये प्राप्त किए। काम में A की क्षमता B की तुलना में 5 गुना थी। A की दैनिक मजदूरी (रुपये में) थीः

HINTS A और B की क्षमता का अनुपात = 5 : 1

A और B की प्रतिदिन की मजदूरी $= \frac{\text{कुल राशि}}{\text{लिया गया समय}}$

$= \frac{18000}{15} = ₹1200$

A की दैनिक मजदूरी $= 1200 \times \frac{5}{6} = ₹1000$

Ex. A और B, 36,000 रुपये में एक प्रोजेक्ट को पूरा करने की जिम्मेदारी लेते हैं। A अकेला उस कार्य को 25 दिनों में कर सकता हैं। उन्होंने 5 दिनों तक एक साथ कार्य किया। अगले पाँच दिनों तक, B ने अकेले कार्य किया। उसके बाद, A ने B को हटाकर स्वयं शेष कार्य को 5 दिनों में पूरा किया। आय में A का हिस्सा कितना है?

HINTS प्रश्नानुसार,

$5(A + B) + 5B + 5A = 36000 \Rightarrow 10(A + B) = 36000$

∵ A एक काम 25 दिनों में कर सकता है।

∴ 1 दिन में A द्वारा प्राप्त राशि $= \frac{36000}{25}$ रुपये

अतः, A द्वारा 10 दिनों में प्राप्त राशि

$= \frac{36000}{25} \times 10 = 36 \times 4 \times 100 = ₹14400$

वैकल्पिक विधि

प्रश्नानुसार,

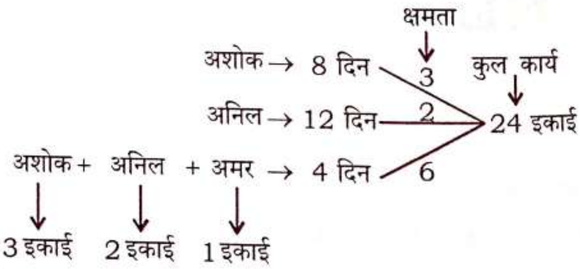
कुल कार्य $\Rightarrow 5(A + B) + 5B + 5A = 25A$

$\Rightarrow 10A + 10B = 25A \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{2}{3}$

∴ A का हिस्सा $= \frac{36000}{25} \times 2 = ₹14400$

Ex. अशोक और अनिल ने 4,500 रुपये में एक कार्य करने का बीड़ा उठाया। अशोक अकेले उस कार्य को 8 दिन में और अनिल 12 दिन में कर सकता है। अमर की सहायता से, उन्होंने कार्य 4 दिन में पूरा कर लिया। अमर का हिस्सा क्या है?

HINTS



प्रश्नानुसार,

(3 + 2 + 1) इकाई → ₹4500

1 इकाई → = ₹750

∴ अमर का हिस्सा = ₹750

Selected हैं Selection दिलाएंगे

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

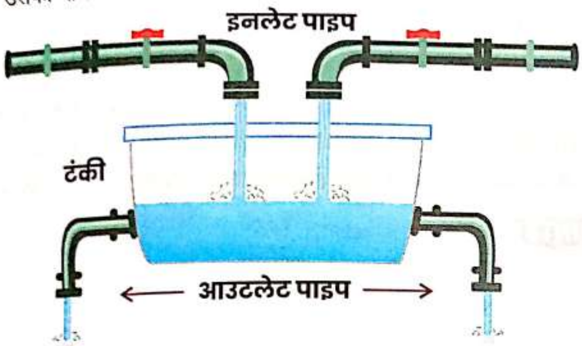
अध्याय 25

नल और टंकी

रिसे हुए या भरे गए पानी की मात्रा = दर × समय

इनलेट: टंकी को भरने वाले पाइप को इनलेट कहते है और उसकी क्षमता को धनात्मक (+) में लिखते है।

आउटलेट: टंकी को खाली करने वाले पाइप को आउटलेट कहते है और उसकी क्षमता को ऋणात्मक (–) में लिखते है।



पूरी तरह से सिर्फ भरना या खाली करना

☞ दो नल 'A' और 'B' एक टैंक को क्रमशः 'x' घंटे और 'y' घंटे में भर या खाली कर सकते हैं। यदि दोनों नल एक साथ खोले जाते हैं, तो टैंक को भरने में कितना समय लगेगा?

आवश्यक समय = $\left(\frac{xy}{x+y}\right)$ घंटे

Ex. दो पाइप X और Y एक टंकी को क्रमशः 14 घंटे और 21 घंटे में भर सकते हैं। टंकी को भरने के लिए दोनों पाइप एक साथ खोले जाते हैं। खाली टंकी कितने घंटे में भर जायेगी?

HINTS आवश्यक समय = $\frac{14\times21}{14+21} = \frac{42}{5} = 8\frac{2}{5}$ घंटे

वैकल्पिक विधि

क्षमता, कुल धारिता

X → 14 घंटे → 3

Y → 21 घंटे → 2

कुल धारिता → 42

टैंक को भरने में लगा समय = $\frac{42}{3+2} = \frac{42}{5} = 8\frac{2}{5}$ घंटे

Ex. पाइप P अकेले एक टैंक को 15 घंटे में खाली कर सकता है। पाइप Q अकेले उसी टैंक को 10 घंटे में खाली कर सकता है। वे दोनों मिलकर टैंक को कितने समय में खाली कर सकते हैं?

HINTS

क्षमता, कुल धारिता

P → 15 घंटे → 2

Q → 10 घंटे → 3

कुल धारिता → 30

आवश्यक समय = $\frac{30}{2+3}$ = 6 घंटे

Ex. पाइप A, B और C एक टैंक को क्रमशः 20, 30 और 60 घंटे में भर सकते हैं। पाइप A, B और C को एक ही दिन क्रमशः सुबह 7 बजे, सुबह 8 बजे और सुबह 9 बजे खोला जाता है। टैंक कब भर जाएगा?

HINTS

क्षमता, कुल धारिता

7 AM A → 20घंटे → 3

8 AM B → 30घंटे → 2

9 AM C → 60घंटे → 1

कुल धारिता → 60

A द्वारा सुबह 9 बजे तक भरी गई मात्रा = 2 × 3 = 6 इकाई

B द्वारा सुबह 9 बजे तक भरी गई मात्रा = 2 × 1 = 2 इकाई

शेष मात्रा = 60 – (6 + 2) = 52 इकाई

आवश्यक समय = $\frac{52}{6} = 8\frac{2}{3}$ घंटे = 8 घंटे 40 मिनट

समय = 9 a.m. + 8 घंटे 40 मिनट = 5 : 40 p.m.

जब भरने वाले तथा खाली करने वाले पाइप एक साथ कार्य करें

☞ नल 'A' एक टैंक को 'x' घंटे में भर सकता है और नल 'B' टैंक को 'y' घंटे में खाली कर सकता है। जब दोनों नलों को एक साथ खोला जाता है तो टंकी भरने में कितना समय लगेगा।

अभीष्ट समय = $\left(\frac{xy}{y-x}\right)$ घंटे [$y > x$]

Ex. एक नल एक टंकी को 10 मिनट में भर सकता है और दूसरा नल इसे 12 मिनट में खाली कर सकता है। यदि दोनों नल खुले हैं, तो टंकी भरने में कितना समय (घंटों में) लगेगा?

HINTS अभीष्ट समय = $\frac{12\times10}{12-10} = \frac{60}{1}$ = 60 मिनट = 1 घंटा

वैकल्पिक विधि

क्षमता, कुल धारिता

P^+ → 10 मिनट → 6

Q^- → 12 मिनट → –5

कुल धारिता → 60

P और Q की क्षमता = 6 – 5 = 1

P और Q द्वारा टैंक को भरने में लगा समय = $\frac{60}{1}$ = 60 मिनट = 1 घंटा

सकारात्मक परिणाम दर्शाता है कि टैंक भर रहा है और नकारात्मक परिणाम दर्शाता है कि टैंक खाली हो रहा है।

☞ जब दोनों पाइप खुलते हैं तो टैंक खाली होने में लगा समय

= $\left(\frac{xy}{x-y}\right)$ घंटे [$x > y$]

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. पाइप A एक खाली टैंक को 30 घंटे में पूरा भर सकता है। पाइप B इस पूरी तरह से भरे टैंक को 20 घंटे में खाली कर सकता है। यदि दोनों पाइप एक साथ खोले जाते हैं, तो पूरा टैंक कितने समय में खाली हो जाएगा?

HINTS टैंक खाली करने में लगा समय = $\frac{30\times20}{30-20}=\frac{600}{10}$ = 60 घंटे

वैकल्पिक विधि

	क्षमता	कुल धारिता
A → 30 घंटे	+2	60
B → 20 घंटे	–3	

टैंक खाली करने में लगा समय = $\frac{60}{1}$ = 60 घंटे

☞ यदि x, y, z,.......... सभी नल एक साथ खोले जाते हैं, तो टैंक को भरने/खाली करने में लगने वाला समय होगा:

$$\frac{1}{x}\pm\frac{1}{y}\pm\frac{1}{z}\pm......=\frac{1}{T}$$

जहाँ T, आवश्यक समय है।

Ex. पाइप A एक टंकी को 4 घंटे में भर सकता है और पाइप B उसी टंकी को 5 घंटे में भर सकता है। पाइप C एक पूरी टंकी को 3 घंटे में खाली कर सकता है। यदि तीनों पाइप एक साथ खोले जाते हैं, तो टंकी को भरने में लगा समय (मिनटों में) है: (निकटतम अंक तक पूर्णांकित करें)

HINTS $\frac{1}{T}=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{3}=\frac{15+12-20}{60}=\frac{7}{60}\Rightarrow T=\frac{60}{7}$

तीनों पाइप द्वारा टैंक भरने में लिया गया समय = $\frac{60}{7}$ घंटे

$=\frac{60\times60}{7}\sim 514$ मिनट

वैकल्पिक विधि

4, 5 और 3 का ल.स.प. = 60

	क्षमता	कुल धारिता
A → 4 घंटे	15	60
B → 5 घंटे	12	
C → 3 घंटे	–20	

A + B + C = 15 + 12 – 20 = 7

तीनों पाइप द्वारा टैंक भरने में लिया गया समय = $\frac{60}{7}$ घंटे

$=\frac{60\times60}{7}\sim 514$ मिनट

Ex. दो पाइप एक टंकी को क्रमशः 12 घंटे और 18 घंटे में भर सकते हैं, जबकि एक तीसरा पाइप उसे 8 घंटे में खाली कर सकता है। यदि तीनों पाइपों को एक साथ खोल दिया जाए, तो खाली टंकी को भरने में कितना समय (घंटों में) लगेगा?

HINTS

	क्षमता	कुल धारिता
P → 12 घंटे	6	72
Q → 18 घंटे	4	
R → 8 घंटे	–9	

खाली टैंक को भरने में उनके द्वारा लिया गया समय = $\frac{72}{6+4-9}$ = 72 घंटे

Ex. प्रत्येक इनलेट पाइप एक खाली टंकी को 84 घंटे में भर सकता है जबकि प्रत्येक ड्रेन पाइप उसी टंकी को भरी हुई अवस्था से 105 घंटे में खाली कर सकता है। जब टंकी खाली होती है, तो 9 इनलेट पाइप और 10 आउटलेट पाइप एक साथ खोले जाते हैं। कितने घंटे बाद टंकी पूरी तरह से भर जाएगी?

HINTS

	क्षमता	कुल धारिता
I → 84 घंटे	5	420
O → 105 घंटे	–4	

9 इनलेट पाइप और 10 आउटलेट पाइप द्वारा 1 घंटे में भरा गया टैंक का भाग = [9 × 5 + 10 × (– 4)] = 5

अभीष्ट समय = $\frac{420}{5}$ = 84 घंटे

Ex. पाइप A एक टैंक को 10 घंटे में भर सकता है। पाइप B उसी टैंक को 12 घंटे में भर सकता है। पाइप C भरे हुए टैंक को 16 घंटे में खाली कर सकता है। सभी पाइप सुबह 8:00 बजे खोले जाते हैं और पाइप A और B सुबह 10:00 बजे बंद कर दिए जाते हैं। शुरू होने के कितने समय बाद टैंक खाली हो जाएगा।

HINTS

	क्षमता	कुल धारिता
A → 10 घंटे	24	240
B → 12 घंटे	20	
C → 16 घंटे	–15	

सभी पाइप सुबह 8:00 बजे खोले जाते हैं और पाइप (A और B) सुबह 10:00 बजे बंद किए जाते हैं।

तो, (24 + 20 – 15) × 2 घंटे = (44 – 15) × 2

= 29 × 2 = 58 इकाई

C द्वारा टैंक खाली करने में लिया गया समय = $\frac{58}{15}$ घंटे

= 3 घंटे $\frac{13}{15}$ × 60 मिनट = 3 घंटे 52 मिनट

तो, कुल समय = (2 घंटे + 3 घंटे 52 मिनट) = 5 घंटे 52 मिनट

जब नल/पाइप एकान्तर क्रम में खोले जाते है

Ex. पाइप X एक टैंक को 9 घंटे में भर सकता है और पाइप Y इसे 21 घंटे में भर सकता है। यदि उन्हें वैकल्पिक घंटों पर खोला जाता है और पाइप X को पहले खोला जाता है, तो कितने घंटों में टैंक भर जाएगा?

HINTS

	क्षमता	कुल धारिता
X → 9 घंटे	7	63
Y → 21 घंटे	3	

शुरूआत X से किया गया।

घंटे		पाइप		कार्य
1st	→	X	→	7
2nd	→	Y	→	3
2 घंटे ×6			→	10×6 इकाई
12 घंटे			→	60 इकाई
$\frac{3}{7}$ घंटे	→	X	→	3 इकाई
$12\frac{3}{7}$ घंटे			→	63 इकाई

∴ कुल समय = $12\frac{3}{7}$ घंटे

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. एक इनलेट पाइप एक खाली टैंक को $4\frac{1}{2}$ घंटे में भर सकता है जबकि एक आउटलेट पाइप एक पूरी तरह से भरे टैंक को $7\frac{1}{5}$ घंटे में खाली कर देता है। टैंक शुरू में खाली है और इनलेट पाइप से शुरू होते हुए दोनों पाइप बारी-बारी से एक- एक घंटे के लिए खोले जाते है जब तक की टैंक पूरी तरह से भर न जाये तो टैंक पूरा कितने समय में भरेगा।

HINTS

क्षमता ↓ , कुल धारिता ↓

इनलेट → $\frac{9}{2}$ घंटे → 8

आउटलेट → $\frac{36}{5}$ घंटे → –5

कुल धारिता = 36

घंटे		पाइप		कार्य
1^{st}	→	इनलेट	→	8
2^{nd}	→	आउटलेट	→	–5
2 घंटे $_{\times 10}$	→			$3_{\times 10}$ इकाई
20 घंटे	→			30 इकाई
$\frac{6}{8}$ घंटे	→	इनलेट	→	6 इकाई
$20\frac{6}{8}$ घंटे	→			36 इकाई

टैंक को पूरा भरने में लिया गया समय $= 20\frac{6}{8} = 20\frac{3}{4}$ घंटे

टैंक की धारिता

Ex. पाइप A और B एक टैंक को क्रमशः 43.2 मिनट और 108 मिनट में भरते हैं, पाइप C इसे 3 लीटर/मिनट की दर से खाली कर सकता है। जब तीनों पाइप एक साथ खोले जाते हैं, तो वे टैंक को 54 मिनट में भर देंगे। टैंक की धारिता (लीटर में) है?

HINTS

क्षमता ↓ , कुल धारिता ↓

A → 43.2 मिनट → 5

B → 108 मिनट → 2

A + B – C → 54 मिनट → 4

कुल धारिता = 216 इकाई

∴ C की क्षमता = 5 + 2 – 4 = 3 इकाई/मिनट

C तीन इकाई एक मिनट में खाली करता है।

3 इकाई = 3 लीटर

इसलिए टैंक की धारिता = 216 × 1 = 216 लीटर

Ex. दो पाइप एक टैंक को अलग-अलग क्रमशः 36 मिनट और 45 मिनट में भर सकते हैं। टैंक में लगा एक ड्रेन पाइप प्रति मिनट 40 लीटर पानी निकाल सकता है। यदि तीनों पाइप एक साथ खोल दिए जाए, तो टैंक एक घंटे में भर जाता है। टैंक की धारिता (लीटर में) ज्ञात कीजिए।

HINTS माना, ड्रेन पाइप C है।

क्षमता ↓ , कुल धारिता ↓

A → 36 मिनट → 5

B → 45 मिनट → 4

A + B – C → 60 मिनट → 3

कुल धारिता = 180 इकाई

C की क्षमता = 5 + 4 – 3 = 6

6 इकाई → 40 लीटर

180 इकाई → $\frac{40}{6} \times 180 = 1200$ लीटर

∴ टैंक की धारिता = 1200 लीटर

टंकी में छिद्र/रिसाव पर आधारित

☞ यदि एक पाइप एक टैंक को 'x' घंटे में भरता है लेकिन टैंक में रिसाव के कारण इसे भरने में 't' घंटे अधिक लगते हैं। यदि टैंक पूरी तरह से भर जाता है, तो यह कितने घंटों में खाली हो जाएगा? [रिसाव आउटलेट के कारण]

अभीष्ट समय $= \frac{x(x+t)}{t}$ घंटे

Ex. यदि एक पाइप किसी टैंक को 20 घंटे में भरता है लेकिन टैंक में रिसाव के कारण इसे भरने में 4 घंटे अधिक लगते हैं। यदि टैंक पूरी तरह से भर जाता है, तो यह कितने घंटे में खाली हो जाएगा?

HINTS रिसाव के कारण टैंक खाली होने में लगा समय

$= \frac{20 \times (20+4)}{4} = 120$ घंटे

वैकल्पिक विधि

क्षमता ↓ , कुल धारिता ↓

F → 20 घंटे → 6

F – L → 24 घंटे → 5

कुल धारिता = 120

रिसाव की क्षमता (L) = 6 – 5 = 1

रिसाव के कारण टैंक खाली होने में लगा समय $= \frac{120}{1} = 120$ घंटे

Ex. पाइप A एक टैंक को 12 घंटे में भर सकता है और पाइप B इसे भरने में 18 घंटे लेता है। दोनों पाइपों को एक साथ खोला गया और एक रिसाव पाया गया जिससे भरने का समय 48 मिनट बढ़ गया। रिसाव के कारण टैंक पूरा खाली होने में कितने घंटे लगेंगे?

HINTS $t_{(A+B)} = \frac{12 \times 18}{12+18} = 7.2 = 7$ घंटे 12 मिनट

अभीष्ट समय $= \frac{x(x+t)}{t} = \frac{7.2\left(7.2+\frac{48}{60}\right)}{\frac{48}{60}} = \frac{7.2 \times 8}{0.8} = 72$ घंटे

वैकल्पिक विधि

$t_{(A+B)} = \frac{12 \times 18}{12+18} = 7.2 = 7$ घंटे 12 मिनट

A + B – C = 7 घंटे 12 मिनट + 48 मिनट

= 8 घंटे

क्षमता ↓ , कुल धारिता ↓

A → 12 घंटे → 6

B → 18 घंटे → 4

A + B – C → 8 घंटे → 9

कुल धारिता = 72

रिसाव की क्षमता = 6 + 4 – 9 = 1

अभीष्ट समय $= \frac{72}{1} = 72$ घंटे

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

कार्यविधि के दौरान नल को बंद करने पर आधारित

☞ दो नल A और B किसी टैंक को क्रमशः x घंटे और y घंटे में भर सकते हैं। यदि दोनों पाइप एक साथ खोल दिए जाएं, तो वह समय जिसके बाद पाइप B को बंद कर देना चाहिए ताकि टैंक t घंटे में भर जाए।

अभीष्ट समय = $\left[y\left(1-\frac{t}{x}\right)\right]$ घंटे

Ex. दो पाइप A और B एक टैंक को क्रमशः 48 मिनट और 66 मिनट में भर सकते हैं। यदि दोनों पाइप एक साथ खोले जाते हैं, तो कितने मिनट बाद पाइप B को बंद किया जाना चाहिए ताकि टैंक 32 मिनट में भर जाए?

HINTS अभीष्ट समय = $y\left(1-\frac{t}{x}\right) = 66\left(1-\frac{32}{48}\right) = 66 \times \frac{16}{48}$

= 22 मिनट

वैकल्पिक विधि

क्षमता ↓ / कुल धारिता ↓

A → 48 मिनट — 11

B → 66 मिनट — 8

कुल धारिता — 528

32 मिनट में पाइप A द्वारा टैंक भरा गया = 32 × 11 = 352 इकाई

शेष भाग = 528 – 352 = 176 इकाई

∴ पाइप B द्वारा लिया गया समय = $\frac{176}{8}$ = 22 मिनट

अतः 22 मिनट बाद पाइप B बंद हो जाना चाहिए।

☞ दो नल A और B एक टंकी को क्रमशः x घंटे और y घंटे में भर सकते हैं। यदि दोनों नल एक साथ खोल दिए जाएँ और टंकी भरने के z घंटे पहले नल A को बंद कर दिया जाए, तो टंकी कितने समय में भर जाएगी?

आवश्यक समय = $\frac{(x+z)y}{(x+y)}$

- यदि टंकी भरने के z घंटे पहले नल B को बंद कर दिया जाए, तो आवश्यक समय = $\frac{(y+z)x}{(x+y)}$

Ex. दो इनलेट पाइप, P_1 और P_2, एक टंकी को क्रमशः 20 घंटे और 30 घंटे में भर सकते हैं। उन्हें एक ही समय पर खोला गया, लेकिन टंकी भरने से 5 घंटे पहले पाइप P_1 को बंद करना पड़ा। दोनों पाइपों को टंकी भरने में कुल कितने घंटे लगे?

HINTS

क्षमता ↓ / कुल धारिता ↓

P_1 → 20 घंटे — 3

P_2 → 30 घंटे — 2

कुल धारिता — 60

पाइप P_1, द्वारा 5 घंटे में भरी गई टंकी = 3 × 5 = 15 इकाई

कुल धारिता = 60 + 15 = 75 इकाई

टंकी भरने में उनके द्वारा लिया गया समय = $\frac{75}{3+2} = \frac{75}{5}$ = 15 घंटे

वैकल्पिक विधि

आवश्यक समय = $\frac{(x+z)y}{(x+y)}$

$= \frac{(20+5)\times 30}{20+30} = \frac{25\times 30}{50}$ = 15 घंटे

Ex. पाइप A और B भरने वाले पाइप हैं जबकि C खाली करने वाला पाइप है। A और B एक टैंक को क्रमशः 72 और 90 मिनट में भर सकते हैं। जब तीनों पाइप एक साथ खोले जाते हैं, तो टैंक 2 घंटे में भर जाता है। A और B को एक साथ 12 मिनट के लिए खोला जाता है, फिर बंद कर दिया जाता है और C को खोल दिया जाता है। टैंक कितने समय बाद खाली हो जाएगा?

HINTS

क्षमता ↓ / कुल धारिता ↓

A → 72 मिनट — 5

B → 90 मिनट — 4

A + B – C → 120 मिनट — 3

कुल धारिता — 360

C की क्षमता = (5 + 4 – 3) = 6

पाइप A और B के द्वारा 12 मिनट में भरी गई मात्रा = (5 + 4) × 12 = 108 इकाई

पाइप C के द्वारा खाली करने में लिया गया समय = $\frac{108}{6}$ = 18 मिनट

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

अध्याय 26

समय और दूरी

मूल सिद्धांत

- $\text{चाल} = \frac{\text{दूरी}}{\text{समय}}$
- जब दूरी स्थिर हो, तब:
  $\text{चाल} \propto \frac{1}{\text{समय}}$
- जब समय स्थिर हो, तब:
  $\text{दूरी} \propto \text{चाल}$
- जब चाल स्थिर हो, तब:
  $\text{दूरी} \propto \text{समय}$

माप की इकाइयाँ

- समय को आमतौर पर सेकंड, मिनट या घंटे में मापा जाता है।
- दूरी को आमतौर पर मीटर (m), किलोमीटर (km), मील, गज (yard) या फुट में मापा जाता है।
- चाल (गति) को आमतौर पर किमी/घंटा, मील/घंटा या मीटर/सेकंड में मापा जाता है।

क्र.सं.	इकाइयों का रूपांतरण
(i)	1 घंटा = 60 मिनट = 3600 सेकंड
(ii)	1 किमी = 1000 मीटर
(iii)	1 मील = 1.609 किमी 1 किमी = 0.6214 मील 5 मील = 8 किमी
(iv)	1 गज (yard) = 3 फुट
(v)	a किमी/घंटा = $a \times \frac{1000}{60 \times 60}$ मी / सेकंड = $a \times \frac{5}{18}$ मी/सेकंड
(vi)	a मी/सेकंड = $a \times \frac{60 \times 60}{1000}$ किमी/घंटा = $a \times \frac{18}{5}$ किमी/घंटा

Ex. डिंपल एक राजमार्ग पर 90 किमी/घंटा की चाल से यात्रा कर रही है, जबकि सचिन 108 किमी/घंटा की चाल से यात्रा कर रहा है। मीटर/सेकंड में उनकी चाल का अंतर क्या है?

HINTS अभीष्ट अंतर = (108 – 90) किमी/घंटा = 18 किमी/घंटा

$= 18 \times \frac{5}{18}$ मीटर/सेकंड = 5 मीटर/सेकंड

Ex. एक आदमी 24 सेकंड में 200 मीटर दौड़ता है। उसकी चाल किमी/घंटा में ज्ञात कीजिए।

HINTS चाल $= \frac{200}{24} = \frac{25}{3}$ मीटर/सेकंड

$= \frac{25}{3} \times \frac{18}{5}$ किमी/घंटा = 30 किमी/घंटा

जब चाल में प्रतिशत/भिन्नात्मक वृद्धि/कमी हो

Ex. एक कार जब अपनी सामान्य चाल 30% बढ़ा देती है, तो वह निश्चित गंतव्य पर 2 घंटे पहले पहुँच जाती है। समान दूरी तय करने में कार द्वारा लिया गया सामान्य समय ज्ञात कीजिए।

HINTS

	पुराना		नया
चाल →	10	:	13
समय →	13	:	10

अंतर 3 इकाई

∵ 3 इकाई → 2 घंटे

13 इकाई → $\frac{2}{3} \times 13 = \frac{26}{3}$ घंटे $= 8\frac{2}{3}$ घंटे

∴ कार द्वारा लिया गया सामान्य समय $= 8\frac{2}{3}$ घंटे

$= 8$ घंटे $+ \frac{2}{3} \times 60$ मिनट = 8 घंटे 40 मिनट

Ex. एक वाहन अपनी सामान्य चाल की एक-चौथाई चाल से जा रहा है और उसे अपने गंतव्य तक पहुँचने में 45 मिनट अतिरिक्त लगते हैं। समान दूरी तय करने में वाहन द्वारा लिया गया सामान्य समय ज्ञात कीजिए।

HINTS

	पुराना		नया
चाल →	4	:	1
समय →	1	:	4

अंतर 3 इकाई

∵ 3 इकाई → 45 मिनट

1 इकाई → 15 मिनट

∴ वाहन द्वारा लिया गया सामान्य समय = 15 मिनट

Ex. A को 40 किमी चलने में B से 2 घंटे 30 मिनट अधिक लगते हैं। यदि A अपनी चाल दोगुनी कर दे, तो वह इसे B से 1 घंटा कम समय में पूरा कर सकता है। 40 किमी की दूरी चलने में A को कितने समय (घंटों में) की आवश्यकता होगी?

HINTS

समय_B

+2 घंटा 30 मिनट $= \frac{5}{2}$ घंटा → समय_A (पुराना)

–1 घंटा → समय_A (नया)

	पुराना		नया
A की चाल →	1	:	2
A का समय →	2	:	1

अंतर 1 इकाई

∵ 1 इकाई → $1 + \frac{5}{2} = \frac{7}{2}$ घंटे

2 इकाई → $2 \times \frac{7}{2} = 7$ घंटे

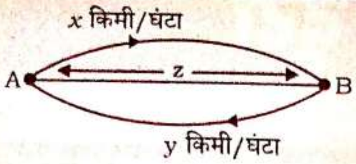
∴ दी गई दूरी तय करने में A द्वारा लिया गया समय = 7 घंटे

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

जब दूरी समान हो और कुल समय दिया हो



एक व्यक्ति बिंदु A से बिंदु B तक x किमी/घंटा की चाल से दूरी 'z' तय करता है और बिंदु B से बिंदु A तक y किमी/घंटा की चाल से वापस आता है। यदि उसे जाने और वापस आने में 't' घंटे लगते हैं, तो उसके द्वारा तय की गई दूरी 'z':

$$\text{दूरी 'z'} = \left(\frac{xy}{x+y}\right)\times t$$

Ex. एक छात्र घर से स्कूल $5\frac{1}{2}$ किमी/घंटा की चाल से जाता है और 4 किमी/घंटा की चाल से घर लौटता है। यदि वह पूरी यात्रा में $4\frac{3}{4}$ घंटे का समय लेता है, तो घर और स्कूल के बीच की दूरी (किमी में) ज्ञात कीजिए।

HINTS दूरी = $\left(\frac{\frac{11}{2}\times 4}{\frac{11}{2}+4}\right)\times\frac{19}{4} = \frac{44}{19}\times\frac{19}{4} = 11$ किमी

वैकल्पिक विधि

	पुराना		नया
चाल →	11	:	8
समय →	8	:	11

योग = 19 इकाई

∵ 19 इकाई → $\frac{19}{4}$ घंटा

1 इकाई → $\frac{1}{4}$ घंटा

8 इकाई → 2 घंटा

∴ घर और स्कूल के बीच की दूरी = $\frac{11}{2}\times 2 = 11$ किमी

Ex. एक व्यक्ति एक स्थान से दूसरे स्थान तक 60 किमी/घंटा की चाल से यात्रा करता है और 75 किमी/घंटा की चाल से वापस आता है। यदि लिया गया कुल समय 6 घंटे है, तो तय की गई कुल दूरी ज्ञात कीजिए।

HINTS माना, कुल दूरी = 2d

प्रश्नानुसार,

$$6 = \frac{d}{75} + \frac{d}{60} \Rightarrow 6 = \frac{9d}{300} \Rightarrow d = 200$$

∴ कुल दूरी = 2 × 200 = 400 किमी

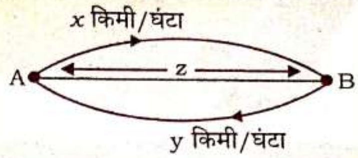
वैकल्पिक विधि

$$\text{कुल दूरी} = \frac{2\times S_1\times S_2}{S_1+S_2}\times t$$

$$= \frac{2\times 60\times 75}{135}\times 6$$

= 400 किमी

जब दूरी समान हो और समय का अंतर दिया हो



एक व्यक्ति बिंदु A से बिंदु B तक 'x' किमी/घंटा की चाल से दूरी 'z' तय करता है और y किमी/घंटा की चाल से बिंदु A पर वापस आता है। यदि उसे B से A तक आने में, A से B तक जाने की अपेक्षा 't' घंटे अधिक लगते हैं, तो दूरी 'z':

$$\text{दूरी 'z'} = \left(\frac{xy}{x-y}\right)\times(\text{समय के बीच का अंतर})$$

समय के बीच के अंतर को निम्नलिखित तरीके से हल किया जा सकता है:

'पहले-पहले' स्थिति	– (घटाना)
'देर-देर' स्थिति	– (घटाना)
'पहले-देर' स्थिति	+ (जोड़ना)
'देर-पहले' स्थिति	+ (जोड़ना)

Ex. रमेश अपने घर से 40 किमी/घंटा की चाल से गाड़ी चलाता है और अपने कॉलेज 25 मिनट देरी से पहुँचता है। अगले दिन वह अपनी चाल 10 किमी/घंटा बढ़ा देता है, फिर भी वह 10 मिनट देरी से पहुँचता है। उसका कॉलेज उसके घर से कितनी दूर है?

HINTS दूरी = $\frac{40\times 50}{50-40}\times\left(\frac{25-10}{60}\right) = \frac{40\times 50}{10}\times\frac{15}{60} = 50$ किमी

वैकल्पिक विधि

	पुराना		नया
चाल →	4	:	5
समय →	5	:	4

अंतर = 1 इकाई

∵ 1 इकाई → (25 – 10) मिनट = 15 मिनट

5 इकाई → 75 मिनट

∴ दूरी = $40\times\frac{75}{60} = 50$ किमी

Ex. एक रेलगाड़ी एक निश्चित दूरी को एक निश्चित चाल से तय करती है। यदि रेलगाड़ी की चाल 6 किमी/घंटा अधिक हो, तो समान दूरी तय करने में उसे 6 घंटे कम लगेंगे। लेकिन, यदि रेलगाड़ी की चाल 6 किमी/घंटा कम हो, तो समान दूरी तय करने में उसे 10 घंटे अधिक लगेंगे। रेलगाड़ी द्वारा तय की गई दूरी ज्ञात कीजिए।

HINTS माना, रेलगाड़ी की वास्तविक चाल = s

प्रश्नानुसार,

$$\frac{s(s+6)6}{6} = \frac{s(s-6)}{6}\times 10$$

⇒ 3s + 18 = 5s – 30

⇒ 2s = 48

⇒ s = 24 किमी/घंटा

∴ रेलगाड़ी द्वारा तय की गई कुल दूरी

$$= \frac{24\times 30}{6}\times 6 = 720 \text{ किमी}$$

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

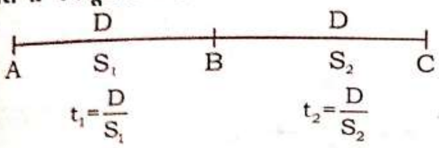
औसत चाल पर आधारित

$$\text{औसत चाल} = \frac{\text{तय की गई कुल दूरी}}{\text{लिया गया कुल समय}}$$

औसत चाल की कुछ स्थितियाँ:

1. जब दूरी स्थिर हो।
2. जब दूरी अलग-अलग हो।
3. जब दूरी भिन्न में दी हो।

स्थिति-I: जब दूरी स्थिर हो



$$\text{औसत चाल} = \frac{D+D}{\frac{D}{S_1}+\frac{D}{S_2}} = \frac{2D}{D\left(\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}\right)}$$

$$= \boxed{\frac{2}{\left(\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}\right)}} = \boxed{\frac{2S_1S_2}{S_1+S_2}}$$ (जब दो दूरी समान हों)

- यदि 'n' दूरी बराबर है, तब:

$$\text{औसत चाल} = \frac{n}{\left(\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}+\ldots\ldots\frac{1}{S_n}\right)}$$

उपरोक्त स्पष्टीकरण से यह स्पष्ट है कि जब दूरी स्थिर होती है, तो औसत चाल, दूरी से मुक्त होती है। इसका अर्थ है कि दूरी की कोई आवश्यकता नहीं है या प्रश्न को किसी भी अनुमानित दूरी के माध्यम से हल किया जा सकता है।

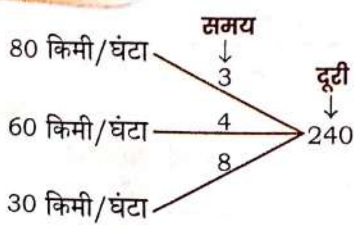
Ex. एक कार 60 किमी/घंटा की चाल से यात्रा करते हुए एक निश्चित दूरी तय करती है और 40 किमी/घंटा की चाल से प्रारंभिक बिंदु पर वापस आती है। पूरी यात्रा के लिए कार की औसत चाल क्या है?

HINTS कार की औसत चाल $= \frac{2\times60\times40}{60+40} = 48$ किमी/घंटा

Ex. एक व्यक्ति अपनी यात्रा की कुल दूरी को तीन बराबर भागों में बाँटता है और तीनों भागों को क्रमशः 80 किमी/घंटा, 60 किमी/घंटा और 30 किमी/घंटा की चाल से तय करने का निर्णय लेता है। यात्रा के दौरान औसत चाल क्या है?

HINTS औसत चाल $= \frac{3}{\frac{1}{80}+\frac{1}{60}+\frac{1}{30}} = \frac{3\times240}{3+4+8} = \frac{3\times240}{15}$
$= 48$ किमी/घंटा

वैकल्पिक विधि



$\therefore$ औसत चाल $= \frac{240\times3}{15} = 48$ किमी/घंटा

स्थिति-II: जब दूरी अलग-अलग हो

Ex. एक व्यक्ति 80 किमी की यात्रा को 10 किमी/घंटा की चाल से और शेष 70 किमी की दूरी को 7 घंटे में तय करता है। पूरी यात्रा में उसकी औसत चाल क्या है?

HINTS औसत चाल $= \frac{\text{कुल दूरी}}{\text{कुल समय}} = \frac{80+70}{\frac{80}{10}+7} = \frac{150}{15} = 10$ किमी/घंटा

Ex. एक व्यक्ति 7 किमी/घंटा की चाल से 11 किमी, 10 किमी/घंटा की चाल से 25 किमी और 20 किमी/घंटा की चाल से 30 किमी की दूरी तय करता है। व्यक्ति की औसत चाल क्या है?

HINTS औसत चाल $= \frac{\text{कुल दूरी}}{\text{कुल समय}}$

$= \frac{11+25+30}{\frac{11}{7}+\frac{25}{10}+\frac{30}{20}} = \frac{66}{\frac{220+350+210}{140}} = \frac{66\times140}{780} = 11\frac{11}{13}$ किमी/घंटा

स्थिति-III: जब दूरी भिन्न में दी हो

यदि दूरी भिन्न $\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z}\ldots\ldots\right)$ में हो और चाल S_1, S_2, S_3 ...... हो, तब:

$$\text{औसत चाल} = \frac{1}{\left(\frac{1}{xS_1}+\frac{1}{yS_2}+\frac{1}{zS_3}+\ldots..\right)}$$

Ex. एक व्यक्ति अपनी यात्रा का $\frac{1}{4}$ भाग, 25 किमी/घंटा की चाल से, यात्रा का $\frac{1}{2}$ भाग, 40 किमी/घंटा की चाल से और यात्रा का शेष भाग 50 किमी/घंटा की चाल से तय करता है। पूरी यात्रा के दौरान उसकी औसत चाल (किमी/घंटा में) ज्ञात कीजिए।

HINTS औसत चाल $= \frac{1}{\frac{1}{4\times25}+\frac{1}{2\times40}+\frac{1}{4\times50}}$

$= \frac{400}{4+5+2} = \frac{400}{11} = 36\frac{4}{11}$ किमी/घंटा

Ex. विकास ने बाइक से एक निश्चित दूरी तय की। यदि वह 40% दूरी 40 किमी/घंटा की चाल से, 50% दूरी 25 किमी/घंटा की चाल से तथा शेष 10% दूरी 10 किमी/घंटा की चाल से तय करता है। पूरी यात्रा के दौरान उसकी औसत चाल ज्ञात कीजिए।

HINTS $40\% = \frac{2}{5}$, $50\% = \frac{1}{2}$, $10\% = \frac{1}{10}$

औसत चाल $= \frac{1}{\frac{2}{5\times40}+\frac{1}{2\times25}+\frac{1}{10\times10}}$

$= \frac{100}{1+2+1} = 25$ किमी/घंटा

वैकल्पिक विधि

माना, कुल दूरी = 100 किमी

$\therefore$ औसत चाल $= \frac{100}{\frac{40}{40}+\frac{50}{25}+\frac{10}{10}} = 25$ किमी/घंटा

@apna_channels
Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

ठहराव के साथ औसत चाल

जब औसत चाल की गणना करते समय ठहराव समय को ध्यान में रखा जाता है, तो इसे **ठहराव के साथ औसत चाल** कहा जाता है।

ठहराव को छोड़कर, एक रेलगाड़ी की औसत चाल 'u' है और ठहराव के साथ, इसकी औसत चाल 'v' है, तोः

$$\text{ठहराव समय प्रति घंटा} = \frac{\text{औसत चाल के बीच का अंतर}}{\text{ठहराव के बिना चाल}} = \frac{u - v}{u}$$

जहाँ, $u > v$ और $u, v \neq 0$

Ex. बिना किसी ठहराव के, बस की चाल 54 किमी/घंटा है और ठहराव के साथ, इसकी चाल 45 किमी/घंटा है। बस प्रति घंटे कितने मिनट रुकती है?

HINTS ठहराव समय प्रति घंटा $= \left|\frac{54-45}{54}\right| \times 60$ मिनट

$= \frac{9}{54} \times 60 = 10$ मिनट

Ex. ठहराव के बिना एक बस की चाल 40 किमी/घंटा है और ठहराव के साथ बस की चाल 32 किमी/घंटा है। बस प्रति घंटे कितने मिनट रुकती है?

HINTS ठहराव समय

$= \frac{40-32}{40} \times 60$ मिनट $= \frac{1}{5} \times 60$ मिनट $= 12$ मिनट

Ex. ठहराव के बिना एक कार की चाल 48 किमी/घंटा है और ठहराव के साथ कार की चाल 36 किमी/घंटा है। यदि कार हर बार 5 मिनट के लिए रुकती है, तो 1 घंटे 20 मिनट में रुकने की संख्या ज्ञात कीजिए।

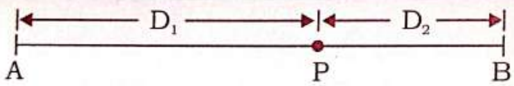
HINTS 1 घंटा 20 मिनट = 80 मिनट

1 घंटा 20 मिनट में ठहराव समय $= \left|\frac{48-36}{48}\right| \times 80$ मिनट

$= \frac{12}{48} \times 80 = 20$ मिनट

$\therefore$ ठहराव की संख्या $= \frac{20}{5} = 4$

राधा सिद्धांत



इस सिद्धांत पर परीक्षाओं में तीन प्रकार के प्रश्न पूछे जाते हैं और वे नीचे दिए गए सूत्रों पर आधारित होते हैं:

(a) $T = \sqrt{T_1 \times T_2}$

(b) $\frac{S_1}{S_2} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$

(c) $D = S_1T_1 + S_2T_2$

$S_1 \rightarrow$ A से प्रारम्भ होने वाली वस्तु की चाल

$S_2 \rightarrow$ B से प्रारम्भ होने वाली वस्तु की चाल

$T \rightarrow$ वह समय जिसके बाद वे एक दूसरे से मिलती हैं।

$T_1 \rightarrow$ वस्तु 2 को पार करने के बाद वस्तु 1 द्वारा अपने गंतव्य तक पहुँचने में लिया गया समय।

$T_2 \rightarrow$ वस्तु 1 को पार करने के बाद वस्तु 2 द्वारा अपने गंतव्य तक पहुँचने में लिया गया समय।

$D \rightarrow$ A से B तक कुल दूरी।

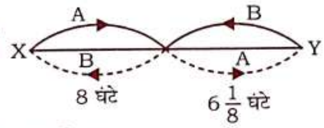
Ex. श्याम सुबह 10 बजे, A से B की ओर चलना शुरू करता है और राधा सुबह 10 बजे, B से A की ओर चलना शुरू करती है और C पर मिलने के बाद वे दोनों क्रमशः 24 मिनट और 54 मिनट में अपने गंतव्य पर पहुँचते हैं। C पर उनके मिलने का समय ज्ञात कीजिए।

HINTS समय $= \sqrt{24 \times 54} = 36$ मिनट

$\therefore$ C पर मिलने का समय = 10 : 36 a.m.

Ex. A और B ने क्रमशः X से Y और Y से X तक अपनी यात्रा शुरू की। एक दूसरे को पार करने के बाद, A और B ने अपनी यात्रा के शेष भाग को क्रमशः $6\frac{1}{8}$ घंटे और 8 घंटे में पूरा किया। यदि A की चाल 32 किमी/घंटा है, तो B की चाल (किमी/घंटा में) क्या है?

HINTS



माना, B की चाल $= x$

$\therefore \frac{x}{32} = \sqrt{\frac{49}{64}} \Rightarrow \frac{x}{32} = \frac{7}{8}$

$\Rightarrow x = 28$ किमी/घंटा

Ex. A और B एक ही दिन, एक ही समय पर, क्रमशः X और Y स्थानों से एक-दूसरे की ओर चलना शुरू करते हैं। A की चाल, B की चाल से 20% अधिक है। रास्ते में मिलने के बाद, A और B क्रमशः Y और X तक पहुँचने में क्रमशः p घंटे और $7\frac{1}{5}$ घंटे लेते हैं। p का मान क्या है?

HINTS A : B

चाल $\rightarrow$ 6 : 5

यहाँ,

$S_A = 6, \quad S_B = 5$

$t_A = p, \quad t_B = 7\frac{1}{5} = \frac{36}{5}$

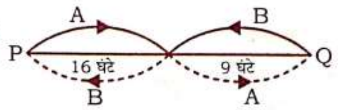
$\frac{S_A}{S_B} = \sqrt{\frac{t_B}{t_A}} \Rightarrow \frac{6}{5} = \sqrt{\frac{36}{5p}}$

दोनों ओर वर्ग करने पर,

$\Rightarrow \frac{5p}{36} = \frac{25}{36} \Rightarrow p = 5$ घंटे

Ex. दो रेलगाड़ियाँ, A और B, एक ही समय पर एक दूसरे की ओर क्रमशः P से Q और Q से P की ओर यात्रा करने लगीं। एक दूसरे को पार करने के बाद, A और B को Q और P तक पहुँचने में क्रमशः 9 घंटे और 16 घंटे लगे। यदि A की चाल 56 किमी/घंटा थी, तो P और Q के बीच की दूरी क्या थी?

HINTS



$\frac{S_A}{S_B} = \sqrt{\frac{t_B}{t_A}} \Rightarrow \frac{56}{S_B} = \sqrt{\frac{16}{9}} \Rightarrow S_B = 42$ किमी/घंटा

$\therefore$ P और Q के बीच की दूरी $= S_At_A + S_Bt_B$

$= 56 \times 9 + 42 \times 16 = 504 + 672 = 1176$ किमी

@apna_channels
Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

सापेक्ष चाल पर आधारित

सापेक्ष चाल से तात्पर्य एक गतिशील वस्तु की दूसरे के सापेक्ष चाल से है।

- समान दिशा में सापेक्ष चाल = $S_1 - S_2$
- विपरीत दिशा में सापेक्ष चाल = $S_1 + S_2$

जहाँ, S_1 = पहली वस्तु की चाल

S_2 = दूसरी वस्तु की चाल

Ex. स्थान A से स्थान B की दूरी 144 किमी है। दो कारें एक साथ चलना प्रारंभ करती हैं, एक A से और दूसरी B से। यदि वे एक ही दिशा में चलती हैं, तो वे 12 घंटे बाद मिलती हैं, लेकिन यदि वे एक-दूसरे की ओर चलती हैं, तो वे $\frac{9}{8}$ घंटे बाद मिलती हैं। तेज चाल से चलने वाली कार की चाल (किमी/घंटा में) ज्ञात कीजिए।

HINTS माना, तेज कार की चाल = x

धीमी कार की चाल = y

$x - y = \frac{144}{12} = 12$ किमी/घंटा ....(i)

$x + y = \frac{144 \times 8}{9} = 128$ किमी/घंटा ....(ii)

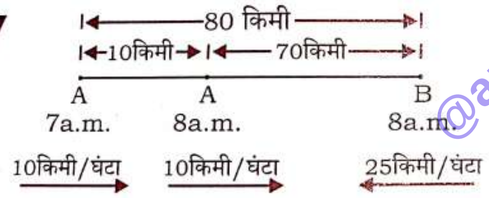
समीकरण (i) और (ii) को हल करने पर:

$x = 70$ किमी/घंटा

∴ तेज चाल से चलने वाली कार की चाल = 70 किमी/घंटा

Ex. दो शहरों, A और B के बीच की दूरी 80 किमी है। एक मोटरसाइकिल सवार सुबह 7 बजे, 10 किमी/घंटा की चाल से, A से B की ओर चलता है। दूसरा मोटरसाइकिल सवार सुबह 8 बजे, 25 किमी/घंटा की चाल से, B से A की ओर चलता है। वे किस समय एक दूसरे को पार करेंगे?

HINTS



मोटरसाइकिल A द्वारा 1 घंटे में 10 किमी/घंटा की चाल से तय की गई

दूरी = 1 × 10 = 10 किमी

शेष दूरी = 80 – 10 = 70 किमी

सापेक्ष चाल = 25 + 10 = 35 किमी/घंटा

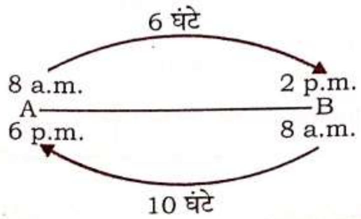
मिलने का समय = $\frac{70}{35}$ = 2 घंटे

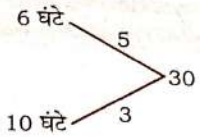
∴ समय जब वे एक दूसरे को पार करेंगे

= 8 a.m. + 2 घंटे = 10 a.m.

Ex. राम सुबह 8 बजे बिंदु A से चलना शुरू करता है और उसी दिन दोपहर 2 बजे बिंदु B पर पहुँचता है। उसी दिन, राजू सुबह 8 बजे बिंदु B से चलना शुरू करता है और उसी दिन शाम 6 बजे बिंदु A पर पहुँचता है। बिंदु A और B दोनों केवल एक सीधी रेखा द्वारा अलग होते हैं। वे दोनों किस समय मिलते हैं?

HINTS





कुल समय = $\frac{30}{5+3} \times 60$ मिनट = 3 घंटा 45 मिनट

समय जब वे एक दूसरे से मिलते हैं

= 8 a.m. + 3 घंटा 45 मिनट

= 11 : 45 a.m.

Ex. एक कुत्ता, खरगोश की हर 6 छलांग के लिए 5 छलांग लगाता है, लेकिन कुत्ते की 4 छलांग, खरगोश की 5 छलांग के बराबर होती है। कुत्ते और खरगोश की चाल का अनुपात क्या है?

HINTS

	कुत्ता		खरगोश
क्षमता →	5	:	6
समय →	4	:	5
चाल →	25	:	24

∴ कुत्ते और खरगोश की चाल का अनुपात = 25 : 24

चोर-पुलिस पर आधारित

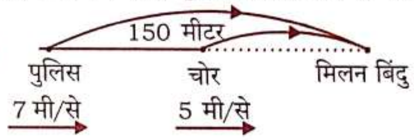
Ex. एक पुलिसकर्मी 150 मीटर की दूरी पर एक चोर को देखता है। वह चोर का पीछा करना शुरू कर देता है जो 5 मीटर/सेकंड की चाल से भाग रहा है, जबकि पुलिसकर्मी 7 मीटर/सेकंड की चाल से पीछा करता है।

(i) पुलिस द्वारा चोर को पकड़ने में लगा समय क्या है?

(ii) चोर के पकड़े जाने पर उसके द्वारा तय की गई दूरी ज्ञात कीजिए।

(iii) चोर को पकड़ने के दौरान पुलिसकर्मी द्वारा तय की गई दूरी ज्ञात कीजिए।

HINTS



(i) सापेक्ष चाल = 7 – 5 = 2 मीटर/सेकंड

∴ समय = $\frac{150}{2}$ = 75 सेकंड

(ii) दूरी (D_T) = 75 × 5 = 375 मीटर

(iii) दूरी (D_P) = 75 × 7 = 525 मीटर

Ex. एक चोर को एक पुलिसकर्मी ने 80 मीटर की दूरी से देखा। चोर की चाल 20 किमी/घंटा है और पुलिसकर्मी की चाल 21 किमी/घंटा है। 18 सेकंड के बाद उनके बीच की दूरी क्या है?

HINTS सापेक्ष चाल = 21 – 20 = 1 किमी/घंटा

∴ 18 सेकंड के बाद चोर और पुलिसकर्मी के बीच की दूरी

$= 80 - 1 \times \frac{5}{18} \times 18 = 80 - 5 = 75$ मीटर

Ex. 'x' किमी/घंटा की चाल से भाग रहे एक चोर का पीछा 10 किमी/घंटा की चाल से भाग रहा एक पुलिसकर्मी कर रहा है। यदि चोर 100 मीटर आगे है, तो पुलिसकर्मी 3 मिनट बाद चोर को पकड़ लेता है। चोर किस चाल से भाग रहा है ('x' अज्ञात चाल है)?

HINTS प्रश्नानुसार,

$3 \times 60 = \frac{100}{(10-x) \times \frac{5}{18}} \Rightarrow 9 = \frac{18}{10-x} \Rightarrow x = 8$ किमी/घंटा

∴ चोर की चाल = 8 किमी/घंटा

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

नियमित अंतराल के आधार पर चाल की गणना

- बसें हर 10 मिनट (T_1) के बाद बस टर्मिनल से निकल रही हैं। टर्मिनल की ओर बढ़ रहा एक व्यक्ति हर 8 मिनट (T_2) के बाद बसों से मिलता है।

$$\frac{\text{व्यक्ति की चाल}}{\text{बस की चाल}} = \frac{|T_1 - T_2|}{T_2}$$

जहाँ,

T_1 = वह समय अंतराल जिसके बाद बसें टर्मिनल से रवाना होती हैं।

T_2 = वह समय अंतराल जिसके बाद व्यक्ति बसों से मिलता है।

- एक ही स्थान से 13 मिनट (T_1) के अंतराल पर दो बंदूकें चलाई जाती हैं। उस स्थान की ओर आ रही एक ट्रेन में एक व्यक्ति पहली गोली की आवाज़ के 12 मिनट 30 सेकंड (T_2) बाद दूसरी गोली चलने की आवाज़ सुनता है, तो:

$$\frac{\text{ट्रेन की चाल}}{\text{ध्वनि की चाल}} = \frac{|T_1 - T_2|}{T_2}$$

जहाँ,

T_1 = पहली बंदूक चलने के बाद जिस समयांतराल के पश्चात दूसरी बंदूक चलाई जाती है।

T_2 = व्यक्ति द्वारा पहली ध्वनि और दूसरी ध्वनि सुनने के बीच का समय अंतराल।

Ex. एक बस टर्मिनल से बसें 10 मिनट के अंतराल पर 20 किमी/घंटा की चाल से चलती हैं। बस टर्मिनल की ओर विपरीत दिशा से आ रहे एक व्यक्ति की चाल क्या है, यदि वह बसों से 8 मिनट के अंतराल पर मिलता है?

HINTS माना, व्यक्ति की चाल = x

$\Rightarrow \frac{x}{20} = \frac{10-8}{8} \Rightarrow \frac{x}{20} = \frac{2}{8} \Rightarrow x = 5$ किमी/घंटा

$\therefore$ व्यक्ति की चाल = 5 किमी/घंटा

Ex. एक ही स्थान से 13 मिनट के अंतराल पर दो बंदूकें चलाई जाती हैं। उस स्थान की ओर आ रही एक ट्रेन में एक व्यक्ति पहली गोली की आवाज के 12 मिनट 30 सेकंड बाद दूसरी गोली की आवाज सुनता है। ट्रेन की चाल ज्ञात कीजिए (मान लीजिए कि ध्वनि 300 मीटर/सेकंड की चाल से यात्र करती है)।

HINTS माना, ट्रेन की चाल = x

$\Rightarrow \frac{x}{300} = \frac{13-12.5}{12.5} \Rightarrow \frac{x}{300} = \frac{0.5}{12.5}$

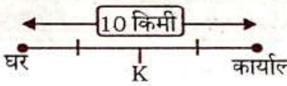
$\Rightarrow x = 12$ मी/सेकंड

$\therefore$ ट्रेन की चाल = 12 मी/सेकंड

विविध

Ex. R चलने की दोगुनी चाल से जॉगिंग करता है और जॉगिंग की दोगुनी चाल से दौड़ता है। अपने घर से कार्यालय तक, वह आधी दूरी पैदल चलकर और शेष दूरी जॉगिंग करके तय करता है। अपने कार्यालय से घर तक, वह आधी दूरी जॉगिंग करके और शेष दूरी दौड़कर तय करता है। अपने घर से कार्यालय और वापस घर तक के पूरे चक्कर में उसकी औसत चाल (किमी/घंटा में) क्या है, यदि उसके कार्यालय और घर के बीच की दूरी 10 किमी है और वह 5 किमी/घंटा की चाल से चलता है?

HINTS



पैदल : जॉगिंग : दौड़कर

1 : 2 : 4

(×5, ×5, ×5)

चाल → 5किमी/घंटा 10किमी/घंटा 20 किमी/घंटा

$T_1 = \frac{5}{5} = 1$ घंटा, $T_2 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ घंटा

$T_3 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ घंटा, $T_4 = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$ घंटा

$\therefore$ औसत चाल = $\frac{\text{कुल दूरी}}{\text{कुल समय}} = \frac{20}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = \frac{20}{2+\frac{1}{4}} = \frac{80}{9}$ किमी/घंटा

Ex. एक आदमी को एक जगह पैदल चलकर जाने और पैदल चलकर वापस आने में 6 घंटे लगते हैं। वह दोनों तरफ साइकिल चलाकर 2 घंटे बचा सकता था। पूरी यात्रा में तय की गई दूरी 20 मील है। यदि वह पैदल जाता है और साइकिल चलाकर वापस आता है, तो पूरी यात्रा के लिए उसकी औसत चाल क्या है?

HINTS कुल दूरी = 20 मील

दोनों तरफ पैदल चलने में लगा समय = 6 घंटे

एक तरफ पैदल चलने में लगा समय = 3 घंटे

दोनों तरफ साइकिल से यात्रा में लगा समय = 6 – 2 = 4 घंटे

एक तरफ साइकिल से यात्रा में लगा समय = 2 घंटे

$\therefore$ एक तरफ पैदल और एक तरफ साइकिल से यात्रा करने में लगा कुल समय = 3 + 2 = 5 घंटे

$\therefore$ औसत चाल = $\frac{\text{कुल दूरी}}{\text{कुल समय}} = \frac{20}{5} = 4$ मील/घंटा

@apna_channels

Ex. एक डिलीवरी बॉय सुबह 10 बजे अपने ऑफिस से एक सामान डिलीवर करने के लिए निकला। वह 32 किमी/घंटा की चाल से अपना स्कूटर चलाता है। उसने सामान डिलीवर किया और भुगतान प्राप्त करने के लिए 15 मिनट तक इंतजार किया। भुगतान होने के बाद, वह 24 किमी/घंटा की चाल से यात्रा करते हुए सुबह 11 : 25 बजे अपने ऑफिस पहुँचा। डिलीवरी बॉय द्वारा तय की गई कुल दूरी ज्ञात कीजिए।

HINTS माना, ऑफिस और डिलीवरी स्थल के बीच की दूरी = x किमी

प्रारंभिक समय = 10 : 00 a.m.

अंतिम समय = 11 : 25 a.m.

कुल समय $= 1 + \frac{25}{60} = \frac{17}{12}$ घंटे

$\Rightarrow \frac{x}{32} + \frac{15}{60} + \frac{x}{24} = \frac{17}{12}$

$\Rightarrow \frac{x}{32} + \frac{x}{24} = \frac{17}{12} - \frac{3}{12} \Rightarrow \frac{3x+4x}{96} = \frac{14}{12}$

$\Rightarrow x = \frac{14 \times 96}{12 \times 7} \Rightarrow x = 16$ किमी

$\therefore$ डिलीवरी बॉय द्वारा तय की गई कुल दूरी = $2x = 2 \times 16 = 32$ किमी

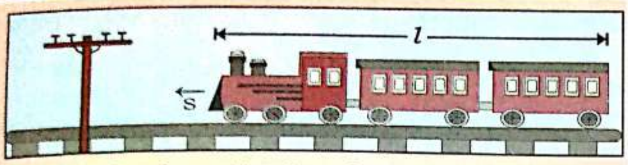
Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

अध्याय 27

रेलगाड़ी

जब रेलगाड़ी किसी खंभे को पार करती है



'l' मीटर लंबाई वाली, 'S' मीटर/सेकंड की चाल से चलती हुई रेलगाड़ी द्वारा एक खंभे या स्थिर व्यक्ति को पार करने में लिया गया समयः

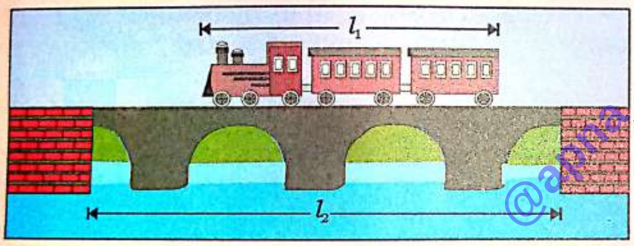
$$\text{समय} = \frac{\text{रेलगाड़ी की लंबाई } (l)}{\text{रेलगाड़ी की चाल (S)}}$$

☞ किसी खंभे या स्थिर व्यक्ति को पार करते समय रेलगाड़ी द्वारा तय की गई दूरी, रेलगाड़ी की लंबाई के बराबर होती है।

Ex. 15 मीटर/सेकंड की चाल से चलने वाली 180 मीटर लंबी रेलगाड़ी द्वारा प्लेटफॉर्म पर खड़े एक व्यक्ति को पार करने में कितना समय लगेगा?

HINTS $\text{समय} = \frac{\text{रेलगाड़ी की लंबाई}}{\text{रेलगाड़ी की चाल}} = \frac{180}{15} = 12$ सेकंड

जब रेलगाड़ी किसी पुल या प्लेटफॉर्म को पार करती है



'l_1' मीटर लंबाई वाली एक रेलगाड़ी जो 'S' मीटर/सेकंड की चाल से चल रही है, को 'l_2' मीटर लंबाई वाले पुल/प्लेटफॉर्म को पार करने में लगा समयः

$$\text{समय} = \frac{\text{रेलगाड़ी की लंबाई } (l_1) + \text{पुल की लंबाई } (l_2)}{\text{रेलगाड़ी की चाल (S)}}$$

☞ एक पुल को पार करते समय रेलगाड़ी द्वारा तय की गई दूरी, रेलगाड़ी और पुल की लंबाई के योग के बराबर होती है।

Ex. 900 मीटर लंबी एक रेलगाड़ी 30 मीटर/सेकंड की चाल से चल रही है। 900 मीटर लंबे प्लेटफॉर्म को पार करने में उसे कितना समय लगेगा?

HINTS $\text{समय} = \frac{\text{रेलगाड़ी की लंबाई } (l_1) + \text{प्लेटफॉर्म की लंबाई } (l_2)}{\text{रेलगाड़ी की चाल (S)}}$

$= \frac{900+900}{30} = \frac{1800}{30} = 60$ सेकंड

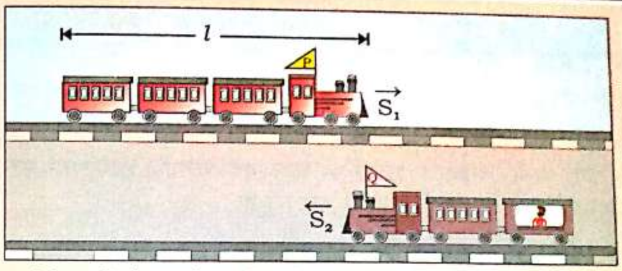
Ex. एक रेलगाड़ी 800 मीटर और 400 मीटर लंबे दो पुलों को क्रमशः 100 सेकंड और 60 सेकंड में पार करती है। रेलगाड़ी की लंबाई ज्ञात कीजिए।

HINTS माना, रेलगाड़ी की लम्बाई और चाल क्रमशः 'l' मीटर और 'S' मीटर/सेकंड है।

$S = \frac{l+800}{100} = \frac{l+400}{60}$

$\Rightarrow 3l + 2400 = 5l + 2000 \Rightarrow 2l = 400 \Rightarrow l = 200$ मीटर

दो रेलगाड़ियाँ विपरीत दिशा में एक दूसरे को पार करती हैं



दो रेलगाड़ियाँ, P और Q जिनकी लम्बाई क्रमशः 'l_1' मीटर और 'l_2' मीटर है, क्रमशः 'S_1' मीटर/सेकंड और 'S_2' मीटर/सेकंड की चाल से चल रही हैं। रेलगाड़ी P और रेलगाड़ी Q द्वारा एक दूसरे को पार करने में लिया गया समय, जब वे विपरीत दिशा में चल रही हों:

$$\text{समय} = \frac{l_1 + l_2}{S_1 + S_2}$$

☞ एक रेलगाड़ी P द्वारा दूसरी रेलगाड़ी Q को पार करते समय तय की गई दूरी, रेलगाड़ी P और रेलगाड़ी Q की लम्बाई के योग के बराबर होती है।

Ex. 230 मीटर और 270 मीटर लंबी दो रेलगाड़ियाँ क्रमशः 42 किमी/घंटा और 48 किमी/घंटा की चाल से विपरीत दिशा में चल रही हैं। उन्हें एक-दूसरे को पार करने में कितना समय लगेगा?

HINTS $l_1 = 230$ मीटर, $l_2 = 270$ मीटर

$S_1 = 42$ किमी/घंटा, $S_2 = 48$ किमी/घंटा

$\therefore \text{समय} = \frac{l_1 + l_2}{S_1 + S_2}$

$= \frac{230+270}{(42+48)\times\frac{5}{18}} = \frac{500}{90\times\frac{5}{18}} = 20$ सेकंड

Ex. दो रेलगाड़ियाँ, P और Q, क्रमशः 110 मीटर और 140 मीटर लंबी, विपरीत दिशाओं में समानांतर पटरियों पर चल रही हैं। रेलगाड़ी P 70 किमी/घंटा की गति से चल रही है और उसे रेलगाड़ी Q को पार करने में 5 सेकंड का समय लगा। रेलगाड़ी Q की गति क्या है?

HINTS $\therefore S_1 + S_2 = \frac{l_1 + l_2}{\text{समय}}$

$= \frac{110+140}{5} = \frac{250}{5} = 50$ मीटर/सेकंड

$= 50 \times \frac{18}{5} = 180$ किमी/घंटा

ट्रेन की गति P = 70 किमी/घंटा

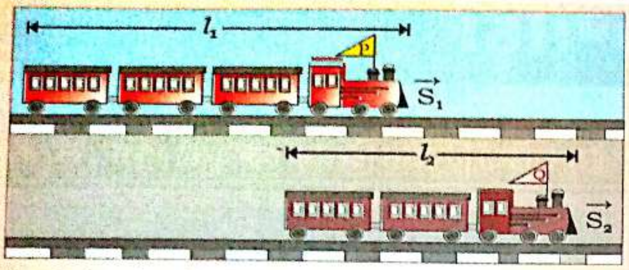
ट्रेन की गति Q = 180 − 70

= 110 किमी/घंटा

@apna_channels
Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

दो रेलगाड़ियाँ एक ही दिशा में एक दूसरे को पार करती हैं



दो रेलगाड़ियाँ, P और Q जिनकी लम्बाई क्रमशः 'l_1' मीटर और 'l_2' मीटर है, क्रमशः 'S_1' मीटर/सेकंड और 'S_2' मीटर/सेकंड की चाल से चल रही हैं (जहाँ, $S_1 > S_2$)। तेज चाल वाली रेलगाड़ी P द्वारा धीमी चाल वाली रेलगाड़ी Q को पार करने में लगा समय, जब वे एक ही दिशा में चल रही हों:

$$\text{समय} = \frac{l_1 + l_2}{S_1 - S_2}$$

Ex. 200 मीटर और 250 मीटर लम्बी दो रेलगाड़ियाँ क्रमशः 68 किमी/घंटा और 50 किमी/घंटा की चाल से समानांतर रेल पटरियों पर चल रही हैं। यदि दोनों रेलगाड़ियाँ एक ही दिशा में चल रही हैं, तो तेज चाल वाली रेलगाड़ी द्वारा धीमी चाल वाली रेलगाड़ी को पार करने में कितना समय लगेगा?

HINTS l_1 = 200 मीटर, l_2 = 250 मीटर

S_1 = 68 किमी/घंटा, S_2 = 50 किमी/घंटा

$$\therefore \text{समय} = \frac{l_1 + l_2}{S_1 - S_2}$$

$$= \frac{200+250}{(68-50)\times\frac{5}{18}}$$

$$= \frac{450}{18\times\frac{5}{18}} = 90 \text{ सेकंड}$$

Ex. दो ट्रेनों की लंबाई 380 मीटर और 220 मीटर है। इन दोनों में से तेज़ चलने वाली ट्रेन, एक ही दिशा में चलते हुए, दूसरी ट्रेन को ओवरटेक करने में 20 सेकंड का समय लेती है। विपरीत दिशाओं में चलते हुए, दोनों ट्रेनें एक-दूसरे को पार करने में 12 सेकंड का समय लेती हैं। तेज़ चलने वाली ट्रेन की गति (किमी/घंटा में) क्या है?

$T_1 \xrightarrow{380 \text{ मीटर}} x$ किमी/घंटा

$\rightarrow$ 20 सेकंड

$T_2 \xrightarrow{220 \text{ मीटर}} y$ किमी/घंटा

$T_1 \xrightarrow{380 \text{ मीटर}} x$ किमी/घंटा

y किमी/घंटा $\xleftarrow{220 \text{ मीटर}} T_2$

$$x - y = \frac{600}{20} = 30 \text{ मीटर/सेकंड} \text{....(i)}$$

$$x + y = \frac{600}{12} = 50 \text{ मीटर/सेकंड} \text{....(ii)}$$

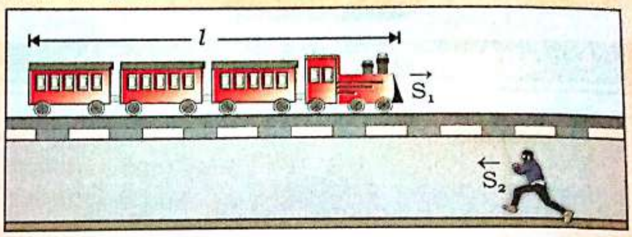
समीकरण (i) और (ii) से

x = 40 मीटर/सेकंड

$\Rightarrow x$ = 144 किमी/घंटा

जब कोई रेलगाड़ी 1 या 2 दौड़ते हुए व्यक्तियों को पार करती है

स्थिति I: 'l' मीटर लंबाई वाली एक रेलगाड़ी, 'S_1' मीटर/सेकंड की चाल से चल रही है। एक व्यक्ति रेलगाड़ी की विपरीत दिशा में 'S_2' मीटर/सेकंड की चाल से चल रहा है।



एक दूसरे को पार करने में लगा समय:

$$\text{समय} = \frac{l}{S_1 + S_2}$$

Ex. 1800 मीटर लंबी एक रेलगाड़ी विपरीत दिशा में चल रहे एक आदमी को पार करती है। रेलगाड़ी और आदमी की चाल क्रमशः 160 मीटर/सेकंड और 20 मीटर/सेकंड है। आदमी को पार करने में रेलगाड़ी को कितना समय लगेगा?

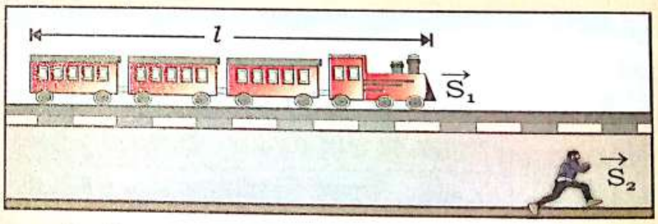
HINTS

l = 1800 मीटर

S_1 = 160 मीटर/सेकंड, S_2 = 20 मीटर/सेकंड

$$\therefore \text{समय} = \frac{l}{S_1 + S_2} = \frac{1800}{160+20} = \frac{1800}{180} = 10 \text{ सेकंड}$$

स्थिति II: 'l' मीटर लंबाई वाली एक रेलगाड़ी 'S_1' मीटर/सेकंड की चाल से चल रही है। एक व्यक्ति रेलगाड़ी की समान दिशा में 'S_2' मीटर/सेकंड की चाल से चल रहा है।



व्यक्ति को पार करने में ट्रेन द्वारा लिया गया समय:

$$\text{समय} = \frac{l}{S_1 - S_2}$$

Ex. एक 228 मीटर लम्बी रेलगाड़ी, 125 किमी/घंटा की चाल से चल रही है। यह रेलगाड़ी जिस दिशा में जा रही है, उसी दिशा में 17 किमी/घंटा की चाल से चल रहे एक व्यक्ति को कितने समय में पार कर लेगी?

HINTS l = 228 मीटर

S_1 = 125 किमी/घंटा, S_2 = 17 किमी/घंटा

$$\therefore \text{समय} = \frac{l}{S_1 - S_2} = \frac{228}{(125-17)\times\frac{5}{18}} = \frac{228}{108\times\frac{5}{18}}$$

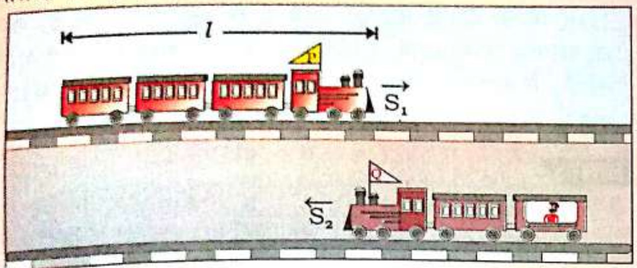
$$= \frac{228}{30} = 7.6 \text{ सेकंड}$$

@apna_channels
Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

जब एक रेलगाड़ी किसी दूसरी रेलगाड़ी में बैठे व्यक्ति को पार करती है

स्थिति I: 'l' मीटर लंबाई वाली एक रेलगाड़ी P, 'S_1' मीटर/सेकंड की चाल से चल रही है। एक व्यक्ति दूसरी रेलगाड़ी Q में बैठा है जो 'S_2' मीटर/सेकंड की चाल से चल रही है।



रेलगाड़ी P द्वारा रेलगाड़ी Q में बैठे व्यक्ति को पार करने में लिया गया समय, जब P और Q विपरीत दिशा में यात्रा कर रही हों:

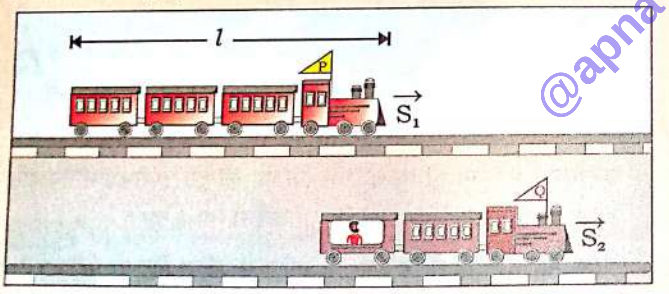
$$\text{समय} = \frac{l}{S_1 + S_2}$$

Ex. दो रेलगाड़ियाँ, A और B क्रमशः 58 किमी/घंटा और 50 किमी/घंटा की चाल से विपरीत दिशा में चल रही हैं। रेलगाड़ी A की लंबाई 450 मीटर है। रेलगाड़ी A को रेलगाड़ी B में बैठे व्यक्ति को पार करने में कितना समय लगेगा?

HINTS $l = 450$ मीटर, $S_1 = 58$ किमी/घंटा, $S_2 = 50$ किमी/घंटा,

$$\therefore \text{समय} = \frac{l}{S_1 + S_2} = \frac{450}{(58+50)\times\frac{5}{18}} = \frac{450}{108\times\frac{5}{18}} = 15 \text{ सेकंड}$$

स्थिति II: 'l' मीटर लंबाई वाली एक ट्रेन P, 'S_1' मीटर/सेकंड की गति से चल रही है। एक व्यक्ति दूसरी ट्रेन Q में बैठा है जो उसी दिशा में 'S_2' मीटर/सेकंड की गति से चल रही है:



तेज़ गति वाली ट्रेन P द्वारा धीमी गति वाली ट्रेन Q में बैठे व्यक्ति को पार करने में लिया गया समय:

$$\text{समय} = \frac{l}{S_1 - S_2}$$

Ex. दो रेलगाड़ियाँ 60 किमी/घंटा और 42 किमी/घंटा की चाल से एक ही दिशा में चल रही हैं। तेज चाल वाली रेलगाड़ी की लंबाई 180 मीटर है। धीमी चाल वाली रेलगाड़ी में बैठे व्यक्ति को पार करने में तेज चाल वाली रेलगाड़ी को कितना समय लगेगा?

HINTS $l = 180$ मीटर

$S_1 = 60$ किमी/घंटा, $S_2 = 42$ किमी/घंटा

$$\therefore \text{समय} = \frac{l}{S_1 - S_2} = \frac{180}{(60-42)\times\frac{5}{18}} = \frac{180}{5} = 36 \text{ सेकंड}$$

विविध प्रश्न

Ex. दो रेलगाड़ियाँ एक प्लेटफार्म पर खड़े एक आदमी को क्रमशः 27 सेकंड और 17 सेकंड में पार करती हैं। वे विपरीत दिशा में एक दूसरे को 23 सेकंड में पार करती हैं। रेलगाड़ियों की चाल का अनुपात ज्ञात कीजिए।

HINTS समय → 27   17

सापेक्ष समय → 23

चाल → 6 : 4

3 : 2

∴ रेलगाड़ियों की चाल का अनुपात = 3 : 2

Ex. एक 252 मीटर लंबी रेलगाड़ी 125 किमी/घंटा की गति से चल रही है। वह समय (सेकंड में) क्या है जिसमें यह रेलगाड़ी उस व्यक्ति को पार कर जाएगी जो इंजन से 17 किमी/घंटा की गति से रेलगाड़ी की दिशा में चल रहा है?

HINTS ट्रेन की गति = 125 किमी/घंटा

व्यक्ति की गति = 17 किमी/घंटा

सापेक्ष गति = 125 – 17 = 108 किमी/घंटा

$= 108 \times \frac{5}{18} = 30$ किमी/घंटा

$\therefore$ समय $= \frac{252}{30}$ सेकंड = 8.4 सेकंड

@apna_channels

Ex. ट्रेन 'A' को 36 किमी/घंटा की गति से विपरीत दिशा में चल रही 300 मीटर लंबी ट्रेन 'B' को पार करने में 15 सेकंड लगते हैं। इसके अतिरिक्त, ट्रेन 'A' को 500 मीटर लंबी स्थिर ट्रेन 'C' को पार करने में 30 सेकंड लगते हैं। ट्रेन 'A' की लंबाई (मीटर में) ज्ञात कीजिए।

HINTS माना, ट्रेन A की लंबाई = L_A

ट्रेन A द्वारा लिया गया समय = 30 सेकंड.

ट्रेन C की लंबाई = 500 मीटर

तो ट्रेन A की गति

$= (S_A) = \frac{L_A + 500}{30}$

ट्रेन B की गति = 36 किमी/घंटा

$= 36 \times \frac{5}{18} = 10$ मीटर/सेकंड

समय = 15 सेकंड

B की लंबाई = 300 मीटर

प्रश्नानुसार,

$(SA + 10) = \frac{L_A + 300}{15}$

$\Rightarrow (LA + 300) = \left(\frac{L_A + 500}{30} + 10\right) \times 15$

$\Rightarrow LA + 300 = \frac{L_A + 500 + 300}{30} \times 15$

$\Rightarrow 2LA + 600 = LA + 800$

$\therefore LA = 200$ m

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

अध्याय
28

रैखिक और वृत्तीय चाल

रेखीय दौड़

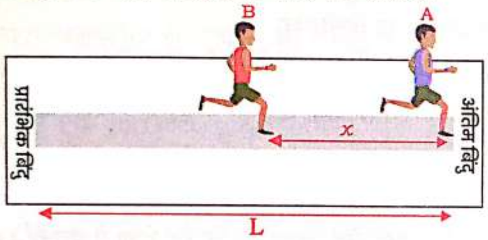
एक **रेखीय दौड़** (linear race) में धावक प्रारंभिक बिंदु से अंतिम बिंदु तक सीधे मार्ग में दौड़ते हैं।

हेड स्टार्ट (Head start): यह उस लाभ को दर्शाता है जो किसी एक या अधिक प्रतियोगियों को दौड़ की शुरुआत में दिया जाता है। यह लाभ दूरी (किसी निश्चित दूरी आगे से शुरू करना) या समय (कुछ समय पहले शुरू करना) के रूप में हो सकता है।

डेड हीट (Dead heat): यह तब होता है जब किसी दौड़ में दो या अधिक प्रतियोगी बिल्कुल एक ही समय पर समाप्त करते हैं। दूसरे शब्दों में, कोई स्पष्ट विजेता नहीं होता।

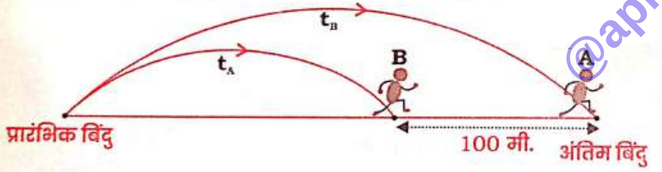
A, B को 'x' मीटर से हराता है

A, B को 'x' मीटर से हराता है: इसका अर्थ है कि जब A अंतिम बिंदु पार करता है, तो B अंतिम बिंदु से 'x' मीटर पीछे होता है।



∴ गति ∝ दूरी (समय स्थिर है)

☞ 1 कि.मी. की दौड़ में, A ने B को 100 मीटर से हराया।



इस स्थिति में, व्यक्ति A 1 कि.मी. की दूरी 'L' को पूरा करता है, लेकिन व्यक्ति B केवल = L – x = 1000 – 100 = 900 मी. ही पूरा करता है। यहाँ, दोनों व्यक्तियों द्वारा लिया गया समय समान है ($t_A = t_B$)।

Ex. 100 मी. की दौड़ में, A ने B को 20 मी. से हराया और B ने C को 20 मी. से हराया। तो A, C को कितनी दूरी से हराता है?

HINTS **स्थिति-I**

100 मी. की दौड़ में, A 100 मी. तय करता है और B तय करता है = 100 – 20 = 80 मी.

स्थिति-II

100 मी. की दौड़ में, B 100 मी. तय करता है और C तय करता है = 80 मी.

अतः,

	A	B	C
	100	80	80
	100	∝100	80
	10000	8000	6400
$\times \frac{1}{100}$	100	80	64

∴ 100 मी. की दौड़ में A, C को 100 – 64 = 36 मी. से हराएगा।

Ex. 1200 मी. की दौड़ में, बाइक A बाइक B को 100 मी. से हराती है। बाइक B, बाइक C को 600 मी. की दौड़ में 100 मी. से हराती है। यदि 720 मी. की दौड़ में बाइक A, बाइक C को 30 सेकंड से हराती है, तो बाइक C की गति क्या है?

HINTS

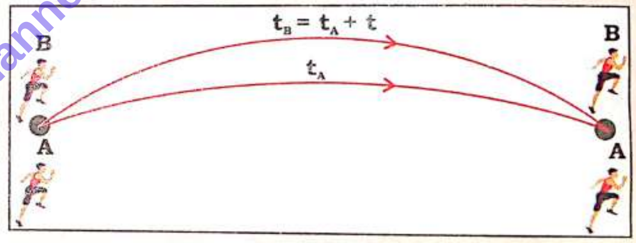
A : B : C A : B : C
1200 : 1100 → 12 : 11 : 11
600 : 500 → 6 : 6 : 5
72 : 66 : 55
×10 ×10
720 550
अंतर 170 मी.

∵ बाइक C 30 सेकंड में 170 मीटर की दूरी तय करती है।

∴ बाइक C की गति $= \frac{170}{30} = \frac{17}{3}$ मी./से.

A, B को 't' सेकंड से हराता है

A, B को 't' सेकंड से हराता है अर्थात् A दौड़ को B से 't' सेकंड पहले पूरा करता है। यदि A का समय 't_A' है, तो B का समय 't_A + t' होगा।



☞ 1 कि.मी. की दौड़ में, A ने B को 10 सेकंड से हराया।

इस स्थिति में, मान लो व्यक्ति A 1 कि.मी. की दूरी 't' सेकंड में तय करता है, तो व्यक्ति B वही दूरी 't + 10' सेकंड में तय करेगा।

Ex. 1200 मी. की दौड़ में, राकेश 36 सेकंड में अंतिम बिंदु पर पहुँचता है और राजेश 40 सेकंड में। राकेश ने राजेश को कितनी दूरी से हराया?

HINTS 36 सेकंड में राजेश द्वारा तय की गई दूरी

$= \frac{1200}{40} \times 36 = 1080$ मी.

∴ राकेश ने राजेश को 1200 – 1080 = 120 मी. से हराया।

वैकल्पिक विधि

	राकेश		राजेश
समय →	36	:	40
	9	:	10
दूरी →	10	:	9

अन्तर 1 इकाई → 120 मी.

10 → 1200 मी.

∴ राकेश ने राजेश को 120 मी. की दूरी से हराया।

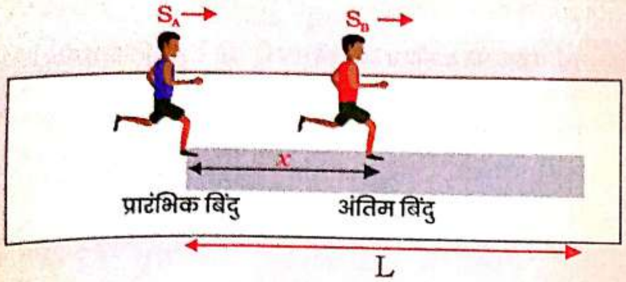
@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

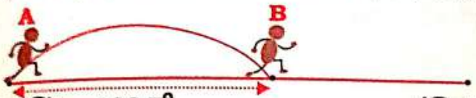
Join Telegram: @yct_publication

A, B को 'x' मीटर की बढ़त देता है

A, B को 'x' मीटर की बढ़त देता है: इसका अर्थ है कि B प्रारंभ रेखा से 'x' मीटर आगे से शुरू करता है या प्रभावी रूप से, यदि ट्रैक की लंबाई 'L' है तो B को 'L – x' मीटर दौड़ना होता है।



☞ 1 किमी की दौड़ में, A, B को 100 मीटर की बढ़त दे सकता है।



इस स्थिति में, व्यक्ति A कुल दूरी 'L' = 1 किमी तय करता है, लेकिन व्यक्ति B केवल = L – x = 1000 – 100 = 900 मी. तय करता है।

Ex. 5 किमी की दौड़ में, S ने T को 500 मी. की बढ़त दी। यदि दोनों एक ही समय पर दौड़ पूरी करते हैं और T की गति 13.5 किमी/घंटा है, तो S की गति क्या होगी?

HINTS

	S	:	T
दूरी →	5000	:	4500
चाल →	10	:	9
	×1.5 ↓		↓ ×1.5
	15 किमी./घंटा	:	13.5 किमी./घंटा

∴ S की गति = 15 कि.मी./घंटा

Ex. 400 मीटर की दौड़ में, A की गति 16 मीटर/सेकंड है। यदि A, B को 15 मीटर की बढ़त देता है और फिर भी उसे 10 सेकंड से हरा देता है, तो B की गति क्या है?

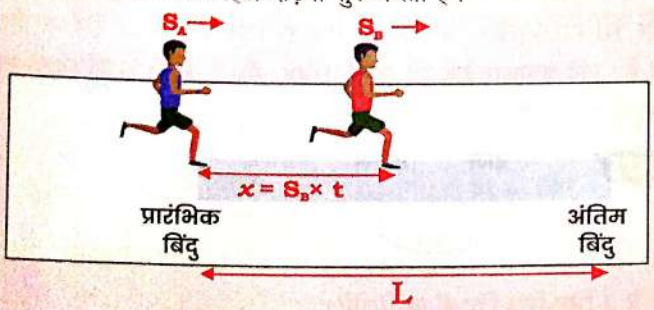
HINTS A का समय = $\frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}} = \frac{400}{16}$ = 25 सेकंड

	A	:	B
दूरी →	400	:	385
चाल →	25	:	35

∴ B की गति = $\frac{385}{35}$ = 11 मी./सेकंड

A, B को 't' मिनट की बढ़त देता है

A, B को 't' मिनट की बढ़त देता है: व्यक्ति B, A के प्रारंभ बिंदु से शुरू करने से 't' मिनट पहले दौड़ना शुरू करता है।



☞ 1 कि.मी. की दौड़ में, A, B को 10 मिनट की शुरुआती बढ़त दे सकता है। इस स्थिति में, यदि व्यक्ति A कुल दूरी 'L' = 1 कि.मी. 'T' मिनट में तय करता है और दौड़ बराबरी पर समाप्त होती है, तो व्यक्ति B वही दौड़ 'T + 10' मिनट में पूरी करता है।

Ex. A, B को 1500 मी. की दौड़ में 10 सेकंड की बढ़त देता है और दोनों एक ही समय पर दौड़ पूरी करते हैं। यदि B की गति 6 मीटर/सेकंड है, तो A द्वारा दौड़ पूरी करने में लिया गया समय (मिनटों में) कितना होगा?

HINTS दिया गया,

दूरी = 1500 मी.
B की गति = 6 मीटर/सेकंड
B द्वारा दौड़ पूरी करने में लिया गया समय = $\frac{1500}{6}$ = 250 सेकंड

A द्वारा दौड़ पूरी करने में लिया गया समय = 250 – 10 = 240 सेकंड = 4 मिनट
∴ A दौड़ पूरी करने में 4 मिनट लेगा।

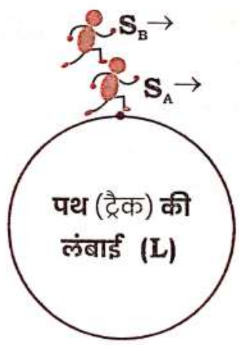
वृत्तीय दौड़

वृत्तीय दौड़ एक ऐसी प्रतियोगिता है जो बंद, वृत्ताकार ट्रैक पर होती है जहाँ प्रारंभिक और अंतिम बिंदु समान होते हैं।

ट्रैक पर किसी भी बिंदु पर पहली मुलाकात का समय निकालना, यदि A और B एक ही दिशा में दौड़ रहे हों:

माना,
ट्रैक की लंबाई = L
A की गति = S_A
B की गति = S_B
जहाँ $S_A > S_B$

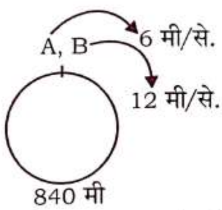
@apna_channels



पहली मुलाकात का समय = $\frac{\text{ट्रैक की लंबाई (L)}}{(S_A - S_B)}$

Ex. 840 मी. की वृत्तीय दौड़ में, A और B एक ही दिशा में, एक ही समय पर और एक ही बिंदु से क्रमशः 6 मीटर/सेकंड और 12 मीटर/सेकंड की गति से दौड़ना शुरू करते हैं। वे अगली बार कितने समय बाद मिलेंगे?

HINTS



सापेक्ष गति = 12 – 6 = 6 मी./से.

समय = $\frac{\text{ट्रैक की लंबाई}}{\text{सापेक्ष गति}} = \frac{840}{6}$ = 140 सेकंड

∴ वे अगली बार 140 सेकंड बाद मिलेंगे।

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

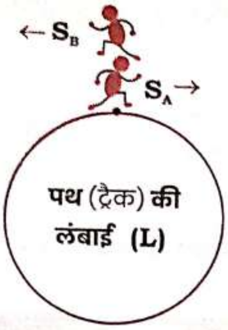
ट्रैक पर किसी भी बिंदु पर पहली मुलाकात का समय निकालना, यदि A और B विपरीत दिशा में दौड़ रहे हों:

माना,

ट्रैक की लंबाई = L

A की गति = S_A

B की गति = S_B



$$\text{पहली मुलाकात का समय} = \frac{\text{ट्रैक की लंबाई (L)}}{S_A + S_B}$$

Ex. 693 मी. के वृत्ताकार पथ पर, सुजाता और अंजली एक ही बिंदु से लेकिन विपरीत दिशाओं में क्रमशः 2.85 किमी/घंटा और 1.5 मीटर/सेकंड की गति से चलना शुरू करती हैं। वे पहली बार कब मिलेंगी?

HINTS 2.85 किमी/घंटा = $2.85 \times \frac{5}{18}$ मीटर/सेकंड = 0.792 मी./से.

सापेक्ष गति = 1.5 + 0.792 = 2.292 मीटर/सेकंड

मिलने का समय = $\frac{693}{2.292}$ = 302.36 सेकंड = 5.04 मिनट

∴ वे पहली बार 5.04 मिनट बाद मिलेंगी।

ट्रैक पर प्रारंभिक बिंदु पर पहली मुलाकात का समय निकालना, यदि A और B किसी भी दिशा में दौड़ रहे हों:

माना,

ट्रैक की लंबाई = L

A की गति = S_A

B की गति = S_B

$$\text{प्रारंभिक बिंदु पर पहली मुलाकात का समय} = LCM\left(\frac{L}{S_A}, \frac{L}{S_B}\right)$$

यहाँ दोनों स्थितियों में, चाहे A और B एक ही दिशा में दौड़ रहे हों या विपरीत दिशा में, सूत्र समान है।

Ex. 950 मी. लंबी वृत्तीय दौड़ में, A और B क्रमशः 18 किमी/घंटा और 36 किमी/घंटा की गति से, एक ही दिशा में, एक ही समय पर और एक ही बिंदु से शुरू करते हैं। वे पहली बार प्रारंभिक बिंदु पर कितने सेकंड बाद मिलेंगे?

HINTS समय = ल.स.प $\left(\frac{950}{18 \times \frac{5}{18}}, \frac{950}{36 \times \frac{5}{18}}\right)$ = ल.स.प (190, 95)

= 190 सेकंड

Ex. अरविंद और चेतन 210 मी. लंबे वृत्ताकार ट्रैक पर एक ही बिंदु से, एक ही दिशा में, एक साथ दौड़ना शुरू करते हैं। यदि अरविंद एक चक्कर 180 सेकंड में और चेतन एक चक्कर 420 सेकंड में पूरा करता है, तो वे पहली बार प्रारंभिक बिंदु पर कितने समय बाद मिलेंगे?

HINTS अरविंद द्वारा 1 चक्कर पूरा करने का समय = 180 सेकंड

चेतन द्वारा 1 चक्कर पूरा करने का समय = 420 सेकंड

∴ प्रारंभिक बिंदु पर पहली बार मिलने में लगा समय = ल.स.प (180 सेकंड, 420 सेकंड) = 1260 सेकंड = 21 मिनट

वृत्तीय ट्रैक पर A और B कितनी बार मिलते हैं, यह निकालना:

माना,

ट्रैक की लंबाई = L

A की गति = S_A

B की गति = S_B

A और B की सापेक्ष गति यदि = S_{AB}

$$\text{बैठकों की संख्या (n)} = \frac{LCM\left(\frac{L}{S_A}, \frac{L}{S_B}\right)}{\frac{L}{S_{AB}}}$$

स्मार्ट टिप्स:

(i) A और B एक ही दिशा में दौड़ रहे हों, तो वृत्तीय ट्रैक पर उनके मिलने की संख्या

$$= \begin{cases} S_A - S_B \ ; & \text{If } S_A > S_B \\ S_B - S_A \ ; & \text{If } S_B > S_A \end{cases}$$

(ii) यदि A और B विपरीत दिशा में दौड़ रहे हों, तो वृत्तीय ट्रैक पर उनके मिलने की संख्या = $S_A + S_B$

ऊपर बताए गए स्मार्ट टिप्स का प्रयोग करते समय हमेशा $S_A : S_B$ का सबसे सरल रूप निकालें। उदाहरण के लिए:

यदि, S_A = 8 मीटर/सेकंड, S_B = 6 मीटर/सेकंड

A और B एक ही दिशा में दौड़ रहे हैं, तब:

WRONG SOLUTION	RIGHT SOLUTION
A और B के मिलने की संख्या $= S_A - S_B = 8 - 6 = 2$	$S_A : S_B = 4 : 3$ A और B के मिलने की संख्या $= S_A - S_B = 4 - 3 = 1$

Ex. अंजली और बबीता एक ही समय पर, एक ही बिंदु से, क्रमशः 8 मीटर/सेकंड और 6 मीटर/सेकंड की गति से विपरीत दिशाओं में वृत्ताकार ट्रैक पर दौड़ रही हैं। यदि वृत्ताकार ट्रैक की लंबाई 960 मी. है, तो वे कितने भिन्न-भिन्न बिंदुओं पर मिलेंगी?

HINTS

	A		B
गति →	8	:	6
	4	:	3
		योग 7	

∴ वे 7 भिन्न-भिन्न बिंदुओं पर मिलेंगी।

Ex. राम और श्याम एक ही समय पर, एक ही बिंदु से, क्रमशः 14 मीटर/सेकंड और 10 मीटर/सेकंड की गति से एक ही दिशा में वृत्ताकार ट्रैक पर दौड़ रहे हैं। यदि वृत्ताकार ट्रैक की लंबाई 1000 मी. है, तो वे कितने भिन्न-भिन्न बिंदुओं पर मिलेंगे?

HINTS

	राम		श्याम
गति →	14	:	10
	7	:	5
		अंतर 2	

∴ वे 2 भिन्न-भिन्न बिंदुओं पर मिलेंगे।

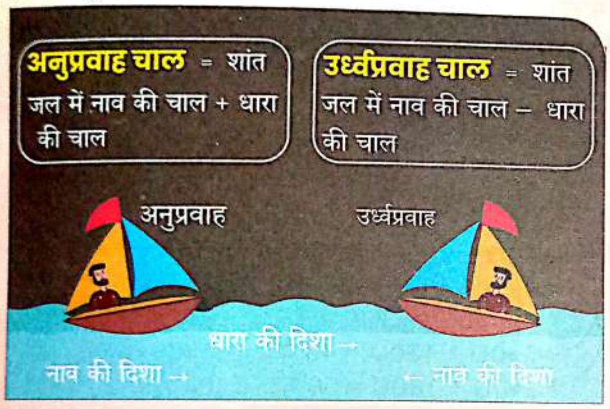
@apna_channels
Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

अध्याय 29

नाव और धारा

- **धारा :** नदी में बहते हुए जल को **धारा** कहते हैं।
- **उर्ध्वप्रवाह:** यदि नाव धारा की विपरीत दिशा में चल रही है, तो इसे **उर्ध्वप्रवाह/प्रतिकूल प्रवाह** कहा जाता है। इस स्थिति में नाव की कुल चाल को उर्ध्वप्रवाह चाल कहते हैं।
- **अनुप्रवाह :** यदि नाव धारा की दिशा में चल रही है, तो इसे **अनुप्रवाह/अनुकूल प्रवाह** कहा जाता है। इस स्थिति में नाव की कुल चाल को अनुप्रवाह चाल कहते हैं।
- **शांत जल :** ऐसी स्थिति में जल के बहाव को स्थिर माना जाता है और जल की चाल शून्य होती है।



महत्वपूर्ण सूत्र

यदि शांत जल में नाव की चाल 'B' है और धारा की चाल 'S' है, तो:

- धारा के अनुकूल चाल = B + S
- धारा के प्रतिकूल चाल = B – S
- शांत जल में नाव की चाल = $\frac{1}{2}$(अनुकूल चाल + प्रतिकूल चाल)
- धारा की चाल = $\frac{1}{2}$(अनुकूल चाल - प्रतिकूल चाल)

Ex. यदि शांत जल में एक तैराक की चाल 9 किमी/घंटा है और धारा की चाल 5 किमी/घंटा है, तो धारा के प्रतिकूल और धारा के अनुकूल तैराक की चाल ज्ञात करें।

HINTS प्रतिकूल चाल = B – S = 9 – 5 = 4 किमी/घंटा

अनुकूल चाल = B + S = 9 + 5 = 14 किमी/घंटा

Ex. एक नाव नदी में बहाव के अनुकूल 3 घंटे 45 मिनट में 30 किमी चलती है तथा बहाव के प्रतिकूल 2 घंटे 30 मिनट में 15 किमी चलती है। स्थिर जल में नाव की चाल तथा प्रवाह की चाल ज्ञात कीजिए (किमी/घंटा में)।

HINTS अनुकूल चाल = B + S = $\frac{30}{\frac{15}{4}}$ = 8 ....(i)

$\left(\because 3 \text{ घंटे } 45 \text{ मिनट} = \frac{15}{4} \text{ घंटे}\right)$

प्रतिकूल चाल = B – S = $\frac{15}{\frac{5}{2}}$ = 6 ....(ii)

$\left(\because 2 \text{ घंटे } 30 \text{ मिनट} = \frac{5}{2} \text{ घंटे}\right)$

समीकरण (i) और (ii) को हल करने पर:

B = 7 किमी/घंटा, S = 1 किमी/घंटा

∴ स्थिर जल में नाव की चाल = 7 किमी/घंटा

प्रवाह की चाल = 1 किमी/घंटा

Ex. एक नाव को धारा के प्रतिकूल एक निश्चित दूरी तय करने में धारा के अनुकूल समान दूरी तय करने में लगने वाले समय का 2.2 गुना समय लगता है। यदि वह 2 घंटे 30 मिनट में धारा के अनुकूल 55 किमी की दूरी तय कर सकती है, तो स्थिर जल में नाव की चाल क्या है?

HINTS अनुकूल चाल = $\frac{55}{2.5}$ = 22 किमी/घंटा

$\because 2.2 = \frac{22}{10} = \frac{11}{5}$

	अनुकूल		प्रतिकूल
समय →	5	:	11
चाल →	11	:	5
	↓×2		↓×2
	22 किमी/घंटा		10 किमी/घंटा

∴ शांत जल में नाव की चाल = $\frac{1}{2}$ × (22 + 10) = 16 किमी/घंटा

Ex. एक तैराक धारा के प्रतिकूल 3 किमी/घंटा की चाल से तैरता है और धारा के अनुकूल 1 किमी, 10 मिनट में तैरता है, तो वह स्थिर जल में 5 किमी की दूरी कितने समय में तय करेगा?

HINTS प्रतिकूल चाल = 3 किमी/घंटा

अनुकूल चाल = $\frac{1}{\frac{10}{60}}$ = 6 किमी/घंटा

शांत जल में तैराक की चाल = $\frac{1}{2}$ (6 + 3) = $\frac{9}{2}$ = 4.5 किमी/घंटा

∴ अभीष्ट समय = $\frac{5}{4.5} = \frac{50}{45} = \frac{10}{9} = 1\frac{1}{9}$ घंटा

$\frac{B}{S} = \frac{(T_2+T_1)}{(T_2-T_1)}$ पर आधारित

यदि एक नाव द्वारा धारा के अनुकूल एक निश्चित दूरी तय करने में लिया गया समय 'T_1' है और धारा के प्रतिकूल समान दूरी तय करने में लिया गया समय 'T_2' है, तो नाव की चाल का धारा की चाल से अनुपात है:

$$\frac{B}{S} = \frac{(T_2+T_1)}{(T_2-T_1)}$$

Ex. एक मोटरबोट को धारा के अनुकूल एक निश्चित दूरी तय करने में 18 घंटे लगते हैं और धारा के प्रतिकूल समान दूरी तय करने में 36 घंटे लगते हैं। स्थिर जल में नाव की चाल और धारा की चाल का अनुपात ज्ञात कीजिए।

HINTS $\frac{B}{S} = \frac{(T_2+T_1)}{(T_2-T_1)} = \frac{36+18}{36-18} = \frac{54}{18} = \frac{3}{1}$ = 3 : 1

@apna_channels
Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

$D = \frac{T(B^2 - S^2)}{2B}$ पर आधारित

माना, दो बिंदुओं X और Y के बीच की दूरी 'D' है। यदि एक नाव द्वारा बिंदु X से Y तक एक निश्चित दूरी तय करने और Y से X तक वापस आने में लिया गया कुल समय "T" है, तो:

- दो बिन्दुओं के बीच की दूरी 'D' = $\frac{T(B^2 - S^2)}{2B}$
- नाव की औसत चाल = $\frac{(B^2 - S^2)}{B}$

Ex. एक मोटरबोट, जिसकी शांत जल में चाल 15 किमी/घंटा है, को धारा के अनुकूल 50 किमी जाने और वापस आने में 7 घंटे 30 मिनट का समय लगता है। धारा की चाल (किमी/घंटा में) ज्ञात करें।

HINTS माना, धारा की चाल = S किमी/घंटा

शांत जल में नाव की चाल = 15 किमी/घंटा

$\because D = \frac{T(B^2 - S^2)}{2B}$

$\Rightarrow 50 = \frac{7.5 \times (15^2 - S^2)}{2 \times 15}$

$\Rightarrow S = 5$ किमी/घंटा

$\therefore$ धारा की चाल = 5 किमी/घंटा

Ex. एक नाव शहर P से शहर Q तक धारा के प्रतिकूल दिशा में चलती है और फिर शहर Q से शहर P तक धारा के अनुकूल दिशा में लौटती है। यदि स्थिर जल में नाव की चाल 35 किमी/घंटा है और धारा की चाल 5 किमी/घंटा है, तो पूरी यात्रा में नाव की औसत चाल क्या है?

HINTS नाव की औसत चाल = $\frac{(B^2 - S^2)}{B}$

$= \frac{(35)^2 - (5)^2}{35} = \frac{30 \times 40}{35}$

$= \frac{240}{7} = 34.28$ किमी/घंटा

$D = \frac{T(B^2 - S^2)}{2S}$ पर आधारित

यदि एक नाव को धारा के प्रतिकूल 'D' दूरी तय करने में, धारा के अनुकूल उतनी ही दूरी तय करने से "T" घंटे अधिक लगते हैं, तो:

$$D = \frac{T(B^2 - S^2)}{2S}$$

Ex. स्थिर जल में एक नाव की चाल 20 किमी/घंटा है, जबकि नदी 8 किमी/घंटा की चाल से बह रही है और नाव द्वारा धारा के प्रतिकूल एक निश्चित दूरी तय करने में लिया गया समय, धारा के अनुकूल समान दूरी तय करने में लिए गए समय से 6 घंटे अधिक है। नाव द्वारा धारा के अनुकूल तय की गई दूरी ज्ञात कीजिए।

HINTS $D = \frac{T(B^2 - S^2)}{2S}$

$= \frac{6 \times (20^2 - 8^2)}{2 \times 8}$

$= \frac{6 \times 28 \times 12}{2 \times 8} = 126$ किमी

वैकल्पिक विधि

माना, अभीष्ट दूरी 'D' किमी है।

शांत जल में नाव की चाल 'x' = 20 किमी/घंटा

धारा की चाल y' = 8 किमी/घंटा

प्रश्नानुसार,

$\frac{D}{x-y} - \frac{D}{x+y} = 6 \Rightarrow \frac{D}{12} - \frac{D}{28} = 6 \Rightarrow D = 21 \times 6$

$\therefore D = 126$ किमी

UV कॉन्सेप्ट

Ex. एक नाव 7 घंटे 30 मिनट में धारा की दिशा में 40 किमी और धारा की विपरीत दिशा में 25 किमी जा सकती है। यह 10 घंटे में धारा की दिशा में 48 किमी और धारा की विपरीत दिशा में 36 किमी जा सकती है। शांत जल में नाव की चाल (किमी/घंटा में) कितनी होगी?

HINTS माना, शांत जल में नाव की चाल = x किमी/घंटा

धारा की चाल = y किमी/घंटा

माना, $U = \frac{1}{x-y}$, $D = \frac{1}{x+y}$

प्रश्नानुसार,

40D + 25U = 7.5 घंटे $_{\times 6}$

48D + 36U = 10 घंटे $_{\times 5}$

240D + 150U = 45 घंटे

240D + 180U = 50 घंटे (−)

−30U = −5

$U = \frac{1}{6} \Rightarrow x - y = 6$ ....(i)

अब, $48D + 36 \times \frac{1}{6} = 10 \Rightarrow 48D = 4$

$\Rightarrow D = \frac{1}{12} \Rightarrow x + y = 12$ ....(ii)

समीकरण (i) और (ii) से:

$x = 9$ किमी/घंटा

$\therefore$ शांत जल में नाव की चाल = 9 किमी/घंटा

Ex. एक नाव 2 घंटे में 15 किमी धारा के अनुकूल और 8 किमी धारा के प्रतिकूल जा सकती है। यह 2 घंटे 50 मिनट में 20 किमी धारा के अनुकूल और 12 किमी धारा के प्रतिकूल जा सकती है। धारा के अनुकूल जाते समय नाव की गति (किमी/घंटा में) क्या है?

HINTS माना, स्थिर जल में नाव की गति = x किमी/घंटा

धारा की गति = y किमी/घंटा

$U = \frac{1}{x-y}$, $D = \frac{1}{x+y}$

15D + 8U = 2 घंटे $_{\times 3}$

20D + 12U = 2 घंटे 50 मिनट $_{\times 2}$

45D + 24U = 6 घंटे

40D + 24U = 5 घंटे 40 मिनट (−)

5D = 20 मिनट $\left(\frac{1}{3}\text{ घंटे}\right)$

$D = \frac{1}{15} \Rightarrow x + y = 15$

$\therefore$ अनुकूल चाल = 15 किमी/घंटा

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

विविध

Ex. एक व्यक्ति नाव चलाते हुए कुल 15 घंटे के समय में J से K (धारा की विपरीत दिशा में) की ओर जाता है और K से J (धारा की दिशा में) की ओर वापस आता है। J और K के बीच की दूरी 300 किमी है। धारा की दिशा में 9 किमी की दूरी तक नाव चलाने में व्यक्ति द्वारा लिया गया समय, धारा की विपरीत दिशा में 3 किमी की दूरी तक नाव चलाने में उसके द्वारा लिए गए समय के समान है। शांत जल में नाव की अनुमानित चाल क्या है?

HINTS

	अनुकूल		प्रतिकूल
दूरी →	9	:	3
	3	:	1
चाल→	3	:	1

माना, धारा के प्रतिकूल और अनुकूल चलंने में नाव की चाल क्रमशः 'x' और '$3x$' है।

इसलिए, कुल यात्रा में औसत चाल = $\frac{2\times 3x\times x}{4x}$

$$\Rightarrow \frac{2\times 300}{15} = \frac{2\times 3x\times x}{4x} \Rightarrow x = \frac{80}{3}$$

$\therefore$ नाव की चाल = $\frac{3x+x}{2} = 2x = 2\times\frac{80}{3} = 53.33$ किमी/घंटा

Ex. X और Y किसी नदी पर दो बिंदु हैं। बिंदु P और Q सीधी रेखा XY को तीन बराबर भागों में विभाजित करते हैं। नदी XY के समानांतर बहती है और किसी नाव द्वारा X से Q तक और Y से Q तक की यात्रा में लगने वाले समय का अनुपात 4 : 5 है। धारा की दिशा में नाव की चाल और धारा की चाल का अनुपात ज्ञात करें।

HINTS

माना,

X से Q की ओर चलने में लगा समय = 4 इकाई

Y से Q की ओर चलने में लगा समय = 5 इकाई

$\therefore T_{XY} = \frac{4}{2}\times 3 = 6$ इकाई

$T_{YX} = 5\times 3 = 15$ इकाई

	अनुकूल		प्रतिकूल
समय →	6	:	15
	2	:	5
चाल→	5	:	2

$\therefore$ (धारा के अनुकूल नाव की चाल) : (धारा की चाल)

$= 5 : \frac{5-2}{2} = 5 : \frac{3}{2} = \boxed{10 : 3}$

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

अध्याय 30

क्रमचय और संचय

क्रमगुणित की अवधारणा

प्रथम n क्रमागत प्राकृतिक संख्याओं के गुणनफल को क्रमगुणित-n के रूप में परिभाषित किया गया है। इसे n! या $\underline{|n}$ से दर्शाया जाता है।

$n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \ldots\ldots (n-2)(n-1)\,n$

या

$n(n-1)(n-2) \ldots\ldots 3 \times 2 \times 1$

ऋणात्मक पूर्णांक और भिन्न का क्रमगुणित परिभाषित नहीं है। क्रमगुणित केवल पूर्ण संख्याओं के लिए परिभाषित है।

- 3! = अपरिभाषित

$\left(\frac{3}{4}\right)!$ = अपरिभाषित

$0! = 1$

$1! = 1$

$2! = 2 \times 1 = 2$

$3! = 6$

$4! = 24$

$5! = 120$

$6! = 720$

Ex. सरल करें $\frac{70!}{67!}$

HINTS $\frac{70!}{67!} = \frac{70 \times 69 \times 68 \times 67!}{67!} = 70 \times 69 \times 68$

Ex. $\frac{11! - 10!}{9!}$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $\frac{11! - 10!}{9!} = \frac{11 \times 10 \times 9! - 10 \times 9!}{9!} = 110 - 10 = 100$

Ex. निम्न को क्रमगुणित में बदलें

$3 \times 6 \times 9 \times 12 \times 15 \times 18$

HINTS $3 \times 6 \times 9 \times 12 \times 15 \times 18$

$= 3(1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6)$

$= 3 \times 6!$

Ex. यदि $(n+3)! = 56\,(n+1)!$ तो n का मान ज्ञात करें।

HINTS $(n+3)(n+2)(n+1)! = 56\,(n+1)!$

$(n+3)(n+2) = 56$

$8 \times 7 = 56$

$n = 5$

Ex. यदि $(n+2)! = 2550 \times n!$ तो n का मान ज्ञात करें।

HINTS $(n+2)(n+1)\,n! = 2550 \times n!$

$(n+2)(n+1) = 2550$

$51 \times 50 = 2550$

$n = 49$

Ex. यदि $(n+1)! = 12\,(n-1)!$ तो n का मान ज्ञात करें।

HINTS $(n+1)(n)(n-1)! = 12(n-1)!$

$(n+1)(n) = 12$

$4 \times 3 = 12$

$n = 3$

योग का सिद्धांत

यदि आपके पास n असंयुक्त घटनाएँ हैं, अर्थात् $A_1, A_2, \ldots\ldots A_n$ जिनका परिणाम क्रमशः $n_1, n_2, \ldots\ldots n_n$ है, तो कोई भी घटना $n_1 + n_2 + \ldots\ldots + n_n$ तरीकों से घटित हो सकती है।

Ex. शुभम के पास 2 चप्पलें और 3 जूते हैं। वह चप्पलों या जूतों के कितने अलग-अलग जोड़े चुन सकता है?

HINTS

एक समय में केवल एक जोड़ी चप्पल या जूते ही पहने जा सकते हैं। इसलिए चप्पल और जूते एक-दूसरे से स्वतंत्र हैं। अतः चुनने की कुल संख्या = 3 + 2 = 5

☞ आइए बेहतर समझ के लिए एक और उदाहरण लें। मान लीजिए कि भारत में 15 NITs और 20 IITs हैं और आपने JEE की परीक्षा उत्तीर्ण की है, तो (15 + 20) = 35 तरीके हैं जिनसे आप अपना कॉलेज चुन सकते हैं।

☞ दूसरा उदाहरण, मान लीजिए कि आप एक रेस्तरां में जाते हैं जहां आपको 8 चिकन आइटम और 5 शाकाहारी आइटम मिलते हैं, अब आप इनमें से एक डिश ऑर्डर करना चाहते हैं। तो, आप एक डिश को (8 + 5) = 13 तरीकों से चुन सकते हैं।

@apna_channels

गुणन का सिद्धांत

मान लीजिए कि A और B क्रमशः n_1 और n_2 संभावित परिणामों वाली घटनाएँ हैं। फिर दोनों घटनाओं के अनुक्रम के परिणामों की कुल संख्या $n_1 \times n_2$ है।

आइए गुणन के सिद्धांत को एक उदाहरण से समझाएं:

Ex. विराट के पास 3 पैंट और 4 शर्ट हैं। एक पैंट और शर्ट के कितने अलग-अलग जोड़े पहने जा सकते हैं?

HINTS पैंट के हर विकल्प के लिए, शर्ट के चार विकल्प हैं। इसलिए यह एक आश्रित घटना है, अतः कपड़े पहनने के कुल तरीके = 4 × 3 = 12

☞ आइए एक और उदाहरण लेते हैं। मान लीजिए कि शिक्षक दिवस पर आप अपने किंडरगार्डन, हाई स्कूल और अपने कॉलेज जाना चाहते हैं। यदि आपके किंडरगार्डन और हाई स्कूल को जोड़ने के तीन रास्ते हैं और आपके हाई स्कूल और कॉलेज को जोड़ने के पांच रास्ते हैं। फिर आप अपने किंडरगार्डन से अपने कॉलेज तक 3 × 5 = 15 तरीकों से जा सकते हैं क्योंकि आप अपने हाई स्कूल के लिए तीन मार्गों में से कोई भी चुन सकते हैं और फिर आप अपने कॉलेज के लिए पांच मार्गों में से कोई भी चुन सकते हैं। संपूर्ण मार्ग का चयन आपके द्वारा चुने गए दोनों मार्गों पर निर्भर करता है, इसलिए गुणा करते हैं।

☞ एक अन्य उदाहरण है, मान लीजिए कि 20 IITs हैं, प्रत्येक की 7 ब्रांच हैं। फिर टॉपर 20 × 7 = 140 तरीकों से अपनी ब्रांच चुन सकता है।

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

क्रमचय

क्रमचय किसी समूह की वस्तुओं को एक विशेष क्रम में व्यवस्थित करने का एक तरीका है। यदि क्रम बदलता है, तो इसे एक अलग क्रमचय माना जाता है।

या

'वह व्यवस्था जहाँ क्रम मायने रखता है।'

क्रमचय का उपयोग तब किया जाता है जब क्रम महत्वपूर्ण होता है।

Ex. आपके पास 1, 2, 3 अंक हैं। बिना दोहराव के आप कितने दो-अंकीय संख्याएँ बना सकते हैं?

HINTS संभव संख्याएँ = 12, 13, 21, 23, 31, 32 = कुल 6 क्रमचय

यहाँ, 12 और 21 अलग-अलग माने जाते हैं क्योंकि अंकों का क्रम मायने रखता है।

क्रमचय सूत्र

'n' विभिन्न वस्तुओं में से एक समय में 'r' वस्तुओं को लेकर बने क्रमचयों (व्यवस्था) की संख्या जहाँ पुनरावृत्ति की अनुमति नहीं है, जिसे ^nP_r या P(n, r) द्वारा दर्शाया जाता है:

$$^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} \quad \text{जहाँ, } 0 \le r \le n$$

☞ उपरोक्त सूत्र का उपयोग करते हुए, n विभिन्न वस्तुओं को व्यवस्थित करने के तरीकों की कुल संख्या (एक समय में सभी को मिलाकर) n! है।

क्योंकि इस स्थिति में, r = n

$$\therefore \ ^nP_n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

क्रमचय पर आधारित कुछ महत्वपूर्ण परिणाम:

$$^nP_0 = \frac{n!}{(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

$$^nP_1 = \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$$

$$^nP_2 = \frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = n(n-1)$$

Ex. यदि अंक 0, 2, 4, 6, 8 का उपयोग करके बनाई गई किसी संख्या में अंकों को दोहराने की अनुमति नहीं है तो 10,000 से बड़ी सभी संख्याओं की कुल संख्या क्या होगी?

HINTS 0, 2, 4, 6, 8

2, 4, 6, 8				
4	4	3	2	1

आवश्यक कुल संख्याएँ = 4 × 4 × 3 × 2 = 96

Ex. यदि कोई नल एक से अधिक बार उपयोग नहीं किया जा सकता है तो 5 व्यक्ति 5 नलों से कितने प्रकार से पानी निकाल सकते हैं?

HINTS 1st व्यक्ति 5 में से किसी भी नल से पानी भर सकता है।

2nd व्यक्ति शेष 4 नलों में से किसी एक से पानी भर सकता है।

3rd व्यक्ति शेष 3 नलों में से किसी एक से पानी भर सकता है।

4th व्यक्ति शेष 2 नलों में से किसी एक से पानी भर सकता है।

5th व्यक्ति शेष 1 नल से पानी भर सकता है।

5	4	3	2	1

अतः कुल तरीकों की संख्या = 5 × 4 × 3 × 2 × 1 = 120

Ex. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 इन अंकों से, बिना पुनरावृत्ति के कितनी चार-अंकीय सम संख्याएँ बनाई जा सकती हैं?

HINTS 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

			2,4,6,8
7	6	5	×4

→ (सम संख्या)

आवश्यक कुल संख्याएँ = 7 × 6 × 5 × 4 = 840

Ex. 100-अंकों वाली कुल कितनी धनात्मक संख्याएँ होती हैं?

HINTS 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

1–9			
9	10	10	.... 99 बार

आवश्यक संख्या = 9 × [10 × 10 .... 99 बार]

$= 9 \times 10^{99}$

Ex. 'QUANTS' शब्द के अक्षरों को कितने तरीकों से व्यवस्थित किया जा सकता है (दोहराव की अनुमति नहीं है)?

HINTS तरीकों की संख्या = $^6P_6 = \frac{6!}{(6-6)!} = \frac{6!}{0} = 6! = 720$

Ex. 'DELHI' शब्द के सभी अक्षरों का प्रत्येक अक्षर का ठीक एक बार उपयोग करके, अर्थ सहित या बिना अर्थ के कितने शब्द बनाए जा सकते हैं?

HINTS शब्द 'DELHI' में 5 अक्षर हैं और ये सभी अक्षर अलग-अलग हैं। इन 5 अक्षरों का उपयोग करके, प्रत्येक अक्षर का प्रयोग ठीक एक बार करते हुए, जितने भी शब्द (अर्थ वाले या बिना अर्थ वाले) बनाए जा सकते हैं, उनकी कुल संख्या = 5 अक्षरों की सभी संभावित व्यवस्थाओं की संख्या (एक समय में सभी अक्षरों को लेकर)।

$^5P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

Ex. शब्द 'ADITYA' के अक्षर अलग-अलग कितनी तरह से क्रमबद्ध किए जा सकते हैं?

HINTS शब्द 'ADITYA' में 6 अक्षर हैं।

इन 6 अक्षरों में 'A' दो बार आया है।

कुल तरीकों की संख्या = $\frac{6!}{2!} = 360$

Ex. शब्द 'BANKING' के अक्षरों को भिन्न-भिन्न कितने तरीकों से लिखा जा सकता है?

HINTS शब्द 'BANKING' में 7 अक्षर हैं।

इन 7 अक्षरों में 'N' दो बार आया है।

कुल तरीकों की संख्या = $\frac{7!}{2!} = \frac{5040}{2} = 2520$

Ex. 'RUMOUR' शब्द के अक्षरों को कितने अलग- अलग तरीकों से व्यवस्थित किया जा सकता है?

HINTS शब्द 'RUMOUR' में 6 अक्षर हैं।

इन 6 अक्षरों में, 'R' दो बार आता है, 'U' भी दो बार आता है, और बाकी अक्षर अलग-अलग हैं।

अतः, इन अक्षरों को व्यवस्थित करने के कुल तरीकों की संख्या

$= \frac{6!}{(2!)(2!)} = 180$

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. 'ENGINEERING' शब्द के अक्षरों से कितनी व्यवस्थाऐं बनाई जा सकती है?

HINTS शब्द 'ENGINEERING' में 11 अक्षर हैं।

लेकिन इन 11 अक्षरों में, 'E' 3 बार आता है, 'N' 3 बार आता है, 'G' 2 बार आता है, 'I' 2 बार आता है, और बाकी अक्षर अलग-अलग हैं।

अतः, इन अक्षरों को व्यवस्थित करने के कुल तरीकों की संख्या

$= \frac{11!}{(3!)(3!)(2!)(2!)} = 277200$

Ex. 'TRIANGLE' शब्द के अक्षरों से कितने शब्द बन सकते हैं जिनमें T हमेशा शुरुआत में और E अंत में होता है।

HINTS यदि हम 'T' को शुरुआत में और 'E' को अंत में स्थिर कर दें, तो शेष 6 अक्षरों को $^6P_6 = 6! = 720$ तरीकों से व्यवस्थित किया जा सकता है।

Ex. शब्द 'DESIGN' के अक्षरों को अलग-अलग कितनी तरह से लिखा जा सकता है कि स्वर दोनों छोर पर हो?

HINTS तरीकों की संख्या $= 4! \times 2! = 48$

Ex. 'CORPORATION' शब्द के अक्षरों को कितने अलग- अलग तरीकों से व्यवस्थित किया जा सकता है ताकि स्वर हमेशा एक साथ आएं?

HINTS शब्द 'CORPORATION' में 11 अक्षर हैं। इसमें स्वर हैं: 'O', 'O', 'A', 'I', 'O' और ये 5 स्वर हमेशा साथ में आएं।

अतः इन 5 स्वरों को एक समूह मानकर एक अक्षर की तरह माना जा सकता है, यानी CRPRTN(OOAIO)

इसलिए कुल अक्षरों की संख्या 7 मानी जा सकती है। लेकिन इन 7 अक्षरों में 'R' दो बार आता है और बाकी अक्षर अलग-अलग हैं।

इन अक्षरों को व्यवस्थित करने के तरीकों की संख्या

$= \frac{7!}{2!} = \frac{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{2\times1} = 2520$

5 स्वरों (OOAIO) में, 'O' 3 बार आता है और बाकी स्वर अलग-अलग हैं। इन स्वरों को आपस में व्यवस्थित करने के तरीकों की संख्या

$= \frac{5!}{3!} = \frac{5\times4\times3\times2\times1}{3\times2\times1} = 20$

अतः आवश्यक तरीकों की कुल संख्या $= 2520 \times 20 = 50400$

Ex. शब्द 'DETAIL' के अक्षरों को कितने अलग-अलग तरीकों से व्यवस्थित किया जा सकता है ताकि स्वर केवल विषम स्थान मे हों?

HINTS शब्द 'DETAIL' में 6 अक्षर हैं जिनमें 3 स्वर ('E', 'A', 'I') और 3 व्यंजन ('D', 'T', 'L') हैं।

3 स्वर ('E', 'A', 'I') केवल विषम स्थानों पर ही आ सकते हैं।

आइए स्थानों को इस तरह चिन्हित करें: (1) (2) (3) (4) (5) (6) अब, ये 3 स्वर केवल (1), (3) और (5) स्थानों पर किसी भी क्रम में आ सकते हैं।

अतः, इन स्वरों को व्यवस्थित करने के तरीकों की संख्या:

$= {}^3P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

अब हमारे पास 3 व्यंजन ('D', 'T', 'L') हैं, जिन्हें शेष 3 स्थानों पर किसी भी क्रम में रखा जा सकता है।

अतः व्यंजनों को व्यवस्थित करने के तरीकों की संख्या:

$= {}^3P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

∴ अतः आवश्यक तरीकों की संख्या = स्वर व्यवस्थित करने के तरीके × व्यंजन व्यवस्थित करने के तरीके $= 6 \times 6 = 36$

Ex. अक्षरों 'L', 'M', 'N' और 'O' का प्रयोग करके कितने शब्द बनाए जा सकते हैं (एक अक्षर वाले शब्द भी हो सकते है और पुनरावृत्ति की अनुमति नहीं है)?

HINTS कुल अक्षर = 4

1-अक्षर वाले शब्द $= 1 \times 4 = 4$

2-अक्षर वाले शब्द $= 4 \times 3 = 12$

3-अक्षर वाले $= 4 \times 3 \times 2 = 24$

4-अक्षर वाले $= 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

शब्दों की कुल संख्या $= 4 + 12 + 24 + 24 = 64$

Ex. 1, 2, 3, 4, 5, 6 अंकों से चार अंकों की कितनी संख्याएं बनाई जा सकती हैं (अंकों की पुनरावृत्ति की अनुमति नहीं है)?

HINTS यहाँ, n = 6, r = 4

$^6P_4 = \frac{6!}{(6-4)!} = 360$

इस प्रकार, कुल 360 संख्याएँ बनाई जा सकती हैं।

Ex. यदि अक्षरों की पुनरावृत्ति की अनुमति नहीं है, तो शब्द 'LOGARITHMS' के अक्षरों से अर्थ सहित या बिना अर्थ के कितने 3 अक्षर वाले शब्द बनाए जा सकते हैं?

HINTS शब्द 'LOGARITHMS' में 10 अलग-अलग अक्षर हैं।

अतः, इन अक्षरों का उपयोग करके 3-अक्षरों के शब्द (अर्थ वाले या बिना अर्थ वाले) बनाए जाने की संख्या $= {}^{10}P_3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$

Ex. अंग्रेजी वर्णमाला के केवल व्यंजनों का एक ही बार प्रयोग करते हुए तीन अक्षर के कितने शब्द बनाये जा सकते हैं?

HINTS तरीकों की संख्या $= {}^{21}P_3 = \frac{21!}{(21-3)!}$

$= \frac{21\times20\times19\times18!}{18!} = 7980$

Ex. शब्द PERMUTATIONS के अक्षरों को कितने तरीकों से व्यवस्थित किया जा सकता है यदि शब्द 'P' से शुरू हो और 'S' पर अंत हो?

HINTS

P	E	R	M	U	T	A	T	I	O	N	S
fix											fix

तरीकों की संख्या $= \frac{10!}{2!}$ (∵ T = 2 बार)

पुनरावृत्ति के साथ क्रमचय सूत्र

यदि 'n' चीजों में से 'r' चीजों को पुनरावृत्ति के साथ व्यवस्थित करना होता है तो क्रमचय की संख्या $= n^r$। ऐसा इसलिए है क्योंकि प्रत्येक 'r' चीज को 'n' अलग-अलग तरीकों से व्यवस्थित किया जा सकता है, इस प्रकार $n \times n \times n \times .... \times n$ (r बार) $= n^r$ प्राप्त होता है।

Ex. उन 5 अंकीय संख्याओं की संख्या ज्ञात कीजिए जो 4 से विभाज्य हैं, जिनके अंक सेट {1, 2, 3, 4, 5} से लिए गए हों और अंक दोहराए जा सकते हों?

HINTS अंतिम 2 अंक = 12, 24, 32, 44, 52

हम अंतिम 2 अंक 5 अंकों में से किसी को चुन सकते हैं। बाकी के 3 अंक 5 तरीकों से चुने जा सकते हैं क्योंकि पुनरावृत्ति की अनुमति है।

5	5	5	5

आवश्यक संख्या $= 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$

@apna_channels
Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. जब शब्दों की पुनरावृत्ति की अनुमति हो तो 'SMOKE' शब्द के अक्षरों से अर्थ सहित या बिना अर्थ वाले कितने तीन अक्षर वाले शब्द बनाए जा सकते हैं?

HINTS तरीकों की संख्या = $n^r = 5^3 = 125$

Ex. शब्द 'GOVIND' के अक्षरों से अर्थ सहित या अर्थहीन कितने 3 अक्षर वाले शब्द बनाए जा सकते हैं, जब अक्षरों की पुनरावृत्ति की अनुमति हो?

HINTS तरीकों की संख्या = $n^r = 6^3 = 216$

Ex. शब्द 'RECTITUDE' के अक्षरों को कितने प्रकार से पुनर्व्यवस्थित किया जा सकता है ताकि सभी स्वर एक साथ आएं?

HINTS ऐसे प्रकार के प्रश्नों को हल करने के लिए निम्नलिखित परिणाम का उपयोग करें-

दिए गए शब्द के अक्षरों को इस प्रकार व्यवस्थित करने की संख्या कि स्वर एक साथ आएँ = (स्वरों की संख्या)! × (व्यंजन की संख्या +1)!

तरीकों की संख्या = $\left(\frac{4!\times 6!}{2!\times 2!}\right) = 4320$

> दिए गए शब्द के अक्षरों को इस प्रकार व्यवस्थित करने की संख्या कि व्यंजन एक साथ आ जाएँ =
> (व्यंजन की संख्या)! × (स्वरों की संख्या + 1)!

☞ यदि 'n' मैच खेले जाते हैं (जीत या हार की केवल 2 संभावनाएँ), तो परिणाम घोषित करने के तरीकों की संख्या = 2^n

Ex. एक टूर्नामेंट में पाँच मैच खेले जाने हैं, जिनमें जीत या हार की केवल दो संभावनाएँ हैं। परिणाम कितने तरीकों से तय किए जा सकते हैं?

HINTS तरीकों की संख्या = $2^5 = 32$

Ex. हैदराबाद और बैंगलोर के बीच 20 स्टेशन हैं। कितने द्वितीय श्रेणी के टिकट छापने पड़ते हैं, जिससे एक यात्री किसी भी स्टेशन से दूसरे स्टेशन तक यात्रा कर सके ?

HINTS कुल स्टेशन = 20

20 स्टेशनों में से किसी भी दो स्टेशनों का चयन करना है और यात्रा की दिशा भी महत्वपूर्ण है (जैसे, हैदराबाद से बैंगलोर अलग है बैंगलोर से हैदराबाद से)। इसे $^{20}P_2$ तरीकों से किया जा सकता है।

$^{20}P_2 = 20 \times 19 = 380$

Ex. एक रेलवे लाइन पर 5 स्टेशन पड़ते हैं। रेलवे अधिकारियों के लिए आवश्यक विभिन्न यात्रा टिकटों की संख्या कितनी होगी?

HINTS कुल स्टेशन = 5

5 स्टेशनों में से किसी भी दो स्टेशनों का चयन करना है और यात्रा की दिशा भी महत्वपूर्ण है (जैसे, A से B अलग है B से A) इसे $^5P_2$ तरीकों से किया जा सकता है।

$^5P_2 = 5 \times 4 = 20$

Ex. कितने तरीके से 4 लड़कों और 5 लड़कियों को एक पंक्ति में बैठाया जा सकता है ताकि वे एकान्तरिक हों?

HINTS G B G B G B G B G

चित्र में लड़कों और लड़कियों की बैठने की संभावित व्यवस्था दिखाई गई है।

अब, 4 लड़कों को 4 स्थानों पर $^4P_4 = 4!$ तरीकों से बैठाया जा सकता है और 5 लड़कियों को 5 स्थानों पर 5! तरीकों से।

∴ अतः आवश्यक कुल तरीकों की संख्या = 4! × 5! = 24 × 120 = 2880

Ex. अलमीरा पर 10 पुस्तकों को कितने तरीकों से व्यवस्थित किया जा सकता है कि पुस्तकों की एक विशेष जोड़ी हमेशा एक साथ होनी चाहिए?

HINTS हमारे पास कुल 10 किताबें हैं। यह दिया गया है कि एक विशेष जोड़ी की किताबें हमेशा साथ रहनी चाहिए।

अतः, इन दोनों किताबों को एक साथ बाँध दें और एक ही किताब के रूप में मान लें। इस प्रकार कुल किताबों की संख्या अब 9 मानी जाएगी।

इन 9 किताबों को $^9P_9 = 9!$ तरीकों से व्यवस्थित किया जा सकता है।

हमने दो किताबों को एक साथ बाँधा है।

ये दोनों किताबें आपस में $^2P_2 = 2!$ तरीकों से व्यवस्थित की जा सकती हैं।

अतः अभीष्ट कुल व्यवस्थाओं की संख्या = 9! × 2!

Ex. 4 लड़कों और 2 लड़कियों को एक पंक्ति में इस प्रकार बैठाया जाना है कि दोनों लड़कियाँ हमेशा एक साथ रहें। उन्हें कितने अलग-अलग तरीकों से बैठाया जा सकता है?

HINTS माना कि दी गई दो लड़कियाँ हमेशा एक साथ रहेंगी (अर्थात् उन्हें एक माना जाए)।

अब कुल 5 व्यक्ति हैं।

उन्हें बैठाने के संभावित तरीकों की संख्या = 5! = 120

अब वे दोनों लड़कियां आपस में 2! तरीकों से स्थान बदल सकती हैं।

अतः कुल तरीकों की संख्या = 120 × 2 = 240

वृतीय क्रमचय

यदि दक्षिणावर्त और वामावर्त क्रम अलग-अलग हैं

एक समय में ली गई n विभिन्न वस्तुओं के वृत्ताकार क्रमचय की संख्या $\frac{^nP_n}{n} = (n-1)!$

यदि दक्षिणावर्त और वामावर्त क्रम समान हैं

n भिन्न वस्तुओं के सभी वृत्तीय क्रमचयों की संख्या = $\frac{1}{2}(n-1)!$

Ex. एक माला बनाने के लिए 7 मोतियों को कितने तरीकों से व्यवस्थित किया जा सकता है?

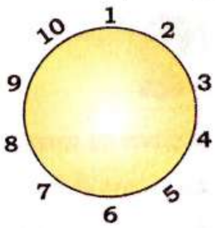
HINTS माला में दक्षिणावर्त और वामावर्त व्यवस्था में कोई अंतर नहीं है।

संभावित तरीकों की संख्या

$= \frac{1}{2}(7-1)! = \frac{1}{2} \times 6! = \frac{1}{2} \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 360$

Ex. एक कंपनी में 10 सॉफ्टवेयर इंजीनियर और 6 सिविल इंजीनियर हैं। उन्हें एक गोल मेज के चारों ओर कितने तरीकों से बैठाया जा सकता है ताकि कोई भी दो सिविल इंजीनियर एक साथ न बैठें?

HINTS 10 सॉफ्टवेयर इंजीनियरों को एक गोल मेज के चारों ओर (10 – 1)! = 9! तरीकों से बैठाया जा सकता है। ...(i)



अब हमें सिविल इंजीनियरों को इस प्रकार बैठाना है कि कोई भी दो सिविल इंजीनियर एक साथ न बैठें। अर्थात हम 6 सिविल इंजीनियरों को सॉफ्टवेयर इंजीनियरों के मध्य चिन्हित 10 स्थानों में से किसी भी स्थान पर व्यवस्थित कर सकते हैं। (यहाँ 1, 2, 3,.... 10 सॉफ्टवेयर इंजीनियरों का प्रतिनिधित्व करते हैं)

यह काम $^{10}P_6$ तरीकों से किया जा सकता है। ...(ii)

(i) और (ii) से,

अभीष्ट तरीकों की संख्या = $9! \times {^{10}P_6} = 9! \times \frac{10!}{4!}$

@apna_channels
Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

संचय

संचय किसी समूह में से वस्तुओं को चुनने का एक तरीका है, जहाँ क्रम का कोई महत्व नहीं होता।

यदि आप चयनित वस्तुओं का क्रम बदल भी दें, लेकिन वस्तुएँ वही रहें, तो वह संचय वही माना जाता है।

इसका उपयोग तब किया जाता है जब क्रम महत्वपूर्ण नहीं होता।

संचय (संयोजन) सूत्र

संयोजन कई वस्तुओं में से कुछ या सभी को चुनने के तरीको की संख्या है, चाहे उनका क्रम कुछ भी हो। 'n' विभिन्न वस्तुओं में से एक समय में 'r' वस्तुओं को लेकर बने संचय की संख्या जहाँ पुनरावृत्ति की अनुमति नहीं है, जिसे ^nC_r या C(n, r) द्वारा दर्शाया जाता है:

$$^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$ जहाँ, $0 \le r \le n$

☞ जब $^nC_x = {^nC_y}$, तब $x = y$ या $x + y = n$

☞ $^nC_r + {^nC_{r-1}} = {^{n+1}C_r}$

☞ $^nC_r = {^nC_{n-r}}$

क्रमचय और संचय में संबंध

$$^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} = \left(\frac{n!}{r!(n-r)!}\right) \times r!$$

$$^nP_r = {^nC_r} \times r!$$

Ex. 5 छात्रों में से आपको 3 छात्रों की एक समिति बनानी है।

HINTS माना छात्र = A, B, C, D, E.

संभावित संकलन (कुछ उदाहरण):

(A, B, C), (A, B, D), (A, B, E), (A, B, D) (... इसी तरह आगे भी)

n = 5 (कुल छात्र)

r = 3 (चयन किए जाने वाले छात्र)

$$^5C_3 = \frac{5!}{3! \times (5-3)!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2!} = 10$$

^nC_r सूत्र का मान लिखने के लिए अंश में n को r- बार घटते क्रम में गुणा करके लिखे तथा हर में r को 1 तक घटते क्रम में गुणा करके लिखे।

उदाहरण के लिए, $^5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$

$^6C_4 = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 15$

संयोजन पर आधारित कुछ महत्वपूर्ण परिणाम

☞ n वस्तुओं में से n वस्तुओं को चुनने के तरीकों की संख्या है:

$$^nC_n = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!0!} = 1$$

☞ n वस्तुओं में से 0 वस्तुओं को चुनने के तरीकों की संख्या है:

$$^nC_0 = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{0!n!} = 1$$

☞ n वस्तुओं में से 1 वस्तुओं को चुनने के तरीकों की संख्या है:

$$^nC_1 = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n \times (n-1)!}{(n-1)!} = n$$

☞ 'n' विभिन्न वस्तुओं में से कुछ या सभी को एक साथ लेने के संकलन की संख्या

(i) $^nC_0 + {^nC_1} + {^nC_2} + {^nC_3} + \ldots\ldots + {^nC_n} = 2^n$

(ii) $^nC_0 + {^nC_2} + {^nC_4} + \ldots\ldots = {^nC_1} + {^nC_3} + {^nC_5} + \ldots\ldots = 2^{n-1}$

(iii) $({^nC_0})^2 + ({^nC_1})^2 + ({^nC_2})^2 + \ldots\ldots + ({^nC_n})^2 = {^{2n}C_n}$

Ex. अमित की अलमारी में 5 नीले, 4 लाल और 3 हरे मोजे हैं। इसमें से उसे 4 मोजे चुनने हैं। वह कितने प्रकार से ऐसा कर सकता हैं?

HINTS तरीकों की संख्या = $^{12}C_4 = \frac{12!}{4!(12-4)!}$

$= \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 495$

Ex. एक स्कूल की टीम में आठ वॉलीबाल खिलाड़ी हैं। इन आठ खिलाड़ियों में से पांच सदस्यीय टीम चुनी जाएगी। कितने अलग-अलग चुनाव किए जा सकते हैं?

HINTS तरीकों की संख्या = $^8C_5 = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 3 \times 2 \times 1} = 56$

Ex. एक समूह में 3 लॉन टेनिस खिलाड़ी S, T और U हैं। 2 खिलाड़ियों की एक टीम बनाई जानी है। हम ऐसा कितने तरीकों से कर सकते हैं?

HINTS तरीकों की संख्या = $^3C_2 = \frac{3 \times 2!}{2! \times 1} = 3$

@apna_channels

Ex. कुल 7 पुरूषों और 3 महिलाओं में से कितनी तरह से 5 पुरूष और 2 महिलाओं का समूह बनाया जा सकता है?

HINTS तरीकों की संख्या = $^7C_5 \times {^3C_2} = 21 \times 3 = 63$

Ex. एक प्रश्न पत्र में दो भाग P और Q हैं, प्रत्येक में 10 प्रश्न हैं। यदि एक छात्र को भाग P से 8 और भाग Q से 4 चुनने की आवश्यकता है, तो वह कितने तरीकों से ऐसा कर सकता है?

HINTS भाग P से 8 प्रश्न चुनने के तरीके = $^{10}C_8$

भाग Q से 4 प्रश्न चुनने के तरीके = $^{10}C_4$

कुल तरीकों की संख्या = $^{10}C_8 \times {^{10}C_4} = 45 \times 210 = 9450$

Ex. एक परीक्षा में उत्तीर्ण होने के लिए प्रत्येक 6 विषयों में न्यूनतम अंक प्राप्त करने होते हैं। एक छात्र कितने तरीकों से असफल हो सकता है?

HINTS छात्र असफल होगा यदि वह 6 विभिन्न विषयों में से एक या अधिक विषयों में असफल होता है, अर्थात

$= {^6C_1} + {^6C_2} + {^6C_3} + {^6C_4} + {^6C_5} + {^6C_6}$

$= ({^6C_0} + {^6C_1} + \ldots.. {^6C_6}) - {^6C_0}$

$= 2^6 - 1 = 64 - 1 = 63$ तरीके

वैकल्पिक विधि

छात्र असफल होता है यदि वह 6 विषयों में से किसी भी एक विषय में असफल हो। हर विषय में दो संभावनाएं होती हैं: या तो सफल या असफल। इस प्रकार, 6 विषयों के लिए संभावनाएँ होंगी: 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 = 2^6 = 64 संभव केस। इनमें वह केस भी शामिल है जिसमें छात्र सभी 6 विषयों में पास हो। इसलिए, छात्र असफल हो सकता है 64 – 1 = 63 तरीकों से।

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. 5 पुरुषों और 2 महिलाओं में से 3 सदस्यों की एक टीम बनाने की जरूरत है। कम से कम 1 महिला को शामिल करते हुए कितने तरीकों से टीम बनाई जा सकती है?

HINTS 3 सदस्यों की टीम दो तरीकों से बनाई जा सकती है:

(a) 2 पुरुष और 1 महिला – ${}^5C_2 \times {}^2C_1$

(b) 1 पुरुष और 2 महिलाएं – ${}^5C_1 \times {}^2C_2$

इसलिए कुल तरीके होंगे:

$= ({}^5C_2 \times {}^2C_1) + ({}^5C_1 \times {}^2C_2) = 10 \times 2 + 5 \times 1 = 25$ तरीके।

Ex. चार जोड़े (पति-पत्नी) चार सदस्यों की एक समिति बनाने का निर्णय लेते हैं। ऐसी कितनी विभिन्न समितियाँ बनाई जा सकती हैं जिनमें किसी जोड़े को जगह नहीं मिले, ज्ञात कीजिए।

HINTS 4 सज्जनों की समितियों की संख्या $= {}^4C_4 = 1$

3 सज्जन और 1 पत्नी वाली समितियों की संख्या $= {}^4C_3 \times {}^1C_1$

(3 सज्जनों के चयन के बाद केवल 1 पत्नी बचती है जिसे शामिल किया जा सकता है)

2 सज्जन और 2 पत्नियों वाली समितियों की संख्या $= {}^4C_2 \times {}^2C_2$

1 सज्जन और 3 पत्नियों वाली समितियों की संख्या $= {}^4C_1 \times {}^3C_3$

4 पत्नियों वाली समितियों की संख्या = 1

अतः आवश्यक समितियों की संख्या = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16

Ex. एक कलश में 5 लाल कंचे, 4 काले कंचे और 3 सफेद कंचे हैं। तो उन तरीकों की संख्या जिनसे 4 कंचे निकाले जा सकते हैं ताकि उनमें से अधिक से अधिक तीन लाल हों,______है।

HINTS 0 लाल, 1 लाल, 2 लाल, 3 लाल

तरीकों की संख्या $= {}^7C_4 + {}^5C_1 \cdot {}^7C_3 + {}^5C_2 \cdot {}^7C_2 + {}^5C_3 \cdot {}^7C_1$

$= 35 + 175 + 210 + 70 = 490$

संचय के कुछ महत्वपूर्ण सूत्र

☞ 'm + n' चीजों को क्रमशः 'm' और 'n' चीजों वाले दो समूहों में विभाजित करने के तरीकों की संख्या

$$= {}^{m+n}C_m \times {}^nC_n = \frac{(m+n)!}{m!n!}$$

☞ 'm + n + p' चीजों को क्रमशः 'm', 'n' और 'p' चीजों वाले तीन समूहों में विभाजित करने के तरीकों की संख्या

$$= {}^{m+n+p}C_m \times {}^{n+p}C_p = \frac{(m+n+p)!}{m!n!p!}$$

☞ यदि किसी समतल में n असंरेख बिंदु हैं, तो

(i) बनी सीधी रेखाओं की संख्या $= {}^nC_2$

(ii) बनने वाले त्रिभुजों की संख्या $= {}^nC_3$

(iii) बने चतुर्भुजों की संख्या $= {}^nC_4$

☞ यदि किसी तल में n बिंदु हैं जिनमें से m संरेख हैं, तो

(i) बनी सीधी रेखाओं की संख्या $= {}^nC_2 - {}^mC_2 + 1$

(ii) बनने वाले त्रिभुजों की संख्या $= {}^nC_3 - {}^mC_3$

☞ n भुजाओं वाले बहुभुज में विकर्णों की संख्या $= {}^nC_2 - n$

Ex. एक अष्टभुज के शीर्षों को मिलाकर कितने त्रिभुज बनाए जा सकते हैं?

HINTS n भुजाओं वाले बहुभुज के शीर्षों को जोड़कर बनने वाले त्रिभुजों की संख्या $= {}^nC_3$

यहाँ n = 8 है।

अतः, अष्टभुज के शीर्षों को जोड़कर बनने वाले त्रिभुजों की संख्या $= {}^8C_3 = 56$

Ex. एक समतल में 14 बिंदुओं का उपयोग करके बनाए जा सकने वाले त्रिभुजों की संख्या ज्ञात कीजिए कि 4 बिंदु संरेख हैं?

HINTS मान लीजिए कि समतल में कुल n बिंदु हैं, जिनमें से m बिंदु समरेखीय हैं।

n बिंदुओं को शीर्ष मानकर बनने वाले त्रिभुजों की संख्या $= {}^nC_3 - {}^mC_3$

यहाँ n = 14, m = 4 है।

अतः त्रिभुजों की संख्या $= {}^nC_3 - {}^mC_3 = {}^{14}C_3 - {}^4C_3 = 360$

Ex. एक तल में 8 बिंदु हैं जिनमें से 3 संरेख हैं। उन्हें मिलाने से कितनी सीधी रेखाएँ बन सकती हैं?

HINTS मान लीजिए समतल में कुल n बिंदु हैं, जिनमें से m बिंदु समरेखीय हैं। इन n बिंदुओं को जोड़कर बनने वाली रेखाओं की संख्या

$= {}^nC_2 - {}^mC_2 + 1$

यहाँ n = 8, m = 3

आवश्यक सीधी रेखाओं की संख्या

$= {}^nC_2 - {}^mC_2 + 1$

$= {}^8C_2 - {}^3C_2 + 1 = 28 - 3 + 1 = 26$

Ex. एक बहुभुज की 11 भुजाएं है। बहुभुज के शीर्ष-मात्र के उपयोग से कितने त्रिभुज बनाए जा सकते हैं?

HINTS बहुभुज के भुजाओं की संख्या = 11

बहुभुज के शीर्षों की संख्या = 11

अतः त्रिभुजों की संख्या $= {}^{11}C_3$

$$= \frac{11!}{3!(11-3)!} = \frac{11!}{3!8!} = \frac{11\times10\times9\times8!}{3\times2\times1\times8!}$$

$= 11 \times 5 \times 3 = 165$

☞ माना कि एक हॉल में 'n' व्यक्ति हैं। यदि प्रत्येक व्यक्ति एक दूसरे व्यक्ति से केवल एक बार हाथ मिलाये तो हाथ मिलाने की कुल संख्या है-

$${}^nC_2 = \frac{n(n-1)}{2}$$

☞ यदि हाथ मिलाने के स्थान पर प्रत्येक व्यक्ति दूसरे व्यक्ति को उपहार देता है, तो सूत्र बदल जाता है ${}^nP_2 = n(n-1)$

Ex. पार्टी में हर व्यक्ति एक-दूसरे से हाथ मिलाता है। यदि पार्टी में कुल 210 हाथ मिले तो पार्टी में जो लोग मौजूद थे उनकी संख्या ज्ञात कीजिए।

HINTS प्रत्येक दो व्यक्तियों के चयन पर एक हस्तमिलाप (हैंडशेक) होगा।

इसलिए, पार्टी में कुल हस्तमिलाप की संख्या $= {}^nC_2$,

जहाँ n = व्यक्तियों की संख्या।

अब, ${}^nC_2 = 210$ (दिया गया)

$$\frac{n(n-1)}{2} = 210$$

$n \times (n-1) = 2 \times (2 \times 3 \times 5 \times 7) = 21 \times 20$

$\therefore n = 21$

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

अध्याय 31

प्रायिकता

"प्रायिकता का सिद्धांत बस तर्क का विज्ञान है जिसे मात्रात्मक रूप से समझा जाता है"- **सी.एस. पियर्स**

प्रायिकता

प्रायिकता किसी विशेष घटना के घटित होने की संभावना या संभावना का माप है। यह किसी घटना को 0 और 1 के बीच मान देकर अनिश्चितता को मापता है और इसे इस प्रकार परिभाषित किया जाता है

किसी घटना E की प्रायिकता,

$$P(E) = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{संभावित परिणामों की कुल संख्या}}$$

जहाँ:

- P(E) = 0 का अर्थ है घटना असंभव है (घटित नहीं हो सकती),
- P(E) = 1 का अर्थ है घटना निश्चित है (निश्चित रूप से घटित होगी),
- 0 और 1 के बीच का मान संभावना की विभिन्न स्तरों को दर्शाते हैं

इसलिए, यदि किसी प्रयोग में 'n' घटनाएं हैं जिनमें से 'm' घटनाएं किसी विशेष घटना E के अनुकूल हैं, तो घटना E की संभावना, जिसे P(E) द्वारा दर्शाया जाता है; को इस प्रकार परिभाषित किया जाता है।

$$P(E) = \frac{m}{n}$$

साथ ही, घटना E के घटित न होने को $\bar{E}$ द्वारा दर्शाया जाता है, जो इस मामले में (n-m) है तो, (n-m) परिणाम घटना E के अनुकूल नहीं हैं, और घटना $\bar{E}$ के अनुकूल हैं।

$$P(\bar{E}) = \frac{n-m}{n}$$

हम देख सकते हैं कि, $\mathbf{P(E) + P(\bar{E}) = 1}$

संबंद्धित पारिभाषिक शब्द

प्रायिकता से संबंधित शब्दों की सूची इस प्रकार है।

प्रयोग: प्रयोग, जिसे यादृच्छिक प्रयोग के रूप में भी जाना जाता है, प्रायिकता सिद्धांत में की जाने वाली मौलिक प्रक्रिया या गतिविधि है, जिसके सटीक परिणाम की पहले से निश्चितता के साथ भविष्यवाणी नहीं की जा सकती है, जबकि सभी संभावित परिणामों का सेट ज्ञात होता है।

यह वह आधार बनाता है जिस पर सभी प्रायिकता की गणनाएँ की जाती हैं।

परीक्षण: परीक्षण एक यादृच्छिक प्रयोग का निष्पादन है।

- प्रत्येक परीक्षण से केवल एक परिणाम प्राप्त होता है।

घटना: घटना एक सुपरिभाषित प्रयोग से प्राप्त विशिष्ट परिणाम या परिणामों का समूह है।

- एक घटना को प्रयोग द्वारा परिभाषित किया जाता है।

☞ आइये एक सिक्के के माध्यम से प्रयोग, परीक्षण और घटना को एक साथ समझें।

प्रयोग: सिक्का उछालना

परीक्षण: सिक्के को एक या दो बार उछालना आदि।

घटना: "चित" प्राप्त करना

घटना: "पट" प्राप्त करना

☞ आइये एक पासे के माध्यम से प्रयोग, परीक्षण और घटना को एक साथ समझें।

प्रयोग: मानक छह-पक्षीय पासा फेंकना

परीक्षण: पासा को दो बार फेंकना।

घटना: "4" प्राप्त करना

घटना: "सम संख्या" प्राप्त करना

घटना: 5 से बड़ी संख्या प्राप्त होना।

परिणाम: यह एक परीक्षण का फल है। जब कोई खिलाड़ी गेंद को गोल पोस्ट की ओर मारता है, तो उसके दो स्पष्ट परिणाम होते हैं, या तो वह गोल कर सकता है या गोल नहीं कर सकता है।

समान रूप से संभावित परिणाम: एक प्रयोग जिसमें प्रत्येक परिणाम की समान संभावना होती है, ऐसे परिणामों को समान रूप से संभावित परिणाम कहा जाता है। छह-पक्षीय पासा फेंकने की प्रक्रिया में, किसी भी विशेष संख्या के आने की प्रायिकता समान होती है।

$$P(\text{किसी भी विशेष संख्या के आने की प्रायिकता}) = \frac{1}{6}$$

प्रतिदर्श समष्टि: यह एक प्रयोग में सभी परीक्षणों के परिणामों का समूह है। एक पासे को फेंकने पर, संभावित परिणाम 1, 2, 3, 4, 5 और 6 हैं। ये परिणाम प्रतिदर्श समष्टि बनाते हैं।

S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

संभावित घटना: जिस घटना की भविष्यवाणी की जा सकती है उसे संभावित घटना कहा जाता है। हम ऐसी घटनाओं की प्रायिकता की गणना कर सकते हैं। किसी विशेष बच्चे के अगली कक्षा में पदोन्नत होने की संभावना की गणना की जा सकती है, इसलिए, हम इसे एक संभावित घटना के रूप में संदर्भित कर सकते हैं।

असंभव घटना: एक घटना जो प्रयोग का हिस्सा नहीं है, या जो प्रयोग के परिणामों के प्रतिदर्श समष्टि से संबंधित नहीं है, उसे असंभव घटना कहा जा सकता है। समशीतोष्ण जलवायु वाले क्षेत्र में बर्फबारी नहीं होती है। यहां बर्फबारी को एक असंभव घटना कहा जा सकता है क्योंकि ऐसी घटना के घटित होने की संभावना शून्य है।

पूरक घटनाएँ: पूरक घटनाएँ तब होती हैं जब केवल दो घटनाएँ होती हैं, और एक घटना दूसरी घटना के ठीक विपरीत होती है। किसी घटना की प्रायिकता P(A) होने पर, उसका पूरक $P(\bar{A})$ या P(A') होता है।

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

किसी परीक्षा में सफलता की घटना और असफलता की घटना पूरक घटनाएँ हैं।

P(सफलता) + P(असफलता) = 1

Ex. यदि किसी खेल में जीतने की प्रायिकता 0.3 है, तो उसके हारने की प्रायिकता क्या है?

HINTS $P(W) + P(\bar{W}) = 1$

$0.3 + P(\bar{W}) = 1$

$P(\bar{W}) = 0.7$

@apna_channels
Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

कम से कम

गणितीय रूप से, यदि 'n' घटनाओं की कुल संख्या है, और 'x' निर्दिष्ट संख्या है, तो "कम से कम x" में शामिल हैं:

$x, x+1, x+2,$ .... n तक।

इसलिए, "कम से कम x" की प्रायिकता की गणना इस प्रकार की जा सकती है:

P(कम से कम x) = 1 − P(x से कम)

∴ P(कम से कम एक) = 1 − P(कोई नहीं)

एक प्रयोग पर विचार करें जहां एक निष्पक्ष सिक्के को 4 बार उछाला जाता है और 'कम से कम 3 चित' प्राप्त होने का मतलब है कि हम ठीक 3 चित या ठीक 4 चित प्राप्त करने में रुचि रखते हैं।

Ex. 17 आवेदकों में से 8 लड़के और 9 लड़कियाँ हैं। नौकरी के लिए दो व्यक्तियों का चयन किया जाना है। संभावना ज्ञात कीजिए कि चयनित व्यक्तियों में से कम से कम एक लड़की होगी।

HINTS P(कम से कम एक लड़की) = 1 - P (कोई लड़की नहीं)

$$= 1 - \frac{^8C_2}{^{17}C_2} = 1 - \frac{8\times7}{17\times16} = \frac{27}{34}$$

ज्यादा से ज्यादा

गणितीय रूप से, यदि 'x' निर्दिष्ट संख्या है, तो "ज्यादा से ज्यादा "x" में शामिल हैं:

0, 1, ... $x-3, x-2, x-1, x.$

इसलिए, "अधिकतम x" की प्रायिकता की गणना इस प्रकार की जा सकती है:

P(ज्यादा से ज्यादा x) = 1 − P(x से अधिक)

एक प्रयोग पर विचार करें जहां एक निष्पक्ष सिक्के को 4 बार उछाला जाता है और 'अधिकतम 3 चित' आने का अर्थ है कि हम ठीक 1 चित या 2 चित या 3 चित या शून्य चित (सभी पट) प्राप्त करने में रुचि रखते हैं।

Ex. एक कक्षा में 8 लड़के और 6 लड़कियाँ हैं। 3 विद्यार्थियों को एक समूह बनाया जाना है। इस समूह में अधिकतम 2 लड़के होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

HINTS P(ज्यादा से ज्यादा 2 लडकें) = 1 − P(3 लडकें)

$$= 1 - \frac{^8C_3}{^{14}C_3} = 1 - \frac{8\times7\times6}{14\times13\times12} = \frac{11}{13}$$

सिक्कों पर आधारित

☞ जब n सिक्के उछाले जाते हैं या एक सिक्के को n बार उछाला जाता है: संभावित परिणाम = 2^n

☞ जब किसी एक सिक्के को एक बार उछाला जाता है तो:
कुल संभावित परिणाम $2^n = 2^1 = 2$
प्रतिदर्श समष्टि → {H, T}

☞ जब दो सिक्के को एक साथ उछाला जाता है तो:
कुल संभावित परिणाम = $2^2 = 4$
प्रतिदर्श समष्टि → {(H,H) (H,T) (T,H) (T,T)}

☞ जब तीन सिक्के को एक साथ उछाला जाता है तो:
कुल संभावित परिणाम = $2^3 = 8$
प्रतिदर्श समष्टि → {(HHH) (HHT) (HTH) (THH) (HTT) (THT) (TTH) (TTT)}

Ex. दो निष्पक्ष सिक्कों को एक साथ उछाला जाता है। निम्न परिणाम प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

(i) दो पट (ii) एक चित
(iii) कम से कम एक पट (iv) अधिक से अधिक एक पट
(v) कोई पट नहीं

HINTS प्रतिदर्श समष्टि = {(H,H) (H,T) (TH) (TT)}

(i) P(दो पट) $\frac{1}{4}$

(ii) P(एक चित) = $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

(iii) P(कम से कम एक पट) = $\frac{3}{4}$

(iv) P(ज्यादा से ज्यादा एक पट) = $\frac{3}{4}$

(v) P(कोई पट नहीं) $\frac{1}{4}$

Ex. यदि दो सिक्कों को एक साथ उछाला जाता है, तो इसकी क्या प्रायिकता है कि एक सिक्के पर चित आएगा और दूसरे सिक्के पर पट आएगा?

HINTS प्रतिदर्श समष्टि = (HT, TH, TT, HH)

प्रायिकता = $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

वैकल्पिक विधि

प्रायिकता = $^2C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Ex. तीन निष्पक्ष सिक्कों को एक साथ उछाला जाता है। निम्न परिणाम प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

(i) सभी चित
(ii) कम से कम एक पट
(iii) ठीक दो चित

HINTS प्रतिदर्श समष्टि = {HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT}

(i) P(सभी चित) = $\frac{1}{8}$

(ii) P(कम से कम एक पट) = $\frac{7}{8}$

(iii) P(ठीक 2 चित) = $\frac{3}{8}$

Ex. तीन सिक्के उछाले जाते है, तो इस बात की प्रायिकता कितनी है कि न तो 3 चित और न ही 3 पट प्राप्त हों?

HINTS प्रतिदर्श समष्टि

= {**HHH**, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, **TTT**}

प्रायिकता = $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

वैकल्पिक विधि

$$P(3 \text{ चित}) = {}^3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{8}$$

$$P(3 \text{ पट}) = {}^3C_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$P(\text{न तो 3 चित ना ही 3 पट}) = 1-\frac{1}{8}-\frac{1}{8} = \frac{3}{4}$$

Ex. चार सिक्कों को एक साथ उछाला जाता है कि इसकी क्या प्रायिकता है कि कम से कम तीन सिक्कों पर चित या पट आए?

HINTS प्रतिदर्श समष्टि = {HHHH, HHHT, HHTH, **HHTT**, HTHH, **HTHT**, **HTTH**, HTTT, THHH, **THHT**, **THTH**, THTT, **TTHH**, TTHT, TTTH, TTTT}

$$\text{प्रायिकता} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$$

वैकल्पिक विधि

कुल परिणाम $= 2^4 = 16$

$$\text{प्रतिकूल परिणाम की संख्या} = {}^4C_2 = \frac{4!}{2!\times 2!} = \frac{4\times3\times2!}{2!\times2!} = 6$$

अनुकूल परिणाम $= 16 - 6 = 10$

$$\therefore \text{ अभीष्ट प्रायिकता} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$$

Ex. एक सिक्के को 5 बार उछाला जाता है, ठीक 2 चित आने की प्रायिकता क्या है?

HINTS कुल परिणाम $= 2^5 = 32$

$$\text{अनुकूल परिणामों की संख्या} = {}^5C_2 = \frac{5!}{2!\times3!} = \frac{5\times4\times3!}{2!\times3!} = 10$$

$$\text{प्रायिकता} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$$

वैकल्पिक विधि

$$\text{प्रायिकता} = {}^5C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{10}{2^5} = \frac{5}{16}$$

Ex. एक सिक्के को 8 बार उछाला जाता है, ठीक 6 पट आने की प्रायिकता क्या है?

HINTS कुल परिणाम $= 2^8 = 256$

$$\text{अनुकूल परिणामों की संख्या} = {}^8C_6 = \frac{8!}{2!\times6!} = \frac{8\times7\times6!}{2!\times6!} = 28$$

$$\text{प्रायिकता} = \frac{28}{256} = \frac{7}{64}$$

वैकल्पिक विधि

$$P(\text{ठीक 6 पट}) = {}^8C_6\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{28}{2^8} = \frac{28}{256} = \frac{7}{64}$$

Ex. एक सिक्का 9 बार उछाला जाता है, अधिकतम 2 पट आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

HINTS कुल परिणाम $= 2^9 = 512$

$$0 \text{ पट} \rightarrow {}^9C_0 = \frac{9!}{9!\times0!} = 1$$

$$1 \text{ पट} \rightarrow {}^9C_1 = \frac{9!}{8!\times1!} = 9$$

$$2 \text{ पट} \rightarrow {}^9C_2 = \frac{9!}{7!\times2!} = 36$$

$\therefore$ अनुकूल परिणामों की संख्या $= 1 + 9 + 36 = 46$

$$\text{प्रायिकता} = \frac{46}{512} = \frac{23}{256}$$

वैकल्पिक विधि

$$P(1 \text{ पट}) = {}^9C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{9}{2^9}$$

$$P(2 \text{ पट}) = {}^9C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{36}{2^9}$$

$$P(0 \text{ पट}) = {}^9C_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{1}{2^9}$$

$$\therefore P(\text{ज्यादा से ज्यादा 2 पट}) = \frac{9}{2^9} + \frac{36}{2^9} + \frac{1}{2^9} = \frac{46}{2^9} = \frac{23}{256}$$

Ex. एक सिक्का 7 बार उछाला जाता है। कम से कम 2 पट आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

HINTS कुल परिणाम $= 2^7 = 128$

$0T \rightarrow {}^7C_0 = 1,\ 1T \rightarrow {}^7C_1 = 7$

2T, 3T, 4T, 5T, 6T, 7T ✓

अनुकूल परिणामों की संख्या $= 128 - (1 + 7) = 120$

$$\text{प्रायिकता} = \frac{120}{128} = \frac{15}{16}$$

वैकल्पिक विधि

$$P(1 \text{ पट}) = {}^7C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{7}{2^7}$$

$$P(0 \text{ पट}) = {}^7C_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1}{2^7}$$

$P(\text{कम से कम 2 पट}) = 1 - P(1 \text{ पट}) - P(0 \text{ पट})$

$$= 1 - \frac{7}{2^7} - \frac{1}{2^7} = 1 - \frac{8}{128} = \frac{120}{128} = \frac{15}{16}$$

Ex. एक पक्षपाती सिक्के में एक चित आने की प्रायिकता 0.4 है, यदि हम एक सिक्के को 10 बार उछालें, तो ठीक तीन चित आने की प्रायिकता क्या है?

HINTS प्रायिकता $= {}^nC_r\,(P)^r\,(1 - P)^{n-r}$

$$P(\text{चित}) = \frac{2}{5} \quad P(\text{चित नहीं}) = \frac{3}{5}$$

$$\text{प्रायिकता} = {}^{10}C_3\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{3}{5}\right)^7 = \frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}\times\frac{2^3\times3^7}{5^{10}} = \frac{2^6\times3^8}{5^9}$$

पासे पर आधारित

जब किसी पासे को एक बार फेंका जाता है

प्रतिदर्श समष्टि = {1, 2, 3, 4, 5, 6} = 6

Ex. एक पासे को फेंका जाता है, निम्न परिणाम प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए:

(i) एक अभाज्य संख्या

(ii) 2 या 3 का गुणज

(iii) 4 से बड़ी संख्या

HINTS प्रतिदर्श समष्टि = {1, 2, 3, 4, 5, 6} = 6

(i) अभाज्य संख्या = 2, 3, 5 ⇒ प्रायिकता $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

(ii) 2 या 3 के गुणज = 2, 3, 4, 6 ⇒ प्रायिकता $= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

(iii) 4 से बड़ी संख्या = 5, 6 ⇒ प्रायिकता $= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Selected हैं Selection दिलाएंगे

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. एक पासे को फेंका जाता है, निम्न परिणाम प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए:

(i) सम संख्या (ii) विषम संख्या

(iii) 7 से छोटी प्राकृतिक संख्या (iv) 6 से बड़ी प्राकृतिक संख्या

HINTS प्रतिदर्श समष्टि = {1, 2, 3, 4, 5, 6} = 6

(i) अनुकूल परिणामों की संख्या = 3 (2, 4, 6)

$\therefore$ $P(E_1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

(ii) $P(E_2) = P(\bar{E}_1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ या फिर, हम कह सकते हैं

$P(E_2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

(iii) यहाँ, अनुकूल परिणामों की संख्या = 6

$\therefore$ P(E) = 1 → इसे एक निश्चित घटना कहा जाता है क्योंकि इसमें असफलता की कोई संभावना नहीं होती।

(iv) यहाँ, अनुकूल परिणामों की संख्या = 0

$\therefore$ P(E) = 0 → इसे असंभव घटना कहा जाता है, अर्थात इसमें सफलता की कोई संभावना नहीं होती।

जब दो पासे एक साथ फेंके जाते हैं

संभावित परिणामों की कुल संख्या = $6^2 = 36$

प्रतिदर्श समष्टि

(→ दूसरा फेंक; ↓ पहला फेंक)

पहला फेंक \ दूसरा फेंक	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

यदि, 2 ≤ योग ≥ 6, परिणामों की संख्या = योग – 1

7 ≤ योग ≤ 12, परिणामों की संख्या = 13 – योग

योग	अनुकूल परिणाम	परिणामों की सं.	प्रायिकता
2	(1,1)	1	$\frac{1}{36}$
3	(1,2), (2,1)	2	$\frac{2}{36}$
4	(1,3), (2,2), (3,1)	3	$\frac{3}{36}$
5	(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)	4	$\frac{4}{36}$
6	(1,5) (2,4), (3,3),(4,2),(5,1)	5	$\frac{5}{36}$
7	(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2),(6,1)	6	$\frac{6}{36}$
8	(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)	5	$\frac{5}{36}$
9	(3,6), (4,5), (5,4), (6,3)	4	$\frac{4}{36}$
10	(4,6), (5,5), (6,4)	3	$\frac{3}{36}$
11	(5,6), (6,5)	2	$\frac{2}{36}$
12	(6,6)	1	$\frac{1}{36}$
	कुल	36	

Ex. एक पासा दो बार फेंका जाता है, दो बार फेंक जाने से 7 का योग आने की संभावना कितनी है?

HINTS योग = 7

प्रायिकता = $\frac{(13-7)}{36} = \frac{1}{6}$

Ex. दो पासे एक साथ फेंके जाते हैं। प्रायिकता ज्ञात कीजिए-

(i) योग 8 हो

(ii) प्राप्त योगफल कम से कम 9 हो

(iii) दोनों पासों पर एक ही नंबर हो

(iv) एक पासे पर 2 का गुणज और दूसरे पासे पर 3 गुणज हो

HINTS संभावित परिणामों की कुल संख्या = $6^2 = 36$

(i) योग = 8

प्रायिकता = $\frac{(13-8)}{36} = \frac{5}{36}$

(ii) कम से कम योग 9 का मतलब है कि योग 9, 10, 11 या 12 हो सकता है।

योग 9 के लिए अनुकूल परिणाम = 13 – 9 = 4

योग 10 के लिए अनुकूल परिणाम = 13 – 10 = 3

योग 11 के लिए अनुकूल परिणाम = 13 – 11 = 2

योग 12 के लिए अनुकूल परिणाम = 13 – 12 = 1

प्रायिकता = $\frac{(4+3+2+1)}{36} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

(iii) अनुकूल परिणाम = (1,1) (2,2) (3,3) (4,4) (5,5) (6,6) = 6

प्रायिकता = $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

(iv) अनुकूल परिणाम = (2, 3) (2, 6) (4, 3) (4, 6) (6, 3) (6, 6) (3, 2) (3, 4) (3, 6) (6, 2) (6, 4) = 11

प्रायिकता = $\frac{11}{36}$

Ex. दो पासे एक साथ फेंके जाते हैं। पहले पासे पर संख्या दूसरे पासे पर संख्या से अधिक होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

HINTS अनुकूल परिणामों की संख्या

(2, 1)

(3, 1) (3, 2)

(4, 1) (4, 2) (4, 3)

(5, 1) (5, 2) (5, 3) (5, 4)

(6, 1) (6, 2) (6, 3) (6, 4) (6, 5) = 15

प्रायिकता = $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$

कुल परिणाम = 36

6 ऐसे परिणाम होगें जिसमें दोनों पासे पर समान संख्या (Doublet) प्राप्त होगी। शेष 30 परिणाम में से 15 ऐसे परिणाम होगें जिनमें पहली संख्या बड़ी होगी तथा 15 परिणाम ऐसे होगें जिसमें दूसरी संख्या बड़ी होगी। इस प्रकार बिना सारे परिणाम लिखे हुए ही अनुकूल परिणामों की संख्या प्राप्त कर सकते है।

@apna_channels
Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. दो निष्पक्ष पासे फेंके जाते हैं। वे संख्याएँ जिनका योग 2 या 4 से विभाज्य हो, के आने की प्रायिकता ज्ञात करें।

HINTS योग 2 या 4 से विभाज्य है अर्थात योग 2, 4, 6, 8, 10, 12 हो सकता है।

अनुकूल परिणाम = (1 + 1, 1 + 3, 3 + 1, 2 + 2, 1+ 5, 5 + 1, 2 + 4, 4 + 2, 3 + 3, 2 + 6, 6 + 2, 3 + 5, 5 + 3, 4 + 4, 5 + 5, 6 + 4, 4 + 6, 6 + 6) = 18 परिणाम

प्रायिकता = $\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

Ex. दो निष्पक्ष पासे फेंके जाते हैं। वे संख्याएँ जिनका योग 2 और 4 से विभाज्य हो, के आने की प्रायिकता ज्ञात करें।

HINTS योग 2 और 4 से विभाज्य है, अर्थात योग 4, 8, 12 हो सकता है।

अनुकूल परिणाम = (1 + 3, 3 + 1, 2 + 2, 2 + 6, 6 + 2, 3 + 5, 5 + 3, 4 + 4, 6 + 6) = 9 परिणाम

प्रायिकता = $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

ताश के पत्तों पर आधारित

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. 52 पत्तों की एक गड्डी में से एक पत्ता निकाला जाता हैं। कार्ड पर निम्न परिणाम प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है?

(i) एक इक्का (ii) लाल रंग का "10"

(iii) एक फेस कार्ड (iv) या तो लाल या तो राजा

(v) काला और एक रानी

HINTS संभावित परिणामों की संख्या = 52

(i) प्रायिकता $= \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

(ii) प्रायिकता $= \frac{2}{52} = \frac{1}{26}$

(iii) प्रायिकता $= \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$

(iv) प्रायिकता $= \frac{(26+4-2)}{52} = \frac{28}{52} = \frac{7}{13}$

(v) प्रायिकता $= \frac{2}{52} = \frac{1}{26}$

Ex. 52 पत्तों की एक गड्डी में से एक पत्ता निकाला जाता है। कार्ड पर निम्न परिणाम प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है?

(i) एक गुलाम या रानी या राजा

(ii) ना तो पान है ना ही राजा

(iii) इक्का के अलावा

(iv) लाल बादशाह

HINTS कुल परिणामों की संख्या = 52

(i) प्रायिकता $= \frac{(4+4+4)}{52} = \frac{3}{13}$

(ii) पान = 13 & राजा = 4

पान या राजा = 13 + 4 − 1 = 16

प्रायिकता $= \frac{(52-16)}{52} = \frac{9}{13}$

(iii) प्रायिकता $= \frac{48}{52} = \frac{12}{13}$

(iv) प्रायिकता $= \frac{2}{52} = \frac{1}{26}$

Ex. लाल रंग के गुलाम, बेगम, बादशाह और इक्का हटा दिए जाते हैं। शेष पत्तों में से एक पत्ता यादृच्छिक रूप से निकाला गया तो काली बेगम आने की प्रायिकता क्या है?

HINTS पत्तों की कुल संख्या = 52

हटाये गए पत्तों की संख्या = 4 × 2 = 8

∴ शेष पत्ते = 52 − 8 = 44

प्रायिकता $= \frac{2}{44} = \frac{1}{22}$

Ex. 52 पत्तों की एक गड्डी में से यादृच्छिक रूप से एक पत्ता निकाला जाता है तो इस बात की प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि यह पत्ता एक राजा या रानी है।

HINTS प्रायिकता $= \frac{^4C_1 + {^4C_1}}{^{52}C_1} = \frac{4+4}{52} = \frac{2}{13}$

Ex. 52 पत्तों में से तीन पत्ते यादृच्छिक आधार पर खींचे जाते हैं। इन पत्तों के एक राजा, एक रानी और एक गुलाम होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

HINTS $P = \frac{^4C_1 \times {^4C_1} \times {^4C_1}}{^{52}C_3} = \frac{\frac{4\times4\times4}{1\times1\times1}}{\frac{52\times51\times50}{3\times2\times1}}$

$= \frac{64}{22100} = \frac{16}{5525}$

Ex. जब एक अच्छी तरह से फेटी गई ताश की गड्डी से 3 पत्तों को निकाला जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि:

(i) सभी फेस कार्ड हैं (ii) कम से कम एक राजा है

HINTS

(i) प्रायिकता $= \frac{^{12}C_3}{^{52}C_3} = \frac{\frac{12\times11\times10}{3\times2\times1}}{\frac{52\times51\times50}{3\times2\times1}} = \frac{11}{1105}$

(ii) P(कम से कम एक राजा) = 1 − P(कोई राजा नहीं)

$= 1 - \frac{^{48}C_3}{^{52}C_3} = 1 - \frac{48\times47\times46}{52\times51\times50} = 1 - \frac{4324}{5525} = \frac{1201}{5525}$

Ex. एक व्यक्ति 52 पत्तों की एक गड्डी में से 3 पत्ते निकालता है। ठीक दो लाल पत्ते आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए?

HINTS प्रायिकता $= \frac{^{26}C_2 \times {^{26}C_1}}{^{52}C_3} = \frac{\frac{26\times25}{2\times1}\times26}{\frac{52\times51\times50}{3\times2\times1}} = \frac{13}{34}$

Ex. एक व्यक्ति 52 पत्तों की एक ताश की गड्डी से 3 कार्ड प्रतिस्थापन के साथ खींचता है। निम्न परिणाम प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

(i) तीनों लाल पत्तें हैं

(ii) कोई भी पत्ता इक्का नहीं है

(iii) पहला पत्ता गुलाम, दूसरा काला पत्ता और तीसरा सम संख्या का पत्ता है

HINTS (i) प्रायिकता $= \frac{26}{52} \times \frac{26}{52} \times \frac{26}{52} = \frac{1}{8}$

(ii) प्रायिकता $= \frac{48}{52} \times \frac{48}{52} \times \frac{48}{52} = \frac{1728}{2197}$

(iii) अभीष्ट प्रायिकता $= \frac{4}{52} \times \frac{26}{52} \times \frac{20}{52} = \frac{5}{338}$

गेंद/कंचे पर आधारित

- हमने जार या थैले में सभी कंचे या गेंदें इकट्ठी कर ली हैं।
- सबसे पहले हमें जार या थैले में रंगीन कंचों या गेंदों की कुल संख्या पता करनी है। हम अपनी सभी प्रायिकता गणनाओं में इस संख्या का उपयोग करेंगे।

Ex. एक कलश में 3 सफेद और 4 काली गेंदें हैं। एक गेंद यादृच्छिक रूप से चुनी जाती है। सफेद होने की संभावना क्या है?

HINTS कुल गेंदों की संख्या = 3 + 4 = 7

सफेद गेंदों की संख्या = 3

प्रायिकता $= \frac{3}{7}$

Ex. एक कांच के पात्र में 6 सफेद, 8 काले, 4 लाल और 3 नीले कंचे हैं। यदि पात्र में से एक कंचा यादृच्छिक रूप से चुना जाता है, तो इसके काले या नीले होने की क्या प्रायिकता है?

HINTS प्रायिकता $= \frac{3+8}{21} = \frac{11}{21}$

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. एक जार में 54 कंचे हैं, जिनमें से प्रत्येक या तो नीला या हरा या सफेद है। जार से याद्दच्छिक रूप से एक नीला कंचा चुनने की संभावना $\frac{1}{3}$ है, और याद्दच्छिक रूप से एक हरा कंचा चुनने की संभावना $\frac{4}{9}$ है। जार में कितने सफेद कंचे हैं?

HINTS माना, B = जार में नीले कंचों की संख्या,

G = जार में हरे कंचों की संख्या और W = जार में सफेद कंचों की संख्या

प्रश्नानुसार, P(नीले कंचे) = $\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{B}{54} = \frac{1}{3} \Rightarrow B = 18$

P (हरे कंचे) = $\frac{4}{9} \Rightarrow \frac{G}{54} = \frac{4}{9} \Rightarrow G = 24$

कुल सफेद कंचो की संख्या = 54 – (18 + 24) = 12

Ex. 2 बैग हैं। पहले बैग में 3 लाल और 4 काली गेंदें हैं और दूसरे बैग में 5 लाल और 2 काली गेंदें हैं। प्रत्येक बैग से एक गेंद निकाली जाती है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि दोनों गेंदें हैं:

(i) समान रंग (ii) अलग रंग

HINTS (i) बैग – I: 3 लाल, 4 काला; बैग – II: 5 लाल, 2 काला

P(दोनों लाल) = $\frac{3}{7} \times \frac{5}{7} = \frac{15}{49}$

P(दोनों काला) = $\frac{4}{7} \times \frac{2}{7} = \frac{8}{49}$

P(समान रंग) = $\frac{15}{49} + \frac{8}{49} = \frac{23}{49}$

(ii) P(अलग रंग) = 1 – P(समान रंग) = $1 - \frac{23}{49} = \frac{26}{49}$

Ex. एक बॉक्स में 5 हरें, 4 पीले और 3 सफेद कंचे हैं। तीन कंचे याद्दच्छिक रूप से निकाले जाते हैं। क्या संभावना है कि वे एक ही रंग के हैं?

HINTS प्रायिकता = $\frac{^5C_3 + {^4C_3} + {^3C_3}}{^{12}C_3} = \frac{10+4+1}{220} = \frac{15}{220} = \frac{3}{44}$

Ex. एक थैले में 6 लाल गेंदें, 5 पीली गेंदें एवं 3 गुलाबी गेंदें है। दो गेंदें याद्दच्छिक रूप से निकाली जाती हैं। कोई भी गेंद के लाल रंग के नहीं होने की क्या प्रायिकता हैं?

HINTS प्रायिकता = $\frac{^8C_2}{^{14}C_2} = \frac{4}{13}$

Ex. एक थैले में 2 लाल, 3 हरी और 2 नीली गेंदें हैं। दो गेंदों को याद्दच्छिक रूप से निकाला जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि निकाली गई कोई भी गेंद नीली नहीं है?

HINTS प्रायिकता = $\frac{^5C_2}{^7C_2} = \frac{5 \times 4}{7 \times 6} = \frac{10}{21}$

Ex. एक थैले में 3 लाल गेंदें, 5 पीली गेंदें एवं 7 गुलाबी गेंदें हैं। यदि थैले से एक गेंद याद्दच्छिक रूप से निकाली जाती हो, तो इसके गुलाबी या लाल रंग के होने की क्या प्रायिकता है?

HINTS प्रायिकता = $\frac{^7C_1 + {^3C_1}}{^{15}C_1} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$

Ex. एक थैले में 6 लाल गेंदें, 4 हरी गेंदें और 8 पीली गेंदें हैं। थैले से याद्दच्छिक रूप से तीन गेंदें निकाली जाती है। क्या प्रायिकता हैं कि दो गेंदें लाल एवं एक गेंद हरी होगी?

HINTS प्रायिकता = $\frac{^6C_2 \times {^4C_1}}{^{18}C_3} = \frac{5}{68}$

Ex. एक थैले में 4 श्वेत, 4 लाल एवं 2 हरी गेंदें है। दो गेंदों को याद्दच्छिक रूप से निकाला जाता है। कम से कम एक गेंद के हरी रंग के होने की क्या प्रायिकता हैं?

HINTS प्रायिकता = $1 - \frac{^8C_2}{^{10}C_2} = 1 - \frac{28}{45} = \frac{17}{45}$

Ex. एक बैंग में 3 लाल, 6 सफेद ओर 7 काली गेंदें है। तीन गेंदें याद्दच्छित आधार पर निकाली जाती है तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि तीनों गेंदें काली हैं?

HINTS प्रायिकता = $\frac{^7C_3}{^{16}C_3} = \frac{1}{16}$

Ex. एक टोकरी में तीन नीली और चार लाल गेंदें हैं। यदि याद्दच्छिक ढंग से टोकरी से तीन गेंदें निकाली जाए, तो तीनों के या तो नीले या लाल होने की प्रायिकता क्या हैं?

HINTS प्रायिकता = $\frac{^3C_3 + {^4C_3}}{^7C_3} = \frac{1}{7}$

सेट सिद्धांत और वेन आरेख पर आधारित

परस्पर अनन्य (अपवर्जी) घटनाएँ

यदि दो घटनाएँ ऐसी हैं जो किसी भी याद्दच्छिक प्रयोग के लिए एक साथ घटित नहीं हो सकती हैं तो उन्हें परस्पर अनन्य (अपवर्जी) घटनाएँ कहा जाता है।

यदि X और Y दो परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं, तो,

$X \cap Y = \phi \Rightarrow P(X \cap Y) = 0$

उदाहरण के लिए, किसी पांसे को फेकने पर घटनाएँ "सम" और "विषम" फलक एक साथ प्राप्त नहीं हो सकती, इसलिए इन्हें परस्पर अनन्य (अपवर्जी) घटनाओं के रूप में जाना जाता है।

लेकिन "विषम फलक" और "3 का गुणज" परस्पर अनन्य (अपवर्जी) नहीं हैं, क्योंकि जब "फलक-3" घटित होता है तो "विषम फलक" और "3 का गुणज" दोनों घटनाएँ एक साथ घटित होती हैं।

@apna_channels

परस्पर गैर-अनन्य घटनाएँ

दो घटनाओं A और B को परस्पर गैर-अनन्य या परस्पर गैर-अपवर्जी घटनाएँ कहा जाता है यदि दोनों घटनाओं A और B के बीच कम से कम एक उभयनिष्ठ परिणाम हो।

घटनाएँ A और B एक दूसरे को होने से नहीं रोक सकतीं इसलिए यहाँ से हम कह सकते हैं कि घटनाएँ A और B में कुछ उभयनिष्ठ है।

मान लीजिए कि 'X' को 'विषम फलक' मिलने की घटना के रूप में दर्शाया गया है 'Y' को '4 से कम' प्राप्त होने की घटना के रूप में दर्शाया गया है।

X = {1, 3, 5}, Y = {1, 2, 3}

घटना X और Y के बीच उभयनिष्ठ परिणाम 1 और 3 हैं। इसलिए घटनाएँ X और Y संगत घटनाएँ या परस्पर गैर-अनन्य हैं।

परस्पर अनन्य (अपवर्जी) घटनाओं पर आधारित जोड़ प्रमेय

यदि X और Y दो परस्पर अनन्य घटनाएँ हैं, तो 'X या Y' की प्रायिकता X की प्रायिकता और Y की प्रायिकता का योग है और इसे निम्न प्रकार दर्शाया गया है-

$P(X \cup Y) = P(X) + P(Y)$

परस्पर गैर-अनन्य (संगत) घटनाओं पर आधारित जोड़ प्रमेय

यदि X और Y दो परस्पर गैर-अनन्य घटनाएँ हैं, तो 'X या Y' की प्रायिकता X की प्रायिकता और Y की प्रायिकता के योग का 'X और Y' की प्रायिकता से अंतर होता है और इसे निम्न प्रकार दर्शाया जाता है।

$P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y)$

स्वतंत्र घटना

दो घटनाओं को स्वतंत्र कहा जाता है यदि एक घटना के घटित होने से दूसरी घटना के घटित होने की संभावना प्रभावित नहीं होती है। दूसरे शब्दों में, घटनाएँ A और B स्वतंत्र हैं यदि

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

स्वतंत्र घटनाएँ	परस्पर अनन्य घटनाएँ
एक के घटित होने से दूसरे पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता।	एक का घटित होना दूसरे को रोकता है
एक ही समय में घटित हो सकता है	एक ही समय में घटित नहीं हो सकता
$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$	$P(A \cap B) = 0$
कोई निर्भरता नहीं	अत्यधिक निर्भर (यदि एक घटित होता है, तो दूसरा नहीं घटित हो सकता)
यदि दो सिक्के उछाले जाते हैं, तो पहले सिक्के पर चित आना, दूसरे सिक्के पर चित आने से स्वतंत्र होता है, अर्थात दोनों सिक्कों पर चित एक ही समय में आ सकता है।	यदि एक सिक्का एक बार उछाला जाए, तो चित और पट एक साथ नहीं आ सकते। इसलिए यहाँ चित और पट परस्पर अनन्य हैं।

महत्वपूर्ण परिणाम

$P(A) \rightarrow$ घटना A की प्रायिकता

$P(B) \rightarrow$ घटना B की प्रायिकता

$P(A \cup B) \rightarrow$ घटना A या B की प्रायिकता

$P(A \cap B) \rightarrow$ घटना A और B की प्रायिकता

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$
- $P(A') = 1 - P(A)$
- $P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B)$
- $P(A' \cup B') = P(A \cap B)' = 1 - P(A \cap B)$

Ex. A तथा B दो घटनाएं इस प्रकार है कि $P(A) = 0.54$, $P(B) = 0.69$ तथा $P(A \cap B) = 0.35$, तो $P(A \cap B')$ ज्ञात कीजिए।

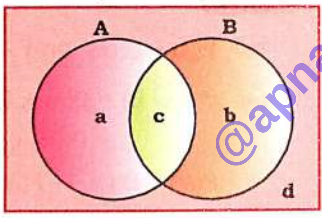
HINTS $P(A) = a + c = 0.54$

$P(A \cap B) = c = 0.35$

$P(A \cap B') = a$

$= P(A) - P(A \cap B)$

$= 0.54 - 0.35 = 0.19$



Ex. एक निष्पक्ष सिक्के को उछालने और एक निष्पक्ष छह-पक्षीय पासे को एक ही समय में फेंकने पर सिक्के पर चित और पासे पर 4 आने की संभावना ज्ञात कीजिए।

HINTS माना, घटना A = सिक्के पर चित आना

घटना B = पासे पर 4 आना

सिक्के के उछालने के परिणाम का पासे के लुढ़कने पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता है, और इसके विपरीत भी सही है।

A की प्रायिकता $P(A) = \frac{1}{2}$, B की प्रायिकता $P(B) = \frac{1}{6}$

A और B दोनों के एक साथ घटित होने की प्रायिकता:

$P(A \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$

Ex. यदि A और B दो घटनाएँ इस प्रकार हैं कि $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$, $P(A) = \frac{1}{2}$ & $P(B) = \frac{1}{3}$ तो घटनाएँ A और B ____ हैं

HINTS $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = 0$

चूँकि $P(A \cap B)$ शून्य है, इसलिए A और B परस्पर अनन्य घटनाएँ हैं।

Ex. यदि A और B दो घटनाएँ इस प्रकार हैं कि $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ & $P(B) = \frac{1}{2}$, तो घटनाएँ A और B____हैं।

HINTS $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\frac{3}{4} = P(A) + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \Rightarrow P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

इसलिए, A और B स्वतंत्र घटनाएँ है।

Ex. एक स्कूल की ग्यारहवीं कक्षा में, 40% छात्र गणित पढ़ते हैं और 30% जीव विज्ञान पढ़ते हैं। कक्षा के 10% गणित और जीव विज्ञान दोनों पढ़ते हैं। यदि किसी छात्र को कक्षा से याहच्छिक रूप से चुना जाता है, तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि वह गणित या जीव विज्ञान का अध्ययन करेगा।

HINTS $P(M) = 40\% = \frac{2}{5}$ & $P(B) = 30\% = \frac{3}{10}$

$P(M \text{ और } B) = P(M \cap B) = 10\% = \frac{1}{10}$

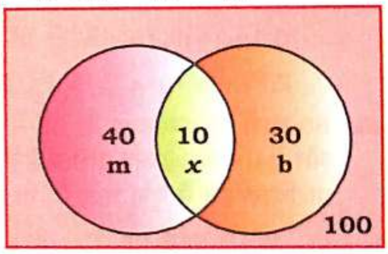
$P(M \text{ या } B) = P(M \cup B) = P(M) + P(B) - P(M \cap B)$

$= \frac{2}{5} + \frac{3}{10} - \frac{1}{10} = \frac{4+3-1}{10} = \frac{6}{10} = 0.6$

वैकल्पिक विधि

$P(M \cup B) = \frac{m + b - x}{100}$

$= \frac{40 + 30 - 10}{100} = 0.6$



Ex. एक प्रवेश परीक्षा में, जिसे दो परीक्षाओं के आधार पर वर्गीकृत किया जाता है, याहच्छिक रूप से चुने गए छात्र की पहली परीक्षा उत्तीर्ण करने की प्रायिकता 0.8 है, और दूसरी परीक्षा उत्तीर्ण करने की प्रायिकता 0.7 है। उनमें से कम से कम एक के उत्तीर्ण होने की प्रायिकता 0.95 है। दोनों के उत्तीर्ण होने की प्रायिकता क्या है?

HINTS माना, परीक्षा-I = A, परीक्षा-II = B

जहाँ, $P(A) = 0.8$, $P(B) = 0.7$ & $P(A \cup B) = 0.95$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\Rightarrow 0.95 = 0.8 + 0.7 - P(A \cap B)$

$\Rightarrow P(A \cap B) = 1.5 - 0.95 = 0.55$

वैकल्पिक विधि

$P(A) = a + c = 0.8$

$P(B) = b + c = 0.7$

P(कम से कम एक)

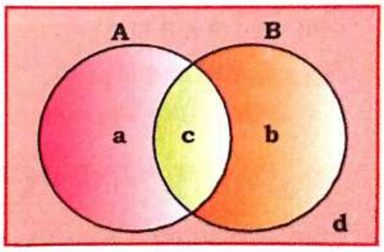
$= a + b + c = 0.95$

P(दोनों उत्तीर्ण) = c

$\Rightarrow$ P(दोनों उत्तीर्ण) = P(A) + P(B) − P(कम से कम एक)

$\Rightarrow$ P(दोनों उत्तीर्ण) = 0.8 + 0.7 − 0.95

$\therefore$ P(दोनों उत्तीर्ण) = 0.55



@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. छात्र के अंग्रेजी और हिंदी दोनों में निर्णायक परीक्षा उत्तीर्ण करने की प्रायिकता 0.5 है, और दोनों में से किसी में भी न उत्तीर्ण होने की प्रायिकता 0.1 है। यदि अंग्रेजी परीक्षा उत्तीर्ण करने की प्रायिकता 0.75 है, तो हिंदी परीक्षा उत्तीर्ण करने की प्रायिकता क्या है?

HINTS $P(E) = 0.75,\ P(E \cap H) = 0.5$ &

P (न E न ही H) = $P(E' \cap H') = 0.1$

हम जानते हैं, कि $E' \cap H' = (E \cup H)'$

$\therefore P(E \cup H)' = 0.1$

$P(E \cup H) = 1 - P(E \cup H)'$

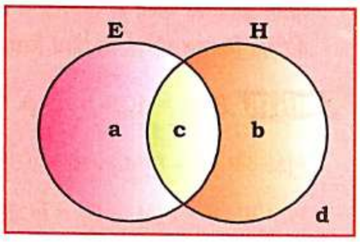
$= 1 - 0.1 = 0.9$

$P(E \cup H) = P(E) + P(H) - P(E \cap H)$

$P(H) = 0.9 - 0.75 + 0.5 = 0.65$

$\therefore$ हिंदी परीक्षा उत्तीर्ण करने की प्रायिकता = 0.65

वैकल्पिक विधि



$P(E) = a + c = 0.75$

$P(H) = b + c$

P(E और H दोनों) = c = 0.5

P(दोनों में से किसी में उत्तीर्ण नहीं) = d = 0.1

$\Rightarrow d = 1 -(a + b + c)$

$\Rightarrow 0.1 = 1 -(0.75 + b) \Rightarrow b = 0.15$

$\therefore P(H) = b + c = 0.15 + 0.5 = 0.65$

Ex. 60 छात्रों की एक कक्षा में, 30 ने NCC को चुना, 32 ने NSS को चुना और 24 ने NCC और NSS दोनों को चुना। यदि इनमें से एक छात्र को यादृच्छिक रूप से चुना जाता है, तो इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि

(i) छात्र ने NSS या NCC का विकल्प चुना

(ii) छात्र ने न तो NCC और न ही NSS का विकल्प चुना

(iii) छात्र ने NSS का विकल्प चुना है लेकिन NCC का नहीं

HINTS माना, घटना A → छात्रों ने NCC को चुना

घटना B → छात्रों ने NSS को चुना

$P(A) = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$ & $P(B) = \frac{32}{60} = \frac{8}{15}$

& $P(A \cap B) = \frac{24}{60} = \frac{2}{5}$

(i) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{8}{15} - \frac{2}{5} = \frac{19}{30}$

$\therefore$ छात्रों द्वारा NCC या NSS का चयन किये जाने की संभावना $\frac{19}{30}$ है।

(ii) P(न तो A न ही B) = P(A' & B') = $P(A' \cap B')$

& $A' \cap B' = (A \cup B)'$

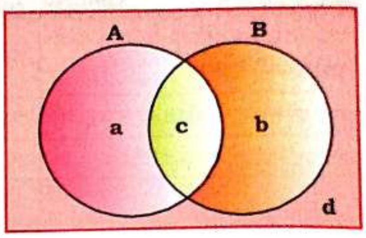
$\therefore P(A' \cap B') = P(A \cup B)'$

$\Rightarrow P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{19}{30} = \frac{11}{30}$

$\therefore$ चयनित छात्रों के न तो NCC और न ही NSS का विकल्प चुनने की प्रायिकता $\frac{11}{30}$ है।

(iii) $P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{8}{15} - \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$

वैकल्पिक विधि



$P(A) = a + c = \frac{1}{2}$

$P(B) = b + c = \frac{8}{15}$

$P(A \cap B) = c = \frac{2}{5}$

(i) P(A या B) = a + b + c

$= P(A) + P(B) - c$

$= \frac{1}{2} + \frac{8}{15} - \frac{2}{5} = \frac{19}{30}$

(ii) P(ना ही A ना B) = d = 1 − (a + b + c)

$= 1 - \frac{19}{30} = \frac{11}{30}$

(iii) $P(A' \cap B) = b = P(B) - c$

$= \frac{8}{15} - \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$

Ex. दो छात्र अनिल और आशिमा एक परीक्षा में उपस्थित हुए। अनिल के परीक्षा उत्तीर्ण करने की प्रायिकता 0.05 है और आशिमा के परीक्षा उत्तीर्ण करने की प्रायिकता 0.10 है। दोनों के परीक्षा उत्तीर्ण करने की प्रायिकता 0.02 है। इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए की-

(a) अनिल और आशिमा दोनों परीक्षा उत्तीर्ण नहीं करेंगे

(b) उनमें से कम से कम एक परीक्षा उत्तीर्ण नहीं करेगा

(c) उनमें से केवल एक ही परीक्षा उत्तीर्ण करेगा।

@apna_channels

HINTS माना, अनिल = A, अशिमा = B

यहाँ, $P(A) = 0.05,\ P(B) = 0.10$ & $P(A \cap B) = 0.02$

(a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= 0.05 + 0.10 - 0.02 = 0.13$

$P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.13 = 0.87$

(b) P(उनमें से कम से कम एक परीक्षा उत्तीर्ण नहीं करेगा)

= 1 − P(दोनों ही उत्तीर्ण होंगे)

$= 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.02 = 0.98$

(c) उनमें से केवल एक ही उत्तीर्ण होगा।

= (अनील उत्तीर्ण होंगे और आशिमा उत्तीर्ण नहीं होगी) 'या' (अनील उत्तीर्ण नहीं होंगे और आशिमा उत्तीर्ण होगी)

$= (A \cap B') \cup (A' \cap B)$

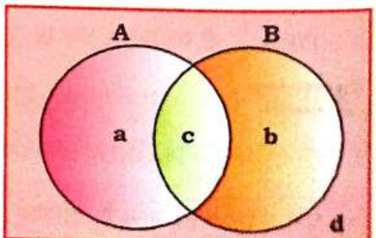
$\therefore$ अभीष्ट प्रायिकता

$= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B)$

$= P(A) + P(B) - 2 \times P(A \cap B)$

$= 0.05 + 0.10 - 2 \times 0.02 = 0.15 - 0.04 = 0.11$

वैकल्पिक विधि



माना,

अनिल = A, अशिमा = B

$P(A) = a + c = 0.05$

$P(B) = b + c = 0.10$

P(दोनों उत्तीर्ण) = c = 0.02

Selected हैं Selection दिलाएंगे

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

(a) P(दोनों अनुत्तीर्ण) = d

$\Rightarrow$ d = 1 – (a + b + c)

$\Rightarrow$ d = 1 – (P(A) + P(B) – c)

$\Rightarrow$ d = 1 – (0.05 + 0.10 – 0.02)

$\Rightarrow$ d = 0.87

अतः दोनों के अनुत्तीर्ण होने की प्रायिकता 0.87 है।

(b) P(कम से कम एक अनुत्तीर्ण)

= a + b + d

= P(A) + P(B) – 2c + d

= 0.05 + 0.10 – 0.04 + 0.87

= 0.98

अतः कम से कम एक अनुत्तीर्ण होने की प्रयिकता 0.98 होगा।

(c) P(केवल एक उत्तीर्ण)

= a + b

= P(A) + P(B) – 2c

= 0.05 + 0.10 – 2 × 0.02

= 0.15 – 0.04

= 0.11

संयोगानुपात (अनुकूल और प्रतिकूल)

किसी विशेष घटना की प्रायिकता में संयोगानुपात का अर्थ अनुकूल परिणामों की संख्या और प्रतिकूल परिणामों की संख्या के बीच का अनुपात है।

घटना A के अनुकूल संयोगानुपात

किसी विशेष घटना का अनुकूल संयोगानुपात अनुकूल परिणामों की संख्या से प्रतिकूल परिणामों की संख्या का अनुपात होता है।

$$\frac{n(A)}{n(S)-n(A)} = \frac{P(A)}{1-P(A)} \text{ या } \frac{P(A)}{P(A')}$$

यदि, अनुकूल संयोगानुपात = 0 $\Rightarrow$ असंभव घटना

अनुकूल संयोगानुपात = $\infty \Rightarrow$ निश्चित घटना

घटना A के प्रतिकूल संयोगानुपात

किसी विशेष घटना का प्रतिकूल संयोगानुपात प्रतिकूल परिणामों की संख्या से अनुकूल परिणामों की संख्या का अनुपात होता है।

$$\frac{n(S)-n(A)}{n(A)} = \frac{1-P(A)}{P(A)} \text{ या } \frac{P(A')}{P(A)}$$

यदि, प्रतिकूल संयोगानुपात = 0 $\Rightarrow$ निश्चित घटना

प्रतिकूल संयोगानुपात = $\infty \Rightarrow$ असंभव घटना

Ex. एक निष्पक्ष पासे को एक बार उछालने पर, संख्या 3 या 4 आने का प्रतिकूल संयोगानुपात क्या है?

HINTS जब एक निष्पक्ष पासा एक बार उछाला जाता है, तो प्रतिदर्श समष्टि S इस प्रकार है:

S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} $\Rightarrow$ n(S) = 6

माना, A = संख्या 3 या 4 आने की घटना

$\therefore$ A = {3, 4} $\Rightarrow$ n(A) = 2

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(A') = 1 - P(A) = \frac{2}{3}$$

$\therefore$ घटना A के प्रतिकूल संयोगानुपात = P(A') : P(A)= $\frac{2}{3} : \frac{1}{3}$ = 2 : 1

Ex. यदि $P(A\cup B) = \frac{5}{9}$, $P(\overline{A}\cup\overline{B}) = \frac{13}{27}$ और $P(A) = \frac{11}{18}$ है, तो घटना B का प्रतिकूल संयोगानुपात ज्ञात कीजिए।

HINTS $P(A' \cup B') = P(A \cap B)'$

$$\Rightarrow \frac{13}{27} = 1 - P(A\cap B)$$

$$\Rightarrow P(A\cap B) = \frac{14}{27}$$

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$

$$\Rightarrow \frac{5}{9} = \frac{11}{18} + P(B) - \frac{14}{27}$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{5}{9} - \frac{11}{18} + \frac{14}{27} = \frac{30-33+28}{54} = \frac{25}{54}$$

$$\text{घटना B का प्रतिकूल संयोगानुपात} = \frac{P(B')}{P(B)} = \frac{1-\frac{25}{54}}{\frac{25}{54}}$$

$$= \frac{29}{54} \times \frac{54}{25} = \frac{29}{25}$$

Ex. एक निश्चित घटना का प्रतिकूल संयोगानुपात 5 : 2 है और इससे स्वतंत्र किसी अन्य घटना का अनुकूल संयोगानुपात 6 : 5 है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए, कि,

(i) कम से कम एक घटना घटित होगी।

(ii) इनमें से कोई भी घटनाएँ घटित नहीं होंगी।

HINTS $\frac{P(A')}{P(A)} = \frac{5}{2} \Rightarrow P(A) = \frac{2}{7}$ & $P(A') = \frac{5}{7}$

$\frac{P(B)}{P(B')} = \frac{6}{5} \Rightarrow P(B) = \frac{6}{11}$ & $P(B') = \frac{5}{11}$

(i) P(कम से कम एक घटना घटित होगी)

$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

$\because$ दोनों घटनाएँ स्वतंत्र है इसलिए

$P(A\cap B) = P(A) \times P(B)$

$\therefore P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$

$$= \frac{2}{7} + \frac{6}{11} - \frac{2}{7} \times \frac{6}{11} = \frac{22+42-12}{77} = \frac{52}{77}$$

(ii) P(कोई भी घटना घटित नहीं होगी) = 1 – $P(A\cup B)$ = 1 – $\frac{52}{77} = \frac{25}{77}$

Ex. विद्यार्थी X द्वारा सांख्यिकी समस्या हल करने का प्रतिकूल संयोगानुपात 8 : 6 हैं तथा विद्यार्थी Y द्वारा उसी समस्या को हल करने का अनुकूल संयोगानुपात 14 : 16 हैं। ज्ञात कीजिए कि क्या सम्भावना है कि उनमें से कोई भी समस्या हल नहीं कर सकता?

HINTS $\frac{P(X')}{P(X)} = \frac{8}{6} \Rightarrow P(X') = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$ & $P(X) = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$

$\frac{P(Y)}{P(Y')} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8} \Rightarrow P(Y) = \frac{7}{15}$ & $P(Y') = \frac{8}{15}$

अभीष्ट प्रायिकता = $P(X' \cap Y')$

चूँकि, X और Y स्वतंत्र घटनाएँ हैं, X' और Y' भी स्वतंत्र घटनाएँ हैं।

अभीष्ट प्रायिकता $P(X' \cap Y') = P(X') \times P(Y') = \frac{4}{7} \times \frac{8}{15} = \frac{32}{105}$

@apna_channels
Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. एक पति जो वर्तमान में 60 साल का है उसके 85 साल की उम्र तक जीवित रहने का प्रतिकूल संयोगानुपात 7 : 5 है। उसकी पत्नी जो 56 वर्ष की है के 81 वर्ष तक जीवित रहने का प्रतिकूल संयोगानुपात 5 : 3 है।

(i) प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि उनमें से कम से कम एक अब से 25 साल जीवित रहेगा।

(ii) प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि उनमें से सिर्फ एक अब से 25 साल जीवित रहेगा।

HINTS $\frac{P(H')}{P(H)} = \frac{7}{5} \Rightarrow P(H') = \frac{7}{12}$ & $P(H) = \frac{5}{12}$

$\frac{P(W')}{P(W)} = \frac{5}{3} \Rightarrow P(W') = \frac{5}{8}$ & $P(W) = \frac{3}{8}$

(i) अभीष्ट प्रायिकता $= P(H \cup W)$

$= P(H) + P(W) - P(H) \times P(W)$

$= \frac{5}{12} + \frac{3}{8} - \frac{5}{12} \times \frac{3}{8}$

$= \frac{40+36-15}{96} = \frac{61}{96}$

(ii) अभीष्ट घटना तब घटित होगी जब पति जीवित हो और पत्नी मर गई हो या पति मर गया हो और पत्नी जीवित हो

$\therefore$ अभीष्ट प्रायिकता $= P[(H \cap W') \cup (H' \cap W)]$

$= P(H \cap W') + P(H' \cap W)$

{$\because$ घटनाएँ $H \cap W'$ और $H' \cap W$ परस्पर अनन्य हैं}

$= P(H) \times P(W') + P(H') \times P(W)$ {$\because$ घटनाएँ स्वतंत्र हैं}

$= \frac{5}{12} \times \frac{5}{8} + \frac{7}{12} \times \frac{3}{8} = \frac{46}{96} = \frac{23}{48}$

सप्रतिबंध प्रायिकता

यदि, X तथा Y किसी याद्दच्छिक परीक्षण के एक ही प्रतिदर्श समष्टि से संबंधित दो घटनाएं हैं,तो घटना X की सप्रतिबंध प्रायिकता, उस स्थिति में जब घटना Y घटित हो चुकी हो, को प्रतीक $P\left(\frac{X}{Y}\right)$ द्वारा निरूपित करते हैं और घटना X की सप्रतिबंध प्रायिकता निम्नलिखित सूत्र से प्राप्त होती है:

$P\left(\frac{X}{Y}\right) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)}, P(Y) \neq 0$

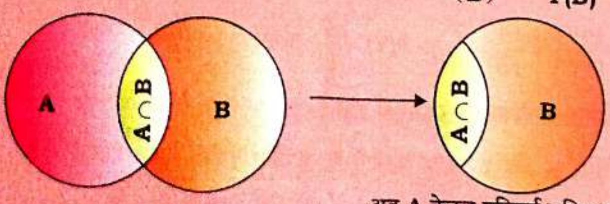
इसी प्रकार, घटना Y की सप्रतिबंध प्रायिकता जब X पहले ही घटित हो चुका है:

$P\left(\frac{Y}{X}\right) = \frac{P(X \cap Y)}{P(X)}, P(X) \neq 0$

सप्रतिबंध प्रायिकता का आरेखीय निरूपण

यदि B पहले ही घटित हो चुका है, तो हमारा प्रतिदर्श समिष्ट B के भीतर होना चाहिए

$P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$



अब A केवल प्रतिदर्श समिष्ट B के भीतर ही घटित हो सकता है

प्रायिकता का गुणन प्रमेय

यदि, X और Y स्वतंत्र घटनाएँ हैं, तो X और Y दोनों के घटित होने की प्रायिकता:

$P(X \cap Y) = P(X) \times P(Y)$.

सामान्य रूप

$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \ldots\ldots \cap A_n)$

$= P(A_1) \times P\left(\frac{A_2}{A_1}\right) \times P\left(\frac{A_3}{A_1 \cap A_2}\right) \ldots\ \ldots\ldots P\left(\frac{A_n}{A_1 \cap A_2 \ldots . A_{n-1}}\right)$

☞ यदि, A, B और C एक ही प्रतिदर्श समष्टि की तीन घटनाएँ हैं। तो,

$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P\left(\frac{B}{A}\right) \times P\left(\frac{C}{A \cap B}\right)$

Ex. यदि, $P(A) = \frac{7}{13}$, $P(B) = \frac{9}{13}$ और $P(A \cap B) = \frac{4}{13}$, तो $P\left(\frac{A}{B}\right)$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{4}{13} \times \frac{13}{9} = \frac{4}{9}$

Ex. यदि, $P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{1}{2}$, $P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{1}{3}$ और $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$, $P(A \cup B)$ का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS $P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{P(B)} \Rightarrow P(B) = \frac{1}{3}$

और, $P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{P(A)} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{2}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

Ex. एक परिवार में दो बच्चे हैं। इसकी क्या प्रायिकता है कि दोनों बच्चे लड़के हैं, ज्ञात है कि उनमें से कम से कम एक लड़का है।

HINTS S = {(g, g), (g, b), (b, g), (b, b)}

E : दोनों बच्चे लड़के हैं।

& F : बच्चों में से कम से कम एक लड़का है।

E = {(b, b)}

F = {(g, b), (b, g), (b, b)} & $(E \cap F)$ = {(b, b)}

$\Rightarrow P(E) = \frac{1}{4}$, $P(F) = \frac{3}{4}$, $P(E \cap F) = \frac{1}{4}$

अब, $P\left(\frac{E}{F}\right) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$

वैकल्पिक विधि

S = उनमें से कम से कम एक लड़का है।

⇒ S =(g, b), (b, g), (b, b) = 3

अनुकूल परिणाम = (b, b) = 1 ⇒ प्रायिकता $= \frac{1}{3}$

Selected हैं Selection दिलाएंगे

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. 1 से 10 क्रमांक वाले दस कार्डों को एक बॉक्स में रखा जाता है, अच्छी तरह से मिलाया जाता है और फिर यादृच्छिक रूप से एक कार्ड निकाला जाता है। यदि यह ज्ञात है कि निकाले गए कार्ड पर संख्या 3 से अधिक है, तो सम संख्या प्राप्त होने की क्या प्रायिकता है?

HINTS माना A: निकाले गए कार्ड पर संख्या सम है

B: निकाले गए कार्ड पर संख्या 3 से अधिक है

S = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

A = {2, 4, 6, 8, 10}

B = {4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

$A \cap B$ = {4, 6, 8, 10}

अब, $P(A)\ \frac{5}{10}$, $P(B) = \frac{7}{10}$, $P(A \cap B) = \frac{4}{10}$

$\therefore P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{4}{10} \times \frac{10}{7} = \frac{4}{7}$

वैकल्पिक विधि

S = संख्या 3 से अधिक

⇒ S = (4, 5, 6, 7, 8, 9, 10) = कुल 7 संख्या

अनुकूल परिणाम = (4, 6, 8, 10) = कुल 4 परिणाम

प्रायिकता = $\frac{4}{7}$

Ex. दो पासे फेंके जाते हैं, उन पर आने वाली संख्याओं का योग 9 होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए, यदि यह ज्ञात हो कि संख्या 5 हमेशा पहले पासे पर आती है।

HINTS कुल परिणामों की संख्या = $6^2 = 36$

A: आने वाली संख्याओं का योग 9 है।

B: प्रथम पासे पर 5 आना।

A : {(3, 6), (6, 3), (4, 5), (5, 4)}

B : {(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6)}

$(A \cap B)$ = {(5, 4)}

$P(A) = \frac{4}{36}$, $P(B) = \frac{6}{36}$ & $P(A \cap B) = \frac{1}{36}$

$\therefore P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{36} \times \frac{36}{6} = \frac{1}{6}$

वैकल्पिक विधि

S = कुल परिणाम जिसमें प्रथम पासे पर 5 आता है।

⇒ S =(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6)

अनुकूल परिणाम = योग 9 = (5, 4)

प्रायिकता = $\frac{1}{6}$

Ex. यदि $P(\bar{A}) = 0.3$, $P(B) = 0.4$, $P(A \cap \bar{B}) = 0.5$, $P\left(\frac{B}{A \cup \bar{B}}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS $P\left(\frac{B}{A \cup \bar{B}}\right) = \frac{P(B \cap (A \cup \bar{B}))}{P(A \cup \bar{B})}$

$= \frac{P(A \cap B)}{P(A) + P(\bar{B}) - P(A \cap \bar{B})} = \frac{P(A) - P(A \cap \bar{B})}{P(A) + P(\bar{B}) - P(A \cap \bar{B})}$

$= \frac{0.7 - 0.5}{0.8} = \frac{1}{4}$

Ex. यदि $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ और $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, तो $P\left(\frac{\bar{A}}{\bar{B}}\right)$ का मान ज्ञात करें ?

HINTS $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$

$P\left(\frac{\bar{A}}{\bar{B}}\right) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(\overline{A \cup B})}{P(\bar{B})} = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(B)} = \frac{1 - \frac{7}{12}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{5}{8}$

Ex. 8 लड़कों और 4 लड़कियों वाले समूह में से 4 छात्रों की एक समिति को यादृच्छिक रूप से चुना जाता है। यह देखते हुए कि समिति में कम से कम एक लड़की है, इस प्रायिकता की गणना करें कि समिति में ठीक 2 लड़कियाँ हैं।

HINTS A: कम से कम एक लड़की चुनी जाएगी

B: ठीक 2 लड़कियों का चयन किया जाएगा

A': कोई लड़की नहीं चुनी गई → 4 लड़के चुने गए

$P(A') = \frac{{}^8C_4}{{}^{12}C_4} = \frac{70}{495} = \frac{14}{99} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{14}{99} = \frac{85}{99}$

$P(A \cap B)$ = P(2 लड़के और 2 लड़की)

$= \frac{{}^8C_2 \times {}^4C_2}{{}^{12}C_4} = \frac{6 \times 28}{495} = \frac{56}{165}$

$P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{56}{165} \times \frac{99}{85} = \frac{168}{425}$

Ex. 10 कार्ड हैं, इनमें से 5 पर 'I' और अन्य 5 पर 'T' छपा हुआ है। 3 कार्ड बिना प्रतिस्थापन के एक-एक करके निकाले जाते हैं और एक ही क्रम में रखे जाते हैं, तो IIT शब्द बनने की प्रायिकता है।

HINTS A : पहले ड्रॉ में मार्क I वाला कार्ड मिलना।

B: दूसरे ड्रॉ में मार्क I वाला कार्ड मिलना।

C: तीसरे ड्रॉ में मार्क T वाला कार्ड मिलना।

$\therefore P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P\left(\frac{B}{A}\right) \times P\left(\frac{C}{A \cap B}\right) = \frac{5}{10} \times \frac{4}{9} \times \frac{5}{8} = \frac{5}{36}$

बॉय-प्रमेय

हम जानते हैं कि,

$P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ ......(i)

और, $P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ .....(ii)

समीकरण (i) और (ii) से,

$$P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A) \times P\left(\frac{B}{A}\right)}{P(B)}$$

इसे बॉय प्रमेय कहते हैं। यह $P\left(\frac{A}{B}\right)$ और $P\left(\frac{B}{A}\right)$ के बीच का संबंध है।

सामान्य रूप

$$P\left(\frac{E_1}{A}\right) = \frac{P(E_1) \times P\left(\frac{A}{E_1}\right)}{\sum_{r=1}^{n} P(E_r) \times P\left(\frac{A}{E_r}\right)}$$

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

जब भी किसी यादृच्छिक प्रयोग के घटना की प्रायिकता दी जाती है और उसके किसी विशेष पथ से घटित होने की प्रायिकता पूछी जाती है, तो बॉय का प्रमेय लागू किया जाता है। पथों को E द्वारा दर्शाया जाता है, और घटना को A द्वारा दर्शाया जाता है।

Ex. एमी के पास दो बैग हैं। बैग I में 7 लाल और 4 नीली गेंदें हैं और बैग II में 5 लाल और 9 नीली गेंदें हैं। एमी यादृच्छिक रूप से एक गेंद निकालती है जो की लाल है। इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि गेंद बैग I से थी।

HINTS A : लाल गेंद निकालने की घटना

घटना E_1 : थैला I चुनना

घटना E_2 : थैला II चुनना

हम जानते हैं कि एक बैग चुनने की प्रायिकता $\frac{1}{2}$ है, इसलिए

$P(E_1) = P(E_2) = \frac{1}{2}$

P(बैग I से लाल गेंद निकालना) $= P\left(\frac{A}{E_1}\right) = \frac{7}{11}$

P(बैग II से लाल गेंद निकालना) $= P\left(\frac{A}{E_2}\right) = \frac{5}{14}$

हमें ज्ञात करना है कि, P(बैग I से निकाली गई गेंद, यह देखते हुए कि यह एक लाल गेंद है) अर्थात $P\left(\frac{E_1}{A}\right)$ है।

$$P\left(\frac{E_1}{A}\right) = \frac{P\left(\frac{A}{E_1}\right)\times P(E_1)}{P\left(\frac{A}{E_1}\right)\times P(E_1) + P\left(\frac{A}{E_2}\right)\times P(E_2)}$$

$$= \frac{\frac{7}{11}\times\frac{1}{2}}{\frac{7}{11}\times\frac{1}{2}+\frac{5}{14}\times\frac{1}{2}} = \frac{98}{153} = 0.64$$

Ex. बॉक्स I में 2 सफेद और 3 नीली गेंदें हैं, बॉक्स II में 4 सफेद और 2 नीली गेंदें हैं और बॉक्स III में 1 सफेद और 3 नीली गेंदें हैं। बॉक्स I, II और III के चुने जाने की संभावनाएँ क्रमशः 0.2, 0.3 और 0.5 हैं। एक गेंद यादृच्छिक रूप से निकाली जाती है और सफेद पाई जाती है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि यह बॉक्स I से आयी है।

HINTS E_1 : बॉक्स I चुना गया

E_2 : बॉक्स II चुना गया

E_3 : बॉक्स III चुना गया

A : सफेद गेंद निकाली गई

$P(E_1) = 0.2$, $P(E_2) = 0.3$ & $P(E_3) = 0.5$

$P\left(\frac{A}{E_1}\right)$ = बॉक्स I से सफेद गेंद की प्रायिकता $= \frac{2}{5}$

$P\left(\frac{A}{E_2}\right)$ = बॉक्स II से सफेद गेंद की प्रायिकता $= \frac{4}{6}$

$P\left(\frac{A}{E_3}\right)$ = बॉक्स III से सफेद गेंद की प्रायिकता $= \frac{1}{4}$

$$P\left(\frac{E_1}{A}\right) = \frac{P(E_1)\times P\left(\frac{A}{E_1}\right)}{P(E_1)\times P\left(\frac{A}{E_1}\right)+P(E_2)\times P\left(\frac{A}{E_2}\right)+P(E_3)\times P\left(\frac{A}{E_3}\right)}$$

$$= \frac{0.2\times\left(\frac{2}{5}\right)}{(0.2)\times\left(\frac{2}{5}\right)+(0.3)\times\left(\frac{4}{6}\right)+(0.5)\times\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{\frac{4}{50}}{\frac{243}{600}} = \frac{16}{81}$$

Ex. एक आदमी 4 में से 3 बार सच बोलने के लिए जाना जाता है। वह पासा फेंकता है और रिपोर्ट करता है कि यह छक्का है। इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि यह वास्तव में छक्का है।

HINTS A : वह घटना जिसमें आदमी एक छह को रिपोर्ट करता है।

E_1 : वह घटना जिसमें 6 आता है, E_2 : वह घटना जिसमें 6 नहीं आता है

$P(E_1) = \frac{1}{6}$ & $P(E_2) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

$P\left(\frac{A}{E_1}\right)$ = प्रायिकता जब आदमी रिपोर्ट करता है कि वास्तव में 6 घटित हुए हैं और जब वह सही है $= \frac{3}{4}$

$P\left(\frac{A}{E_2}\right)$ = आदमी रिपोर्ट करता है कि 6 घटित हुआ है और वह घटित नहीं हुआ है $= 1-\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

बॉय-प्रमेय द्वारा,

$$P\left(\frac{E_1}{A}\right) = \frac{P(E_1)\times P\left(\frac{A}{E_1}\right)}{P(E_1)\times P\left(\frac{A}{E_1}\right)+P(E_2)\times P\left(\frac{A}{E_2}\right)} = \frac{\frac{1}{6}\times\frac{3}{4}}{\frac{1}{6}\times\frac{3}{4}+\frac{5}{6}\times\frac{1}{4}} = \frac{3}{8}$$

Ex. एक आदमी $\frac{3}{4}$ बार सच बोलने के लिए जाना जाता है। वह एक कार्ड निकलता है और बताता है कि यह राजा है। इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि यह वास्तव में एक राजा है।

HINTS A: घटना जब आदमी रिपोर्ट करता है कि 52 पत्तों के पैक में से राजा निकाला गया है

E_1 : राजा निकाला गया, E_2 : राजा नहीं निकाला

$P(E_1) = \frac{1}{13}$ और $P(E_2) = 1-\frac{1}{13} = \frac{12}{13}$

$P\left(\frac{A}{E_1}\right)$ = प्रायिकता कि आदमी सच कहता है कि राजा निकाला गया है जबकि वास्तव में राजा निकाला गया है $= \frac{3}{4}$

$P\left(\frac{A}{E_2}\right)$ = प्रायिकता कि आदमी झूठ कहता है कि राजा निकाला गया है जबकि वास्तव में राजा नहीं निकाला गया है $= 1-\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

$$P\left(\frac{E_1}{A}\right) = \frac{P(E_1)\times P\left(\frac{A}{E_1}\right)}{P(E_1)\times P\left(\frac{A}{E_1}\right)+P(E_2)\times P\left(\frac{A}{E_2}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{13}\times\frac{3}{4}}{\frac{1}{13}\times\frac{3}{4}+\frac{12}{13}\times\frac{1}{4}} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5} = 0.20$$

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

विविध प्रश्न

Ex. यदि हम प्रथम 20 प्राकृतिक संख्याओं में से एक संख्या का चयन करें तो अभाज्य संख्या की प्रायिकता क्या है?

HINTS प्राकृतिक संख्या = 1, 2, 3 20

अभाज्य संख्या = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19

प्रायिकता = $\frac{8}{20} = \frac{2}{5}$

Ex. एक बैग में 2 से 90 तक क्रमांकित कार्ड हैं। बैग से यादृच्छिक रूप से एक कार्ड निकाला जाता है। इस बात की प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि कार्ड संख्या पूर्ण वर्ग है।

HINTS 2 से 90 के बीच पूर्ण वर्ग संख्याएँ = 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81

प्रायिकता = $\frac{8}{89}$

Ex. प्रथम सौ प्राकृतिक संख्याओं में से यादृच्छिक रूप से चयनित एक संख्या के 3 या 5 का गुणज होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

HINTS 3 का गुणज = $\frac{99}{3} = 33$

5 का गुणज = $\frac{100}{5} = 20$

3 और 5 का गुणज = $\frac{90}{15} = 6$

∴ अनुकूल परिस्थितियों की कुल संख्या = 33 + 20 − 6 = 47

प्रायिकता = $\frac{47}{100}$

Ex. एक टोकरी में 10 सेब और 20 संतरे हैं जिनमें से 3 सेब और 5 संतरे खराब हैं। यदि हम दो फलों को यादृच्छिक रूप से चुनते हैं, तो इसकी क्या प्रायिकता है कि या तो दोनों संतरे हैं या दोनों दोषपूर्ण नहीं है?

HINTS $P = \frac{{}^{20}C_2 + {}^{22}C_2 - {}^{15}C_2}{{}^{30}C_2}$

$= \frac{190 + 231 - 105}{435} = \frac{316}{435}$

	A	O
D	3	5
N	7	15

Ex. तीन छात्रों को एक प्रश्न दिया जाता है जिसके हल करने की प्रायिकता क्रमशः $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ और $\frac{1}{4}$ है। क्या प्रायिकता है कि समस्या हल हो जाएगी?

HINTS P(हल) = 1 − P(हल नहीं हो पाएगी)

$= 1 - \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Ex. तीन छात्रों A, B और C द्वारा एक प्रश्न को हल करने की प्रायिकता क्रमशः $\frac{3}{7}, \frac{5}{9}$ और $\frac{1}{5}$ है। समस्या के हल होने की प्रायिकता क्या होगी?

HINTS P(हल) = 1 − P (हल नहीं है)

$= 1 - \frac{4}{7} \times \frac{4}{9} \times \frac{4}{5} = 1 - \frac{64}{315} = \frac{251}{315}$

Ex. एक आदमी और उसकी पत्नी एक ही पद पर दो रिक्तियों के लिए साक्षात्कार में शामिल होते हैं। पति के चयन की प्रायिकता $\left(\frac{1}{7}\right)$ तथा पत्नी के चयन की प्रायिकता $\left(\frac{1}{5}\right)$ है। उनमें से केवल एक के चुने जाने की प्रायिकता क्या है?

HINTS प्रायिकता $= \frac{1}{7} \times \frac{4}{5} + \frac{6}{7} \times \frac{1}{5}$

$= \frac{10}{35} = \frac{2}{7}$

Ex. एक भाई और एक बहन एक कार्यालय में दो रिक्त पदों के विरुद्ध साक्षात्कार के लिए आते हैं। भाई के चयन की प्रायिकता $\frac{1}{5}$ तथा बहन के चयन की प्रायिकता $\frac{1}{3}$ है। उनमें से केवल एक के चुने जाने की प्रायिकता क्या है?

HINTS प्रायिकता $= \frac{1}{5} \times \frac{2}{3} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{3}$

$= \frac{2}{15} + \frac{4}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

Ex. 80% मामलों में A सच बोलता है और B 60% मामलों में सच बोलता है। प्रायिकता ज्ञात करें कि वे एक घटना को बयान करने में एक -दूसरे का खंडन करते हैं।

HINTS माना, A = A सच बोलता है।

B = B सच बोलता है।

∴ $P(A) = \frac{80}{100} = \frac{4}{5}$ और $P(B) = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$

$P(A') = 1 - P(A)$

$= 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$

$P(B') = 1 - P(B)$

$= 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

∴ P(A और B एक दूसरे का खंडन करते है)

= P(A सच बोलता है और B झूठ बोलता है) + P(A झूठ बोलता है और B सच बोलता है)

$= P(A \cap B') + P(A' \cap B)$

$= P(A) \times P(B') + P(A') \times P(B)$

$= \left(\frac{4}{5} \times \frac{2}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} \times \frac{3}{5}\right)$

$= \frac{8}{25} + \frac{3}{25} = \frac{11}{25}$

Ex A, 75% मामलों में सच बोलता है और B, 80% मामलों में सच बोलता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि वे एक ही घटना का वर्णन करते हुए एक-दूसरे का खंडन करेंगे।

HINTS प्रायिकता $= \frac{3}{4} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{7}{20}$

Ex. A, 7 में से 5 बार सच बोलता है और B, 9 में से 8 बार सच बोलता है। इसकी क्या प्रायिकता होगी कि वे एक ही तथ्य को कहने में एक दूसरे का खंडन करेंगे?

HINTS प्रायिकता $= \frac{5}{7} \times \frac{1}{9} + \frac{2}{7} \times \frac{8}{9} = \frac{21}{63} = \frac{1}{3}$

@apna_channels
Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. एक क्रिकेट विश्व कप में भारत के कप के जीतने की प्रायिकता $\frac{1}{4}$ है। पाकिस्तान के कप जीतने की प्रायिकता $\frac{1}{5}$ है और ऑस्ट्रेलिया के कप जीतने की प्रायिकता $\frac{1}{6}$ है। इसकी क्या प्रायिकता है कि इन टीमों में से कोई एक भारत, पाकिस्तान और ऑस्ट्रेलिया विश्व कप जीतेगी? केवल एक ही टीम कप जीत सकती है।

HINTS माना, W = जीत, L = हार

I_w = Ind - जीत	I_L = Ind - हार
P_w = Pak - जीत	P_L = Pak - हार
A_w = Aust - जीत	A_L = Aus - हार

$P(I_w) = \frac{1}{4}$; $P(P_w) = \frac{1}{5}$; $P(A_w) = \frac{1}{6}$

विश्व कप का समापन किसी टीम के विजेता के रूप में होगा यादि:

(I_w और P_L और A_L) या (I_L और P_W और A_L) या (I_L और P_L और A_W)

$$\text{प्रायिकता} = \left(\frac{1}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{5}{6}\right)+\left(\frac{3}{4}\times\frac{1}{5}\times\frac{5}{6}\right)+\left(\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{6}\right)$$

$$= \frac{20+15+12}{120} = \frac{47}{120}$$

Ex. अंग्रेजी वर्णमाला से दो अक्षर चुने गए हैं। क्या प्रायिकता है कि दोनों स्वर हैं।

HINTS $\text{प्रायिकता} = \frac{^5C_2}{^{26}C_2} = \frac{5\times4}{26\times25} = \frac{2}{65}$

Ex. एक व्यक्ति जो 45 वर्ष का है के 70 वर्ष तक जीवित रहने की प्रायिकता $\frac{5}{12}$ है तथा उसकी पत्नी जो की 40 वर्ष की है के 65 वर्ष तक जीवित रहने की प्रायिकता $\frac{3}{8}$ है। क्या प्रायिकता है की अभी से 25 वर्ष तक-

(i) युगल जीवित रहेगा।

(ii) उनमें से केवल एक जीवित रहेगा।

HINTS माना, A = घटना कि 45 साल का आदमी 70 वर्ष की उम्र तक जीवित रहेगा

B = घटना कि 40 वर्षीय पत्नी 65 वर्ष की आयु तक जीवित रहेगी

यह दिया गया है, कि $P(A) = \frac{5}{12}$, $P(B) = \frac{3}{8}$

$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$

$P(B') = 1 - P(B) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

चूंकि A और B स्वतंत्र घटनाएँ हैं,

A' और B' भी स्वतंत्र घटनाएँ हैं।

(i) मान लीजिए घटना C: आदमी और उसकी पत्नी दोनों जीवित रहेंगे।

$P(C) = P(A\cap B) = P(A)\times P(B) = \frac{5}{12}\times\frac{3}{8} = \frac{5}{32}$

(ii) मान लीजिए घटना D: उनमें से केवल एक ही जीवित बचेगा।

$P(D) = P(A'\cap B) + P(A\cap B')$

$= P(A')\times P(B) + P(A)\times P(B')$

$= \left(\frac{7}{12}\times\frac{3}{8}\right)+\left(\frac{5}{12}\times\frac{5}{8}\right) = \frac{21}{96}+\frac{25}{96} = \frac{46}{96} = \frac{23}{48}$

Ex. एक अक्षर 'ASSISTANT' से यादृच्छिक रूप से निकाला जाता है और दूसरा 'STATISTICS' से निकाला जाता है। क्या प्रायिकता है कि वे एक ही अक्षर हैं।

HINTS

AA	A
SSS	SSS
I	II
TT	TTT
N	C

$$\text{प्रायिकता} = \frac{2}{9}\times\frac{1}{10}+\frac{3}{9}\times\frac{3}{10}+\frac{1}{9}\times\frac{2}{10}+\frac{2}{9}\times\frac{3}{10} = \frac{19}{90}$$

Ex. एक व्यक्ति 8 शॉट में से 5 बार निशाना लगा सकता है। यदि वह 10 शॉट फायर करता है, तो इसकी क्या प्रायिकता होगी कि वह दोबारा निशाना लगा लेगा?

HINTS प्रायिकता = $^nC_r\,(P)^r\,(1-P)^{n-r}$

$P(\text{हिट}) = \frac{5}{8}$

$P(\text{हिट नहीं है}) = \frac{3}{8}$

$$\text{प्रायिकता} = {}^{10}C_2\left(\frac{5}{8}\right)^2\left(\frac{3}{8}\right)^8$$

$$= \frac{10\times9}{2\times1}\times\frac{5^2}{8^2}\times\frac{3^8}{8^8} = \frac{1125\times3^8}{8^{10}}$$

Ex. एक शब्द में 9 अक्षर होते हैं; 5 व्यंजन और 4 स्वर। यादृच्छिक रूप से तीन अक्षर चुने जाते हैं। एक से अधिक स्वर चुने जाने की प्रायिकता क्या है?

HINTS $\text{एक से अधिक स्वर की प्रायिकता} = \frac{^4C_2\times{}^5C_1+{}^4C_3}{^9C_3} = \frac{17}{42}$

वैकल्पिक विधि

P(एक से अधिक स्वर) = 1 – P (कोई स्वर नही) – P (एक स्वर)

$$= 1 - \frac{^5C_3}{^9C_3} - \frac{^5C_2\times{}^4C_1}{^9C_3}$$

$$= 1 - \frac{5}{42} - \frac{10}{21} = \frac{17}{42}$$

Ex. एक लीप वर्ष में निम्न परिणाम प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए:

(i) कम से कम 52 रविवार

(ii) केवल 52 रविवार

(iii) केवल 53 रविवार

HINTS लीप वर्ष = 366 दिन = 52 सप्ताह + 2 दिन

शेष 2 दिन = MT, TW, WTH, ThF, FS, SS, SM = 7 (तरीका) हो सकते हैं।

(i) चूँकि लीप वर्ष में 52 सप्ताह होते हैं, इसलिए

P(कम से कम 52 रविवार) = 1

(ii) ठीक 52 रविवारों के लिए, शेष 2 दिन = MT, TW, WTH, ThF, FS = 5

$P(\text{ठीक 52 रविवार}) = \frac{5}{7}$

(iii) ठीक 53 रविवारों के लिए, शेष 2 दिन = SS, SM = 2

$P(\text{ठीक 53 रविवार}) = \frac{2}{7}$

Selected है Selection दिलाएंगे

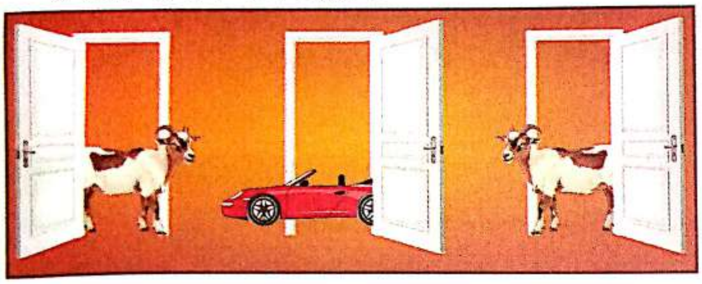
@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

मोंटी हॉल की समस्याएं

मोंटी हॉल समस्या एक संभाव्यता पहेली है जो मोंटी हॉल द्वारा होस्ट किए जाने वाले अमेरिकी गेम शो "Let's Make a Deal", पर आधारित है। हालांकि यह समस्या मूल रूप से स्टीव सेल्विन द्वारा 1975 में अमेरिकी सांख्यिकीविद् को लिखे एक पत्र में प्रस्तुत की गई थी, लेकिन 1990 में परेड पत्रिका में मैरिलिन वोस सावंत के "Ask Marilyn" कॉलम में प्रस्तुत किए जाने पर इसने व्यापक ध्यान आकर्षित किया। डेटा साइंस डिस्कवरी के अनुसार, इस समस्या का नाम शो के होस्ट, मोंटी हॉल के नाम पर रखा गया है, क्योंकि यह शो के प्रारूप से जुड़ा है।



Ex. मोंटी हॉल गेम में होस्ट चुन्नीलाल आपके सामने 3 दरवाजे रखता है। एक के पीछे कार है और दो अन्य दरवाजों के पीछे बकरियाँ है। आपके एक दरवाजा के चुनाव के बाद होस्ट चुन्नीलाल (जिसको पता है कि किस दरवाजे के पीछे क्या है।) ने एक अन्य बकरी वाला दरवाजा खोल दिया है। तो अगर आप दरवाजा बदलते हो तो कार जितने की संभावना क्या है?

HINTS $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ (x) $\frac{1}{3}$ ← $\frac{2}{3}$ →

यदि आप दरवाजा बदलते हैं तो कार जीतने की संभावना $= \frac{2}{3}$

Ex. आपके पास 5 दरवाजे हैं, एक के पीछे कार है, बाकी के पीछे बकरियाँ हैं। आप एक दरवाजा चुनते है, मिश्रा जी जो जानते है कि हर दरवाजे के पीछे क्या है- दो बकरियाँ वाले दरवाजे खोलते है। जब आप अपना दरवाजा बदलते है तो जीतने की संभावना $\frac{x}{y}$ है। $x \times y$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $\frac{1}{5}$ | x x ← $\frac{4}{5}$ →

यदि आप दरवाजा बदलते हैं तो कार जीतने की संभावना $= \frac{4}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{5} = \frac{x}{y}$

$\Rightarrow x \times y = 10$

Ex. मोंटी हॉल गेम में 100 बॉक्स हैं। एक बॉक्स में SSC Maths की किताब है और बाकी खाली है। आदित्य सर ने अपने एक छात्र से किताब वाला बॉक्स चुनने को बोला तथा छात्र ने 14 नंबर वाला बॉक्स चुना। बाद में आदित्य सर ने 98 बॉक्स खोल दिए अब सिर्फ बॉक्स नम्बर 14 और बॉक्स नम्बर 81 बंद हैं। Book अब उन्ही दो डब्बों में से किसी एक में है। तो यदि आप बॉक्स बदलते है तो किताब जीतने की संभावना है।

HINTS □□.....□□□□ ..... □ ..... □ □
14No. Box ... 81No. Box ... Box No.99 ... Box No.100

यदि आप बॉक्स नंबर 81 का चयन करते हैं तो पुस्तक जीतने की संभावना 99% है।

Ex. आपको 20 डिब्बे दिए गए हैं, जिनमें से एक में सोने का सिक्का है। आप डिब्बा 6 चुनें। मेजबान एक-एक करके एक डिब्बा खोलता है, सभी खाली, जब तक कि केवल 3 डिब्बे न रह जाएँ: डिब्बा 6 डिब्बा 11 और डिब्बा 15। अब आप बाकी दो डिब्बों में से किसी एक में जा सकते हैं। अगर आप डिब्बा बदलते हैं, तो आपके जीतने का अनुकूल संयोगानुपात क्या है?

HINTS □(×) ...... 6 ($\frac{1}{20}$) ...... 11 ...... 15 ...... □(×)

यदि आप डिब्बा बदलते हैं तो, प्रायिकता $P(E) = \frac{19}{20} \times \frac{1}{2} = \frac{19}{40}$

$P(E') = 1 - \frac{19}{40} = \frac{21}{40}$

जीतने का अनुकूल संयोगानुपात $= \frac{P(E)}{P(E')} = \frac{\frac{19}{40}}{\frac{21}{40}} = \frac{19}{21}$

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

अध्याय 32

सांख्यिकी

सांख्यिकी:- आंकड़ों को एकत्रित करना, उनका विश्लेषण करना, उनकी व्याख्या करना, उन्हें प्रस्तुत करना और उन्हें व्यवस्थित करने के अध्ययन को सांख्यिकी कहा जाता है।

आवृत्ति:- किसी विशेष वर्ग में आने वाले प्रेक्षणों की संख्या को उस वर्ग की आवृत्ति कहते हैं।

आवृत्ति वितरण (बारंबारता बंटन) :- विभिन्न वर्गों में आवृत्ति के वितरण को आवृत्ति वितरण के रूप में जाना जाता है।

संचयी आवृत्ति:- किसी विशेष वर्ग की संचयी आवृत्ति उस वर्ग और उससे पहले के वर्गों की आवृत्ति का योग होती है।

माध्य

दिए गए आँकड़ों का माध्य सभी प्रेक्षणों के योग को प्रेक्षणों की कुल संख्या से विभाजित करने पर प्राप्त होता है।

$$\text{माध्य} = \frac{\text{सभी प्रेक्षणों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की संख्या}}$$

यदि $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ एक चर x के n मान हैं, तो इन मानों का अंकगणितीय माध्य या साधारण माध्य (उच्चारण x बार) द्वारा दर्शाया जाता है और इसे इस प्रकार परिभाषित किया जाता है:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ...x_n}{n} \text{ or } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Ex. एक क्रिकेटर के पांच एकदिवसीय मैचों में स्कोर इस प्रकार हैं: 12, 34, 45, 50, 24. माध्य ज्ञात कीजिए।

HINTS $\text{माध्य} = \frac{\text{सभी प्रेक्षणों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की संख्या}}$

$$= \frac{12+34+45+50+24}{5} = \frac{165}{5} = 33$$

Ex. निम्नलिखित आंकड़ों का माध्य ________ है।

23, 17, 20, 19, 21

HINTS $\bar{x} = \frac{23+17+20+19+21}{5} = \frac{100}{5} = 20$

वैकल्पिक विधि

माना दिए गए आँकड़ों का माध्य = 20

23, 17, 20, 19, 21

विचलन → +3, -3, 0, -1, +1

यहाँ, शुद्ध विचलन = 3 − 3 + 0 − 1 + 1 = 0 ⇒ माध्य = 20

Ex. यदि छह प्रेक्षणों 5, 7, 9, α, 11 और 12 का माध्य 9 है तो α का मान क्या है?

HINTS $\bar{x} = \frac{5+7+9+\alpha+11+12}{6} = \frac{44+\alpha}{6} = 9$

$\Rightarrow 44 + \alpha = 54 \Rightarrow \alpha = 10$

वैकल्पिक विधि

माना दिए गए आंकड़ों का माध्य = 9

5, 7, 9, α, 11 12

विचलन → -4, -2, 0, +x, +2, +3

$\Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \alpha = 9 + x = 9 + 1 = 10$

असतत आवृत्ति वितरण के लिए

यदि x के मान $x_1, x_2, x_3.........x_n$ हैं तथा संगत आवृत्तियाँ क्रमशः $f_1, f_2, f_3, ..., f_n$ हैं, तो इन मानों का समांतर माध्य निम्न प्रकार दिया जाता है:

$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + ...f_nx_n}{f_1 + f_2 + f_3 + ...f_n}$$

या $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{N}$ जहाँ $N = \sum_{i=1}^{n} f_i = f_1 + f_2 + f_3 + ...f_n$

Ex. निम्नलिखित वितरण का माध्य ज्ञात कीजिए:

(x)	4	6	9	10	15
(f)	5	10	10	7	8

HINTS

f	x	fx
5	4	20
10	6	60
10	9	90
7	10	70
8	15	120
Σf = 40		Σfx = 360

$$\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} = \frac{360}{40} = 9$$

वैकल्पिक विधि

माना दिए गए आंकड़ों का माध्य = 9

f	x	विचलन d = x − A	f × d
5	4	−5	−25
10	6	−3	−30
10	9 = A	0	0
7	10	+1	+7
8	15	+6	+48
Σf = 40			Σfd = 0

∴ माध्य = 9

Ex. यदि निम्नलिखित वितरण का माध्य 6 है, तो p का मान ज्ञात कीजिए।

(x)	2	4	6	10	p+5
(f)	3	2	3	1	2

HINTS

f	x	fx
3	2	6
2	4	8
3	6	18
1	10	10
2	p + 5	2p + 10
Σf = 11		Σfx = 52+2p

$$\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} \Rightarrow \frac{52+2p}{11} = 6 \Rightarrow 52 + 2p = 66$$

$\Rightarrow 2p = 14 \Rightarrow p = 7$

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. यदि निम्नलिखित आँकड़ों का माध्य 15 है, तो k का मान ज्ञात कीजिए।

(x)	5	10	15	20	25
(f)	6	k	6	10	5

HINTS

f	x	fx
6	5	30
k	10	10k
6	15	90
10	20	200
5	25	125
Σf = 27+k		Σfx = 445+10k

$\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} \Rightarrow \frac{445+10k}{27+k} = 15$

$\Rightarrow 445 + 10k = 405 + 15k \Rightarrow 5k = 40 \Rightarrow k = 8$

एक सतत आवृत्ति वितरण का माध्य

Ex. निम्नलिखित आवृत्ति वितरण का माध्य ज्ञात कीजिए:

वर्ग अंतराल	0.–10	10–20	20–30	30–40	40–50
श्रमिकों की संख्या(f)	7	10	15	8	10

HINTS

श्रमिकों की संख्या (f)	वर्ग अंतराल	x	fx
7	0–10	5	35
10	10–20	15	150
15	20–30	25	375
8	30–40	35	280
10	40–50	45	450
f = 50			Σ f x =1290

$\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} = \frac{1290}{50} = 25.8$

वैकल्पिक विधि

माना, माध्य = 25

श्रमिकों की संख्या (f)	वर्ग अंतराल	x	विचलन d = x– A	f × d
7	0–10	5	–20	–140
10	10–20	15	–10	–100
15	20–30	25 = A	0	0
8	30–40	35	+10	80
10	40–50	45	+20	200
Σf = 50				Σfd=+40

शुद्ध विचलन = $\frac{+40}{50} = +0.8$

∴ माध्य = 25 + 0.8 = 25.8

Ex. निम्नलिखित वितरण का माध्य 26 है, तो k का मान क्या है?

वर्ग	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
आवृति	8	10	k	6	12

HINTS

आवृति (f)	वर्ग अंतराल	x	fx
8	0–10	5	40
10	10–20	15	150
k	20–30	25	25k
6	30–40	35	210
12	40–50	45	540
Σf = 36 + k			Σfx = 940 + 25k

$\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} \Rightarrow \frac{940+25k}{36+k} = 26$

$\Rightarrow 940 + 25k = 936 + 26k \Rightarrow k = 4$

वैकल्पिक विधि

∵ माध्य = 26

आवृति (f)	वर्ग अंतराल	x	विचलन d =x– A	f × d
8	0–10	5	–21	–168
10	10–20	15	–11	–110
k	20–30	25	–1	–k
6	30–40	35	+9	54
12	40–50	45	+19	228
Σf = 36 + k				Σf d = 4 – k

$4 - k = 0 \Rightarrow k = 4$

माध्यिका

आँकड़ों को आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित करने के बाद प्राप्त मध्यतम प्रेक्षण का मान, आँकड़ों का माध्यिका कहलाता है।

Ex. आँकड़ों पर विचार करें: 4, 4, 6, 3, 2. माध्यिका ज्ञात कीजिए

HINTS इस आँकड़ों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करें: 2, 3, 4, 4, 6.

कुल 5 प्रेक्षण हैं।

इस प्रकार, माध्यिका = मध्य मान अर्थात् 4.

माध्यिका कैसे ज्ञात करें

चरण I: प्रेक्षणों x_1, x_2, ... x_n को परिमाण के आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित करें।

चरण II: प्रेक्षणों की कुल संख्या निर्धारित करें, मान लीजिए, n

चरण III: यदि n विषम है, तो माध्यिका प्रेक्षण का मान $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\text{वाँ}}$ है।

- यदि n सम है, तो माध्यिका $\left(\frac{n}{2}\right)^{\text{वाँ}}$ पद और $\left(\frac{n}{2}+1\right)^{\text{वाँ}}$ प्रेक्षणों के मानों का समांतर माध्य है।

@apna_channels

Ex. निम्नलिखित आँकड़ों की माध्यिका ________ होगी।

32, 25,33,27, 35, 29 और 30

HINTS दिए गए आँकड़ों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करें

25, 27, 29, 30, 32, 33, 35

यहाँ, n = 7 जो विषम है

∴ माध्यिका = $\left(\frac{7+1}{2}\right)^{th} = 4^{th}$ प्रेक्षण = 30

Ex. आरोही क्रम में व्यवस्थित प्रेक्षण 15, 16, 18, 22, $x+2$, $x+3$, 26, 27, 30 के एक समूह की माध्यिका 24 है, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS दिए गए प्रेक्षण का समूह है –

15, 16, 18, 22, $x+2$, $x+3$, 26, 27, 30

अतः, n = 9

∴ माध्यिका = $5^{\text{वाँ}}$ प्रेक्षण = $x+2$

प्रश्नानुसार, $x + 2 = 24 \Rightarrow x = 22$

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. प्रेक्षण की माध्यिका $k-\frac{3}{2}, k+2, k-1, k+4, k+\frac{1}{2}, k-3, k+4\frac{1}{2}$ है _____.

HINTS $k-\frac{3}{2}, k+2, k-1, k+4, k+\frac{1}{2}, k-3, k+4\frac{1}{2}$

रखने पर k = 0

– 1.5, 2, – 1, 4, 0.5, –3, 4.5

आरोही क्रम = –3, –1.5, –1, 0.5, 2, 4, 4.5

$\Rightarrow n = 7$

$\therefore$ माध्यिका = 4^{th} प्रेक्षण = $0.5 = \frac{1}{2} + k$

Ex. कुछ छात्रों की आयु 12, 13, 16, 18, 14, 19, 13, 17, 15 और 11 वर्षों में दी गई है। छात्रों की माध्यिका आयु (वर्षों में) है:

HINTS आरोही क्रम = 11, 12, 13, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19

n = 10 जो सम है

माध्यिका $= \frac{5^{वाँ} + 6^{वाँ}}{2} = \frac{14+15}{2} = 14.5$

असतत आवृत्ति वितरण का माध्यिका

चरण I: संचयी आवृत्तियाँ ज्ञात करें (c.f.)

चरण II: $\frac{N}{2}$ ज्ञात करें, जहाँ $N = \sum_{i=1}^{n} f_i$

चरण III: उस संचयी बारंबारता (c.f.) को देखें जो $\frac{N}{2}$ से ठीक अधिक हो और उस चर का संगत मान निर्धारित करें।

चरण IV: चरण III में प्राप्त मान माध्यिका है।

Ex. निम्नलिखित आवृत्ति वितरण के लिए माध्यिका ज्ञात कीजिए:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f	8	10	11	16	20	25	15	9	6

HINTS

x	f	cf
1	8	8
2	10	8 + 10 = 18
3	11	18 + 11 = 29
4	16	29 + 16 = 45
5	**20**	**45 + 20 = 65**
6	25	65 + 25 = 90
7	15	90 + 15 = 105
8	9	105 + 9 = 114
9	6	114 + 6 = 120
कुल	Σf = 120 = N	

$\frac{N}{2} = \frac{120}{2} = 60$

संचयी आवृत्ति $\frac{N}{2}$ से थोड़ा अधिक (65) होगा

$\therefore$ माध्यिका = 5

"चर के मानों को आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित करें।"

Ex. निम्नलिखित आवृत्ति वितरण पर विचार करें:

x	8	5	6	10	9	4	7
f	6	4	5	8	9	6	4

वितरण के लिए माध्यिका क्या है?

HINTS माध्यिका ज्ञात करने के लिए हमें 'x' के मानों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करना होगा।

x	आवृत्ति (f)	संचयी आवृत्ति (c.f.)
4	6	6
5	4	6 + 4 = 10
6	5	10 + 5 = 15
7	4	15 + 4 = 19
8	6	19 + 6 = 25
9	9	25 + 9 = 34
10	8	34 + 8 = 42
कुल	Σf = 42 = N	

यहाँ, $\frac{N}{2} = \frac{42}{2} = 21$

संचयी आवृत्ति $\frac{N}{2}$ से थोड़ा अधिक (25) होगा

$\therefore$ माध्यिका = 8

एक सतत आवृत्ति वितरण का माध्यिका

चरण I: संचयी आवृत्ति तालिका तैयार करें

चरण II: माध्यिका वर्ग ज्ञात करें, अर्थात वह वर्ग जिसकी संचयी आवृत्ति बराबर या उससे थोड़ी अधिक $\left(\frac{N}{2}\right)$ हो

चरण III: माध्यिका मान सूत्र द्वारा दिया गया है

$$\text{माध्यिका} = l + \left(\frac{\left(\frac{N}{2}\right) - cf^{-}}{f}\right) \times h$$

जहाँ,

l = माध्यिका वर्ग की निचली सीमा

N = कुल आवृत्ति

f = माध्यिका वर्ग की आवृत्ति

h = माध्यिका वर्ग की चौड़ाई

cf^{-} = माध्यिका वर्ग से पहले वाले वर्ग की संचयी आवृत्ति

आइए, सतत् आँकड़ों का माध्यिका निकालने का एक उदाहरण लें, क्योंकि यही वह स्थिति है जहाँ कभी-कभी माध्यिका निकालना चुनौतीपूर्ण होता है।

Ex. निम्नलिखित वितरण के लिए माध्यिका है

मजदूरी (₹)	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
श्रमिकों की संख्या	22	38	46	35	20

HINTS

कक्षा	f	cf
0-10	22	22
10-20	38	60
20-30	46	106
30-40	35	141
40-50	20	161
	N = 161	

यहाँ, $\frac{N}{2} = \frac{161}{2} = 80.5$

$\Rightarrow$ माध्यिका वर्ग 20 – 30 है।

$$\text{माध्यिका} = l + \left(\frac{\left(\frac{N}{2}\right) - cf^{-}}{f}\right) \times h$$

$$= 20 + \left(\frac{80.5 - 60}{46}\right) \times 10 = 24.46$$

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. निम्नलिखित वितरण से माध्यिका की गणना करें:

वर्ग	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45
आवृत्ति	5	6	15	10	5	4	2	2

HINTS

वर्ग	f	cf
5 – 10	5	5
10 – 15	6	11
15 – 20	15	26
20 – 25	10	36
25 – 30	5	41
30 – 35	4	45
35 – 40	2	47
40 – 45	2	49
	N = 49	

यहाँ, $\frac{N}{2} = \frac{49}{2} = 24.5$

⇒ माध्यिका वर्ग = 15 – 20

माध्यिका $= l + \left(\frac{\frac{N}{2} - cf^{-}}{f}\right) \times h$

$= 15 + \left(\frac{\frac{49}{2} - 11}{15}\right) \times 5 = 19.5$

बहुलक

किसी वितरण का बहुलक या बहुलक मान चर का वह मान होता है जिसके लिए आवृत्ति अधिकतम होती है।

Ex. निम्नलिखित आँकड़ों का बहुलक क्या होगा?

13, 15, 31, 12, 27, 13, 27, 30, 27, 28 और 16

HINTS बहुलक = 27 (क्योंकि 27 अधिकतम बार आता है)

Ex. दिए गए डेटा का बहुलक क्या है?

5, 7, 9, 7, 3, 7, 5, 7, 8, 6, 7

HINTS बहुलक = 7 (क्योंकि 7 अधिकतम बार आता है)

सतत आवृत्ति वितरण के लिए बहुलक की गणना

सतत आवृत्ति वितरण में बहुलक की गणना निम्नलिखित सूत्र द्वारा की जाती है

बहुलक $(M_0) = l + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i$

l = वर्ग की निचली सीमा

f_1 = बहुलक वर्ग की आवृत्ति

f_0 = बहुलक वर्ग से ठीक पहले वाले वर्ग की आवृत्ति

f_2 = बहुलक वर्ग के ठीक बाद वाले वर्ग की आवृत्ति

i = बहुलक वर्ग की वर्ग चौड़ाई

Ex. वर्ग अंतराल और उनकी संबंधित आवृत्तियों के साथ आवृत्ति वितरण तालिका के रूप में प्रस्तुत आंकड़े के एक सेट का बहुलक 48.5 था। बहुलक वर्ग की निचली सीमा 46.5 थी; बहुलक वर्ग की आवृत्ति 34 थी; बहुलक वर्ग से ठीक पहले अंतराल की आवृत्ति 32 थी और बहुलक वर्ग के ठीक बाद वाले वर्ग अंतराल की आवृत्ति 25 थी। बहुलक वर्ग की चौड़ाई क्या थी?

HINTS दिया है,

$M_0 = 48.5,\ l = 46.5,\ f_1 = 34,\ f_0 = 32,\ f_2 = 25$

बहुलक $(M_0) = l + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i$

$\Rightarrow 48.5 = 46.5 + \frac{34 - 32}{2 \times 34 - 32 - 25} \times i$

$\Rightarrow i = \frac{2 \times 11}{2} = 11$

Ex. नीचे विभिन्न बच्चों की आयु के आँकड़े दिए गए हैं। आयु के माध्य और बहुलक में क्या अंतर है?

आयु (वर्ष) (X)	9	12	5	8	7	6
बच्चों की संख्या (F)	1	6	9	7	4	3

HINTS

आयु (वर्ष) (X)	बच्चों की संख्या (F)	X × F
9	1	9
12	6	72
5	9	45
8	7	56
7	4	28
6	3	18
	ΣF = 30	ΣFX=228

माध्य $= \frac{228}{30} = 7.6$

और बहुलक = 5 (∵ 5 की आवृत्ति अधिकतम है)

माध्य और बहुलक के बीच अंतर = 7.6 – 5 = 2.6

Ex. निम्नलिखित समूहीकृत आवृत्ति वितरण के लिए बहुलक ज्ञात कीजिए:

वर्ग	3–6	6–9	9–12	12–15	15–18	18–21	21–24
आवृत्ति	2	5	10	23	21	12	3

HINTS अधिकतम आवृत्ति वर्ग (23) = 12 – 15

$f_1 = 23,\ f_0 = 10\ \&\ f_2 = 21$

$l = 12\ \&\ i = 3$

बहुलक $(M_0) = l + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i$

$= 12 + \left(\frac{23 - 10}{46 - 10 - 21}\right) \times 3 = 12 + \frac{13 \times 3}{15} = 14.6$

@apna_channels

माध्य, माध्यिका और बहुलक के बीच संबंध

बहुलक के लिए (Emperical formula):-

बहुलक = 3(माध्यिका) –2 (माध्य)

Ex. एक नमूना डेटा का माध्य = 60 और माध्यिका = 48. इस वितरण का बहुलक ज्ञात कीजिए।

HINTS बहुलक = 3 × 48 – 2 × 60 = 144 – 120 = 24

परास (रेंज)

सबसे बड़े और सबसे छोटे संख्याओं के बीच का अंतर परास कहलाता है।

परास/ परिसर कैसे ज्ञात करें:

(i) संख्याओं को बढ़ते क्रम में व्यवस्थित करें।

(ii) सबसे बड़े मान से सबसे कम मान घटाएं.

परास/ परिसर = सबसे बड़ा मान – सबसे छोटा मान

Ex. 12, 22, 7, 1, 5, 27, 30, 43 का परिसर ज्ञात कीजिए।

HINTS परिसर = 43 – 1 = 42

☞ परिसर का गुणांक $= \frac{\text{उच्चतम मान} - \text{न्यूनतम मान}}{\text{उच्चतम मान} + \text{न्यूनतम मान}}$

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

प्रसरण/ विचरण

प्रसरण सांख्यिकी में परिवर्तनशीलता का एक माप है। यह आँकड़ों के मानों और माध्य के बीच औसत वर्ग अंतर का आकलन करता है। इसे सिग्मा (σ^2) द्वारा दर्शाया जाता है।

विचरण और मानक विचलन की गणना कैसे करें?

चरण I – सरल माध्य $\bar{x}$ की गणना करें।

चरण II – डेटा सेट में प्रत्येक मान के लिए $(x_i - \bar{x})$ के अंतर की गणना करें।

चरण III – डेटा सेट में प्रत्येक मान के लिए वर्ग अंतर $(x_i - \bar{x})$ की गणना करें।

चरण IV – वर्ग किए गए अंतरों का योग $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

चरण V – वर्ग किए गए अंतरों के योग को n से विभाजित करें

$$\text{प्रसरण } (\sigma^2) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}$$

Ex. सात प्रेक्षणों 6, 7, 10, 12, 13, 8, 14 का प्रसरण है:

HINTS $\bar{x} = \frac{6+7+10+12+13+8+14}{7} = \frac{70}{7} = 10$

$$\text{प्रसरण} = \frac{(-4)^2+(-3)^2+0^2+(2)^2+(3)^2+(-2)^2+(4)^2}{7}$$

$$= \frac{16+9+0+4+9+4+16}{7} = \frac{58}{7} = 8.29$$

> यदि हम दी गई संख्याओं में जोड़/घटाएँ तो विचरण में कोई परिवर्तन नहीं होगा और यदि हम दी गई संख्याओं में z से गुणा करें तो विचरण z^2 गुना हो जाएगा।

Ex. यदि 10 प्रेक्षणों का प्रसरण 6 है और प्रत्येक प्रेक्षण को 3 से गुणा किया जाता है तो नया प्रसरण होगा:

HINTS $\sigma^2 = 6$

नया प्रसरण = $3^2 \times 6 = 54$

Ex. 10 प्रेक्षणों का माध्य और प्रसरण क्रमशः 10 और 4 है। पुनः जाँच करने पर पाया गया कि प्रेक्षण 8 गलत था। यदि इसे 18 से प्रतिस्थापित किया जाए, तो सही प्रसरण है:

HINTS $\bar{x}_{(\text{पुराना})} = 10 \Rightarrow \frac{\sum x_i}{10} = 10 \Rightarrow \sum x_{i(\text{पुराना})} = 100$

$\sum x_{i(\text{नया})} = 100 - 8 + 18 = 110 \Rightarrow \bar{x}_{(\text{नया})} = \frac{110}{10} = 11$

$\text{Var}_{(\text{पुराना})} = 4 \Rightarrow \frac{\sum x^2_{i(\text{पुराना})}}{10} - (\bar{x}_{(\text{पुराना})})^2 = 4 \Rightarrow \sum x^2_{i(\text{पुराना})} = 1040$

$\sum x^2_{i(\text{नया})} = 1040 - 64 + 324 = 1300$

$\text{Var}_{(\text{नया})} = \frac{1300}{10} - (11)^2 = 130 - 121 = 9$

क्या आप जानते हैं?

- पहली n प्राकृतिक संख्या का प्रसरण = $\frac{(n^2-1)}{12}$
- प्रथम n सम/विषम प्राकृतिक संख्या का प्रसरण = $\frac{n^2-1}{3}$
- यदि प्रेक्षण AP में हैं तो विचरण = $\left(\frac{n^2-1}{12}\right) \times d^2$

जहाँ n = प्रेक्षणों की संख्या, d = अंतर

Ex. प्रथम 50 सम संख्याओं का विचरण है

HINTS विचरण = $\frac{50^2-1}{3} = 833$

Ex. यदि पहली n प्राकृतिक संख्या का प्रसरण 10 है और पहली 'm' सम प्राकृतिक संख्या का प्रसरण 16 है, तो m + n बराबर है ______।

HINTS $\frac{n^2-1}{12} = 10 \Rightarrow n = 11$

$\frac{m^2-1}{3} = 16 \Rightarrow m = 7 \Rightarrow m + n = 7 + 11 = 18$

मानक विचलन

यदि σ^2 विचरण है, तो σ को मानक विचलन कहा जाता है।

मानक विचलन (σ) = $\sqrt{\text{प्रसरण}}$

Ex. निम्नलिखित डेटा के लिए मानक विचलन की गणना करें।

3, 4, 5, 6, 7

HINTS माध्य $(\bar{x}) = \frac{3+4+5+6+7}{5} = 5$

$$\text{प्रसरण} = \frac{(-2)^2+(-1)^2+0^2+1^2+2^2}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

मानक विचलन = $\sqrt{2}$

> यदि हम दी गई संख्याओं को z से गुणा करें तो मानक विचलन z गुना हो जाएगा।

- माध्य विचलन = $\frac{4}{5}$ मानक विचलन

Ex. 12 मानों का मानक विचलन 3 है। यदि प्रत्येक मान में 4 की वृद्धि की जाए, तो मानों के नए समूह का प्रसरण ज्ञात कीजिए।

HINTS मानक विचलन = 3 ⇒ प्रसरण = $3^2 = 9$ ⇒ नया प्रसरण = 9

Ex. 100 प्रेक्षणों का माध्य 50 है और उनका मानक विचलन 5 है। सभी प्रेक्षणों के वर्गों का योग है।

HINTS दिया गया, $\sigma = 5$, $\bar{x} = 50$, $n = 100$

हम जानते हैं कि

मानक विचलन (σ) = $\sqrt{\text{प्रसरण}}$ ⇒ (मानक विचलन)² = प्रसरण

$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{\sum x^2}{n} - (\bar{x})^2 \Rightarrow 5^2 = \frac{\sum x^2}{100} - (50)^2$

$\Rightarrow 25 = \frac{\sum x^2}{100} - (50)^2 \Rightarrow \sum x^2 = 252500$

इस प्रकार सभी प्रेक्षणों के वर्गों का योग 252500 है।

Ex. एक छात्र ने पाँच परीक्षाओं में क्रमशः 45, 54, 41, 57, 43 अंक प्राप्त किए। छठी परीक्षा के लिए उसके अंक ज्ञात नहीं हैं। यदि छह परीक्षाओं में माध्य अंक 48 हैं, तो छह परीक्षाओं में अंकों का मानक विचलन क्या होगा?

HINTS माना अज्ञात स्कोर x है।

माध्य अंक = 48

$\therefore \bar{x} = \frac{41+45+54+57+43+x}{6} \Rightarrow 48 = \frac{x+240}{6}$

$\Rightarrow x + 240 = 288 \Rightarrow x = 48$

अब, $\sigma^2 = \frac{1}{6}[(48-41)^2 + (48-45)^2 + (48-54)^2 + (48-57)^2 + (48-43)^2 + (48-48)^2]$

$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{1}{6}(49 + 9 + 36 + 81 + 25) = \frac{200}{6} = \frac{100}{3}$

$\Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{100}{3}} = \frac{10}{\sqrt{3}}$

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

माध्य विचलन क्या है?

किसी दिए गए मानक वितरण का माध्य विचलन, केंद्रीय प्रवृत्ति से विचलन का औसत होता है। केंद्रीय प्रवृत्ति की गणना आँकड़ों के समांतर माध्य, माध्यिका या बहुलक का उपयोग करके की जा सकती है। इसका उपयोग यह दर्शाने के लिए किया जाता है कि प्रेक्षण आँकड़ों के केंद्रीय बिंदु से कितनी दूरी पर स्थित हैं (केंद्रीय बिंदु माध्य, माध्यिका या बहुलक हो सकता है)।

माध्य के सापेक्ष में माध्य विचलन

माध्य के बारे में माध्य विचलन को एक सांख्यिकीय माप के रूप में परिभाषित किया जाता है जिसका उपयोग दिए गए डेटा सेट के माध्य मान से औसत विचलन की गणना करने के लिए किया जाता है।

असमूहित आँकड़ों का माध्य विचलन = $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}|X_i - \text{माध्य}|}{n}$

माध्य विचलन का गुणांक = $\dfrac{\text{माध्य विचलन}}{\overline{X}}$; जहाँ $\overline{X}$ माध्य है

नीचे दी गई प्रक्रिया का उपयोग करके डेटा मानों के माध्य विचलन की गणना आसानी से की जा सकती है।

चरण I: दिए गए आंकड़े मानों के लिए माध्य मान ज्ञात करें

चरण II: अब, दिए गए प्रत्येक आंकड़े मान से माध्य मान घटाएँ (नोट: ऋण चिह्न को अनदेखा करें)

चरण III: अब, चरण II में प्राप्त मानों का माध्य ज्ञात कीजिए।

Ex. डेटा मान 5, 3, 7, 8, 4, 9 के लिए औसत विचलन निर्धारित करें।

HINTS ∵ माध्य $(\overline{x}) = \dfrac{5+3+7+8+4+9}{6} = 6$

माध्य विचलन = $\dfrac{|-1|+|-3|+1+2+|-2|+3}{6}$

$= \dfrac{1+3+1+2+2+3}{6} = \dfrac{12}{6} = 2$

Ex. प्रथम 10 सम प्राकृतिक संख्याओं का माध्य विचलन क्या है?

HINTS संख्या = 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20

$(\overline{x}) = \dfrac{2+20}{2} = 11$

माध्य विचलन = $\dfrac{9+7+5+3+1+1+3+5+7+9}{10} = \dfrac{50}{10} = 5$

Ex. निम्नलिखित आंकड़े के लिए माध्य विचलन गुणांक ज्ञात कीजिए:

3, 8, 7, 6, 5, 1

HINTS $(\overline{x}) = \dfrac{3+8+7+6+5+1}{6} = 5$

माध्य विचलन = $\dfrac{2+3+2+1+0+4}{6} = \dfrac{12}{6} = 2$

माध्य विचलन का गुणांक = $\dfrac{2}{5} = 0.4$

Ex. निम्नलिखित आवृत्ति वितरण के लिए माध्य से माध्य विचलन की गणना करें:

चर (x)	10	30	50	70	90
बारंबारता (f)	4	24	28	16	8

HINTS आइए, दिए गए आँकड़ों की सारणी बनाएँ और गणनाओं के बाद अन्य स्तंभ जोड़ें।

x_i	f_i	$x_i f_i$	$\|x_i - \overline{x}\|$	$f_i\|x_i - \overline{x}\|$
10	4	40	40	160
30	24	720	20	480
50	28	1400	0	0
70	16	1120	20	320
90	8	720	40	320
योग	80	4000		1280

माना = 50

गणना किए गए डेटा का योग N = $\sum_{i=1}^{5} f_i = 80$,

$\sum_{i=1}^{5} f_i x_i = 4000 \Rightarrow \overline{x} = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{5} f_i x_i = \dfrac{1}{80}\times 4000 = 50$

माध्य से विचलन के निरपेक्ष मान, अर्थात् $|x_i - \overline{x}|$, जैसा कि तालिका में दिखाया गया है

सारणी से, $\sum_{i=1}^{5} f_i |x_i - \overline{x}| = 1280$

∴ माध्य विचलन $(\overline{x}) = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{5}|x_i - \overline{x}| = \left(\dfrac{1}{80}\right) \times 1280 = 16$

माध्यिका के सापेक्ष में माध्य विचलन

माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन को एक सांख्यिकीय माप के रूप में परिभाषित किया जाता है जिसका उपयोग दिए गए आंकड़ें के माध्यिका मान से औसत विचलन की गणना करने के लिए किया जाता है।

अवर्गीकृत आंकड़े माध्य विचलन = $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}|X_i - \text{माध्यिका}|}{n}$

माध्य विचलन का गुणांक = $\dfrac{\text{मानक विचलन}}{\text{माध्यिका}}$

नीचे दी गई प्रक्रिया का उपयोग करके आंकड़ों के औसत विचलन की गणना आसानी से की जा सकती है।

चरण I: दिए गए आंकड़ों के लिए माध्यिका ज्ञात करें

चरण II: अब, दिए गए प्रत्येक आंकड़ों से माध्यिका घटाएँ (नोट: ऋण चिह्न को अनदेखा करें)

चरण III: अब, चरण I में प्राप्त मानों का माध्य ज्ञात कीजिए।

@apna_channels

Ex. दिए गए डेटा के लिए माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन:

52, 56, 66, 70, 75, 80, 82

HINTS यहाँ n = 7 है, जो विषम है।

माध्यिका = चौथा अवलोकन = 70

माध्य विचलन = $\dfrac{18+14+4+0+5+10+12}{7} = \dfrac{63}{7} = 9$

Ex. निम्नलिखित श्रृंखला के लिए माध्यिका से माध्य विचलन गुणांक की गणना करें।

3, 7, 12, 14, 15, 18, 22

HINTS यहाँ n = 7 है, जो विषम है।

माध्यिका = चौथा प्रेक्षण = 14

माध्य विचलन = $\dfrac{11+7+2+0+1+4+8}{7} = \dfrac{33}{7}$

गुणांक = $\dfrac{\text{मानक विचलन}}{\text{माध्यिका}} = \dfrac{\frac{33}{7}}{14} = \dfrac{33}{98} = 0.336$

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

"माध्य विचलन माध्यिका के सापेक्ष न्यूनतम होता है"IW

Ex. निम्नलिखित डेटा से माध्य विचलन की न्यूनतम संभव संख्या ज्ञात कीजिए

वर्ग अंतराल	0-6	6-12	12-18	18-24	24-30
बारंबारता	4	5	3	6	2

HINTS

वर्ग अंतराल	f_i	x_i	cf	$d_i = \|x_i - \overline{m}_d\|$	$f_i d_i$
0 - 6	4	3	4	11	44
6 - 12	5	9	9	5	25
12- 18	3	15	12	1	3
18- 24	6	21	18	7	42
24 - 30	2	27	20	13	26
कुल	N=20				$\sum f_i d_i = 140$

$\because \frac{N}{2} = \frac{20}{2} = 10 \Rightarrow$ अतः, माध्यिका वर्ग (12 – 18) है

$$\text{माध्यिका} = l + \left(\frac{\frac{N}{2} - C.f'}{f}\right) \times h = 12 + \left(\frac{10-9}{3}\right) \times 6$$

$$= 12 + \frac{6}{3}(10-9) = 14 \Rightarrow \text{माध्यिका} = \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} = \frac{140}{20} = 7$$

बहुलक के सापेक्ष में माध्य विचलन

बहुलक के सापेक्ष में माध्य विचलन को एक सांख्यिकीय माप के रूप में परिभाषित किया जाता है, जिसका उपयोग दिए गए आँकड़ा समूह के बहुलक मान से माध्य विचलन की गणना करने के लिए किया जाता है।

$$\text{अवर्गीकृत आंकड़े का माध्य विचलन} = \frac{\sum_1^n |X_i - \text{बहुलक}|}{n}$$

$$\text{माध्य विचलन का गुणांक} = \frac{\text{मानक विचलन}}{\text{बहुलक}}$$

आंकड़े मानों का माध्य विचलन नीचे दिए गए विधि से आसानी से गणना किया जा सकता है।

चरण I: दिए गए आंकड़े मानों के लिए बहुलक ज्ञात कीजिए

चरण II: अब, दिए गए प्रत्येक आंकड़े मान से बहुलक घटाएँ (नोट: ऋण चिह्न को अनदेखा करें)

चरण III: अब, चरण 2 में प्राप्त मानों का माध्य ज्ञात कीजिए।

Ex. दिए गए डेटा के लिए बहुलक के बारे में औसत विचलन:

7, 4, 10, 9, 15, 12, 7, 9, 7

HINTS दिए गए आंकड़ों के अनुसार,

7, 4, 10, 9, 15, 12, 7, 9, 7

बहुलक (M) = 7

x_i	7	4	10	9	15	12	7	9	7	23
$\Sigma\|x_i - M\|$	0	3	3	2	8	5	0	2	0	

$$\text{माध्य विचलन} = \frac{23}{9} = 2.56$$

विचरण/प्रसरण गुणांक

यह मानक विचलन को माध्य के अनुपात, आमतौर पर प्रतिशत के रूप में व्यक्त करके परिवर्तनशीलता का वर्णन करता है।

प्रतिशत के रूप में इसका सूत्र है

$$\text{विचरण गुणांक} = \frac{\text{मानक विचलन}}{\text{माध्य}} \times 100$$

Ex. यदि माध्य 25 है और मानक विचलन 5 है तो विचरण गुणांक है:

HINTS $\text{विचरण गुणांक} = \frac{\text{मानक विचलन}}{\text{माध्य}} \times 100$

$$= \frac{5}{25} \times 100 = 20\%$$

Ex. यदि संख्याओं के एक समूह का मानक विचलन 3 है और इन संख्याओं का समांतर माध्य 6 है, तो इन संख्याओं का विचरण गुणांक क्या है?

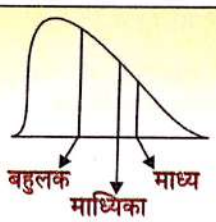
HINTS $\text{विचरण गुणांक} = \frac{\text{मानक विचलन}}{\text{माध्य}} \times 100$

$$= \frac{3}{6} \times 100 = 50\%$$

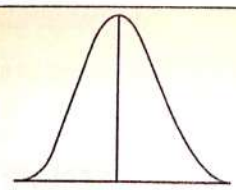
@apna_channels

कार्ल पियर्सन का विषमता/ तिरछापन गुणांक (SKP)

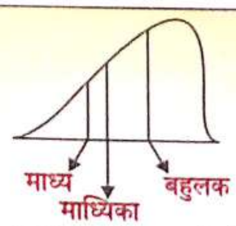
कार्ल पियर्सन का विषमता गुणांक यह मापने का एक मानकीकृत तरीका प्रदान करता है कि कोई वितरण पूर्णतः सममित होने से कितना विचलित होता है। यह सांख्यिकी में डेटा वितरण के आकार को समझने के लिए, विशेष रूप से सतत चरों के साथ व्यवहार करते समय, व्यापक रूप से प्रयुक्त माप है।



- धनात्मक विषमता (दाएँ ओर तिरछापन):
- माध्य > माध्यिका > बहुलक
- दाईं ओर लंबी पूँछ।
- विषमता धनात्मक है



- शून्य विषमता (समरूपता):
- माध्य ≈ माध्यिका ≈ बहुलक
- घंटी के आकार जैसा दिखता है।
- विषमता 0 के निकटतम है



- ऋणात्मक विषमता (बाएँ ओर तिरछापन):
- माध्य < माध्यिका < बहुलक
- बाईं ओर लंबी पूँछ।
- विषमता ऋणात्मक है

- संक्षेप में, कार्ल पियर्सन का विषमता गुणांक किसी वितरण की विषमता को मापता है। इसकी गणना माध्य और माध्यिका के बीच के अंतर के तीन गुना को मानक विचलन से विभाजित करके की जाती है।
- इस गुणांक का मान आमतौर पर -3 और +3 के बीच होता है, जो विषमता की सीमा और दिशा को दर्शाता है।

$$\text{कार्ल पियर्सन का विषमता/ तिरछापन गुणांक (SKP)} = \frac{(\text{माध्य} - \text{बहुलक})}{\text{मानक विचलन}} \quad \text{(जब बहुलक दिया गया हो)}$$

$$\text{कार्ल पियर्सन का विषमता/ तिरछापन गुणांक (SKP)} = \frac{3(\text{माध्य} - \text{माध्यिका})}{\text{मानक विचलन}} \quad \text{(जब बहुलक नहीं दिया गया हो)}$$

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. एक वितरण के लिए, माध्य = 100, बहुलक = 40 और मानक विचलन = 80 है। पियर्सन का विषमता गुणांक ज्ञात कीजिए।

HINTS दिया गया है, माध्य = 100, बहुलक = 40, मानक विचलन = 80

कार्ल पियर्सन का विषमता गुणांक (SKP) $= \frac{(\text{माध्य} - \text{बहुलक})}{\text{मानक विचलन}} = \frac{100-40}{80}$

$= \frac{60}{80} = 0.75$

Ex. यदि माध्य = 75, माध्यिका = 70 और कार्ल पियर्सन का विषमता गुणांक = 0.6 है तो मानक विचलन ज्ञात कीजिए?

HINTS दिया गया है, माध्य = 75, माध्यिका = 70, विषमता = 0.6

कार्ल पियर्सन का विषमता गुणांक (SKP) $= \frac{3(\text{माध्य} - \text{माध्यिका})}{\text{मानक विचलन}}$

$\Rightarrow 0.6 = \frac{3\ (75-70)}{\text{मानक विचलन}} \Rightarrow$ मानक विचलन = 25

Ex. एक आवृत्ति वितरण के लिए माध्य 200 है, विचरण गुणांक 8% है और कार्ल पियर्सन का विषमता गुणांक 0.3 है। वितरण का बहुलक और माध्यिका ज्ञात कीजिए।

HINTS विचरण गुणांक $= \frac{\text{मानक विचलन}}{\text{माध्य}} \times 100$

$\Rightarrow 8\% = \frac{\text{मानक विचलन}}{200} \times 100$

$\Rightarrow$ मानक विचलन = 16

अब,

कार्ल पियर्सन का विषमता गुणांक (SKP) $= \frac{(\text{माध्य} - \text{बहुलक})}{\text{मानक विचलन}}$

$\Rightarrow 0.3 = \frac{200 - \text{बहुलक}}{16}$

$\Rightarrow 4.8 = 200 -$ बहुलक $\Rightarrow$ बहुलक = 195.2

अनुभवजन्य सूत्र (Empirical Formula) का उपयोग करके,

बहुलक = 3 माध्यिका – 2 माध्य

$\Rightarrow 195.2 = 3$ माध्यिका $- 2 \times 200$

$\Rightarrow 595.2 = 3$ माध्यिका $\Rightarrow$ माध्यिका = 198.4

Ex. निम्नलिखित आंकड़े के लिए कार्ल पियर्सन का विषमता गुणांक ज्ञात कीजिए?

12, 6, 2, 6, 3, 4, 4, 4, 5, 15

HINTS

आंकड़े को आरोही क्रम में व्यवस्थित करें

→ 2, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 6, 12, 15

बहुलक = 4

माध्य $(\bar{x}) = \frac{2+3+4+4+4+5+6+6+12+15}{10} = \frac{61}{10} = 6.1$

$\sum x^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 6^2 + 12^2 + 15^2 = 527$

मानक विचलन $= \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - (\bar{x})^2}$

$= \sqrt{\frac{527}{10} - (6.1)^2} = \sqrt{52.7 - 37.21} = \sqrt{15.49} = 3.9$

कार्ल पियर्सन का विषमता गुणांक (SKP) $= \frac{(\text{माध्य} - \text{बहुलक})}{\text{मानक विचलन}}$

$= \frac{6.1-4}{3.9} = \frac{2.1}{3.9} = \frac{7}{13} = 0.53$

∴ कार्ल पियर्सन का विषमता गुणांक (SKP) > 0

तो इससे पता चलता है कि वितरण सकारात्मक रूप से तिरछा या दाईं ओर तिरछा है।

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

अध्याय 33

लघुगणक

लघुगणक

किसी दी गई संख्या को प्राप्त करने के लिए आधार को जिस घातांक या घात तक बढ़ाया जाना चाहिए, वह उस संख्या का लघुगणक कहलाता है। इसे गणितीय रूप से व्यक्त करने पर, x संख्या n का आधार b पर लघुगणक है।

यदि, $b^x = n$ तब, $x = \log_b n$, जहाँ $n, b > 0$ और $b \neq 1$

Ex. $16 = 2^4 \Rightarrow \log_2 16 = 4$

☞ **सामान्य लघुगणक:**

आधार 10 पर लघुगणक को सामान्य लघुगणक (common logarithms) कहा जाता है। सामान्य लघुगणक को दर्शाने के लिए दो संकेतन (notation) हैं: log b (जिसे 'log b' पढ़ा जाता है) और $\log_{10} b$.

गणितीय रूप से, $\log x = \log_{10} x$

☞ **प्राकृतिक लघुगणक:**

आधार "e" पर लघुगणक को प्राकृतिक लघुगणक (Natural logarithms) कहा जाता है। प्राकृतिक लघुगणक को दर्शाने के लिए भी दो संकेतन (notations) हैं: ln b और log b ये दोनों आधार e पर लघुगणक b को दर्शाते हैं।

गणितीय रूप से, $ln\ x = \log_e x$.

शून्य या ऋणात्मक संख्याओं का लघुगणक परिभाषित नहीं होता है और लघुगणक का आधार कभी भी 1 के बराबर नहीं हो सकता।

$\log_e 0 \rightarrow$ अपरिभाषित

$\log_e(-5) \rightarrow$ अपरिभाषित

$\log_1 a \rightarrow$ अपरिभाषित

लघुगणक के गुण

माना, कि m और n धनात्मक संख्याएँ हैं, और $a, m, n, b, c > 0$ हैं, साथ ही $a, b, c \neq 1$

(i) $\log_a a = 1$

(ii) $\log_a 1 = 0$

(iii) $\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$

(iv) $\log_a(m \times n) = \log_a m + \log_a n$

(v) $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$

(vi) $\log_c a = \log_b a \times \log_c b = \frac{\log_b a}{\log_b c}$

(vii) $\log_a (m^n) = n\log_a m$

(viii) $\log_{a^q}(m) = \frac{1}{q}\log_a m$

(ix) $\log_{a^q}(m^p) = \frac{p}{q}\log_a m$

(x) $a^{\log_a n} = n$

(xi) $a^{\log_e x} = x^{\log_e a}$, x & $a > 0$ और $x, a \neq 1$

(xii) $\log_a b = -\log_{\frac{1}{a}} b$

☞ **यह बिंदु याद रखें।**

$\log 2 = 0.3010$

$\log 3 = 0.4771$

$\log 5 = 0.6990$

Ex. यदि $\log_{10}5 + \log_{10}(5x + 1) = \log_{10}(x + 5) + 1$, तो x का मान है।

HINTS दिया गया है

$\Rightarrow \log_{10}5 + \log_{10}(5x + 1) = \log_{10}(x + 5) + 1$

$\Rightarrow \log_{10}5 + \log_{10}(5x + 1) = \log_{10}(x + 5) + \log_{10}10$

हम जानते है,

$\log_a(m \times n) = \log_a m + \log_a n$

$\Rightarrow \log_{10}[5(5x + 1)] = \log_{10}[(x + 5) \times 10]$

$\Rightarrow 5x + 1 = 2x + 10$

$\Rightarrow 3x = 9$

$\Rightarrow x = 3$

Ex. $\frac{1}{10}\log_2 1024 - \log_5 10 + \frac{1}{5}\log_5 3125$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $= \frac{1}{10}\log_5 1024 - \log_5 10 + \frac{1}{5}\log_5 3125$

हम जानते है,

$\log_a(m^n) = n\log_a m$

$= \frac{1}{10}\log_5(2)^{10} - \log_5 10 + \frac{1}{5}\log_5(5)^5$

$= \frac{10}{10}\log_5 2 - \log_5 10 + \frac{5}{5}\log_5 5$

$= \log_5 2 - \log_5(2 \times 5) + \log_5 5$

$= \log_5 2 - \log_5 2 - \log_5 5 + \log_5 5 = 0$

Ex. यदि द्विघात समीकरण $x^2 - 4x - \log_{10}N = 0$ के मूल वास्तविक हैं, तो N का न्यूनतम मान क्या है?

HINTS दिया गया है,

$x^2 - 4x - \log_{10}N = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर

$a = 1, b = -4$ और $c = -\log_{10}N$

द्विघात समीकरण की मूल वास्तविक हैं

तब $D \geq 0$ i.e. $b^2 - 4ac \geq 0$

$\Rightarrow (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-\log_{10}N) \geq 0$

$\Rightarrow 4\log_{10}N \geq -16$

$\Rightarrow N \geq 10^{-4}$

$N \geq 0.0001$

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. $\log_{\sqrt{b}} a \times \log_{c^{\frac{1}{3}}} b \times \log_{a^{\frac{1}{4}}} c$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $(\log_{\sqrt{b}} a) \times \left(\log_{c^{\frac{1}{3}}} b\right) \times (\log_{a^{\frac{1}{4}}} c)$

$$= \left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\log_b a\right)\left(\frac{1}{\frac{1}{3}}\log_c b\right)\left(\frac{1}{\frac{1}{4}}\log_a c\right)$$

$$= 2\frac{\log a}{\log b} \times 3\frac{\log b}{\log c} \times 4\frac{\log c}{\log a}$$

$$= 2 \times 3 \times 4 = 24$$

Ex. यदि, $\log_2 x = 6$ तो x का मान ज्ञात करें।

HINTS $x = 2^6 = 64$

Ex. सरल कीजिए : $\log_5 125 - \log_5 5$

HINTS $= \log_5(5^3) - \log_5 5 = 3\log_5 5 - \log_5 5$

$= 2\log_5 5 = 2$

Ex. यदि, $\log_{10} 2 = 0.3010$ तो $\log_{10} 8$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $\log_{10} 8 = \log_{10}(2^3) = 3\log_{10} 2$

$= 3 \times 0.3010$

$= 0.9030$

Ex. हल करें: $\log_{10} 100 - \log_{10} 10$

HINTS $\log_{10}(10^2) - \log_{10} 10$

$= 2\log_{10}(10) - \log_{10} 10$

$= \log_{10} 10 = 1$

Ex. यदि $\frac{\log a}{b-c} = \frac{\log b}{c-a} = \frac{\log c}{a-b}$, तो $a^a b^b c^c$ का मान ज्ञात करें।

HINTS माना कि,

$$\frac{\log a}{b-c} = \frac{\log b}{c-a} = \frac{\log c}{a-b} = k$$

$\log a = k(b - c)$

$\log b = k(c - a)$

$\log c = k(a - b)$

माना, $x = a^a b^b c^c$

दोनो तरफ log लेने पर

$\log x = \log a^a b^b c^c$

$\log x = a \log a + b \log b + c \log c$

$= ka(b - c) + kb(c - a) + kc(a - b)$

$= k(ab - ac + bc - ba + ac - bc)$

$\log x = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow a^a b^b c^c = 1$

Ex. $\left[\frac{1}{\log_{\frac{q}{p}} x} + \frac{1}{\log_{\frac{p}{r}} x} + \frac{1}{\log_{\frac{r}{q}} x}\right]$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $\frac{1}{\log_{\frac{q}{p}} x} + \frac{1}{\log_{\frac{p}{r}} x} + \frac{1}{\log_{\frac{r}{q}} x}$

$$= \log_x\left(\frac{q}{p}\right) + \log_x\left(\frac{p}{r}\right) + \log_x\left(\frac{r}{q}\right)$$

$$= \log_x\left(\frac{q}{p} \times \frac{p}{r} \times \frac{r}{q}\right) = \log_x 1 = 0$$

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

अध्याय 34

गणना

काफी ज्ञान होने के बावजूद, कई छात्र विभिन्न प्रतियोगी परीक्षाओं में अच्छे बुनियादी गणना की गति न होने के कारण परीक्षा पास नहीं कर पाते। यदि आप इस अध्याय में दिए गए तकनीकों का उपयोग करके रोज़ाना 20-30 मिनट अभ्यास करें, तो आपकी गणना की गति 2 महीनों में 5 गुना तक बढ़ सकती है।

गणितीय योग्यता में गति कैसे बढ़ाएँ?

कुछ मान याद करें

- 1 से 20 तक की गणना तालिकाएँ सीखें (इस अध्याय की तालिका-05 देखें)
- 1 से 30 तक के वर्ग सीखें (इस अध्याय की तालिका-01 देखें)
- 1 से 20 तक के घन सीखें (इस अध्याय की तालिका-02 देखें)
- बुनियादी घातांक मान (तालिका-04 देखें)
- कुछ प्रतिशत मान (प्रतिशत अध्याय देखें)

मूल गणितीय संक्रियाओं पर काम करें

योग | घटाव | गुणा | भाग

योग

दो या दो से अधिक संख्याओं को जोड़ योग कहलाता है।

कॉन्सेप्ट-01

Ex. (69 + 37)

चरण-1: संख्या (69) को (60 + 9) और (37) को (30 + 7) में तोड़ें

चरण-2: पहले आधार संख्या जोड़ें → (60 + 30) = 90

चरण-3: संख्या के इकाई अंक जोड़ें → (9 + 7) = 16

चरण-4: अब दोनों परिणाम जोड़ें → (90 + 16) = 106

DO IT LIKE PRO

N_1	N_2	$N_1 + N_2$	N_1	N_2	$N_1 + N_2$
69	49		67	48	
65	29		89	37	
87	48		74	51	
69	52		73	37	
79	42		79	28	

Ex. (187 + 287)

चरण-1: संख्या (187) को (100 + 80 + 7) और (287) को (200 + 80 + 7) में तोड़ें

चरण-2: पहले आधार संख्या जोड़ें →
(100 + 200) = 300, (80 + 80) = 160

चरण-3: इकाई अंक जोड़ें → (7 + 7) = 14

चरण-4: अब परिणाम जोड़ें → (300 + 160 + 14) = 474

Ex. 4639 + 1235

चरण-1: सबसे बड़ी संख्या को याद रखें
4639

चरण-2: दूसरी संख्या 1235 को इस प्रकार तोड़ें
1000 + 200 + 30 + 5

चरण-3: संख्याओं को एक-एक करके जोड़ें
4639 + 1000 = 5639
5639 + 200 = 5839
5839 + 30 = 5869
5869 + 5 = 5874

DO IT LIKE PRO

N_1	N_2	N_1+N_2	N_1	N_2	N_1+N_2
169	249		637	448	
1265	629		269	137	
563	438		264	511	
639	252		2273	1237	
3479	1128		4576	1445	

@apna_channels

कॉन्सेप्ट-02

इस विधि में, बहुत नजदीक की संख्या को जोड़ा जाता है।

Ex. (45 + 52)

चरण-1: छोटी संख्या को दोगुना करें → (45 × 2) = 90

चरण-2: संख्याओं के बीच का अंतर निकालें → (52 – 45) = 7

चरण-3: अब दोनों परिणाम जोड़ें → (90 + 7) = 97

Ex. (333 + 338)

चरण-1: छोटी संख्या को दोगुना करें → 333 × 2 = 666

चरण-2: संख्याओं के बीच का अंतर निकालें → 338 – 333 = 5

चरण-3: अब दोनों परिणाम जोड़ें → 666 + 5 = 671

DO IT LIKE PRO

N_1	N_2	N_1+N_2	N_1	N_2	N_1+N_2
69	74		87	92	
137	146		269	277	
363	358		1264	1277	
1639	1645		2273	2282	
4576	4584		3489	3492	

कॉन्सेप्ट-03

इस विधि में, संख्या को 100, 200, 300 आदि के नजदीक की संख्या के साथ जोड़ा जाता है।

Ex. (57 + 94)

चरण-1: 94 को 100 मानें (यहाँ 6 अतिरिक्त है)

चरण-2: 57 में 100 जोड़ें → 157

चरण-3: फिर अतिरिक्त संख्या घटाएँ
157 – 6 = 151

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. (314 + 399)

चरण-1: 399 को 400 मानें → (यहाँ 1 अतिरिक्त है)

चरण-2: 314 में 400 जोड़ें → 714

चरण-3: फिर जो अतिरिक्त संख्या जोड़ी थी उसे घटाएँ 714 – 1 = 713

DO IT LIKE PRO

N_1	N_2	N_1+N_2	N_1	N_2	N_1+N_2
189	84		181	92	
153	283		363	358	
1196	146		1264	1277	
1721	1342		2585	2289	
3489	3492		4576	4584	

कॉन्सेप्ट-04

इस विधि में, जोड़ के दौरान आपको बहुत सतर्क रहना चाहिए ताकि कुछ ऐसे संख्याओं के जोड़े मिल सकें जो जोड़ने पर 100, 200, 300 आदि जैसे आधार संख्या बनाएं।

Ex. (45 + 53 + 75)

चरण-1: सबसे पहले उन संख्याओं को जोड़ें जो आपको आधार संख्या देंगी जैसे 100, 200, 300 आदि यानी → 45 + 75 = 120

चरण-2: अब परिणाम में बाकी संख्या जोड़ें → 120 + 53 = 173

Ex. (157 + 186 + 143)

चरण-1: सबसे पहले उन संख्याओं को जोड़ें जो आपको आधार संख्या देंगी जैसे 100,200,300 आदि जैसे 157 + 143 = 300

Step -2: अब परिणाम में बाकी संख्या जोड़ें → 300 + 186 = 486

DO IT LIKE PRO

N_1	N_2	N_3	SUM	N_1	N_2	N_3	SUM
34	43	66		79	52	22	
46	93	56		57	78	43	
67	88	47		167	196	148	
163	177	284		227	258	298	

कॉन्सेप्ट-05

(A) इस विधि में पहले हम गिनते हैं कि संख्या 1 सबसे अधिक कितनी बार आती है। फिर हम 1 से उस गिनती तक की संख्याएँ लिखते हैं।

Ex. 1 + 11 + 111

चरण-1: संख्या 1 अधिकतम कितनी बार आती है गिनें → 111 = 3 बार

चरण-2: अब 1 से 3 तक की संख्या लिखें बार → 123

चरण-3: तो 1 + 11 + 111 = 123

Ex. 1 + 11 + 111 + 1111

चरण-1: संख्या 1 अधिकतम कितनी बार आती है गिनें → 1111 = 4 बार

चरण-2: अब 1 से 4 तक की संख्या लिखें → 1234

चरण-3: 1 + 11 + 111 + 1111 = 1234

(B) इस विधि में पहले हम गिनते हैं कि संख्या 1 सबसे अधिक कितनी बार आती है। फिर हम 1 से उस गिनती तक की संख्या लिखते हैं और अंत में परिणामित मान को दोहराई जा रही संख्या से गुणा कर देते हैं।

Ex. 2 + 22 + 222

चरण-1: संख्या कितनी बार आई है गिनें → 222 = 3 बार

चरण-2: अब 1 से 3 तक की संख्या लिखें → 123

चरण-3: 2 से गुणा करें ⇒ 123 × 2 = 246

चरण-4: 2 + 22 + 222 = 246

Ex. 2 + 22 + 222 + 2222 + 22222

चरण-1: संख्या कितनी बार आई है गिनें → 22222 = 5 बार

चरण-2: अब 1 से 5 तक की संख्या लिखें → 12345

चरण-3: 2 से गुणा करें ⇒ 12345 × 2 = 24690

चरण-4: 2 + 22 + 222 + 2222 + 22222 = 24690

Ex. 3 + 33 + 333

चरण-1: 333 = 3 बार

चरण-2: 123

चरण-3: 123 × 3 = 369

Ex. 3 + 33 + 333 + 3333

चरण-1: 3333 = 4 बार

चरण-2: 1234

चरण-3: 1234 × 3 = 3702

घटाव

घटाव का उपयोग दो या दो से अधिक संख्याओं के बीच का अंतर निकालने के लिए भी किया जाता है।

@apna_channels

कॉन्सेप्ट-01

(a) इस प्रकार की विधि में, दो अंकों की संख्या को उसकी उल्टी संख्या से घटाया जाता है और हमेशा अंकों के अंतर को 9 से गुणा करना होता है।

Ex. (73 – 37)

चरण-1: अंकों का अंतर निकालें (7 – 3 = 4)

चरण-2: परिणाम को हमेशा 9 से गुणा करें → 4 × 9 = 36

DO IT LIKE PRO

N_1	N_2	$N_1 - N_2$	N_1	N_2	$N_1 - N_2$
61	16		87	78	
54	45		72	27	
63	36		93	39	
75	57		74	47	
84	48		91	19	

कॉन्सेप्ट-02

इस विधि में, किसी संख्या को 100, 200, 300 आदि जैसे आधार संख्या के करीब की संख्या से घटाया जाता है।

Ex. (267 – 94)

(94 को 100 मानें, यहाँ 6 अतिरिक्त है)

चरण-1: पहले 267 में से 100 घटाएँ → 167

चरण-2: फिर अतिरिक्त संख्या जोड़ें (6) →167 + 6 = 173

Ex. (567 - 393)

(393 को 400 मानें, यहाँ 7 अतिरिक्त है)

चरण-1: पहले 567 में से 400 घटाएँ → 167

चरण-2: फिर अतिरिक्त संख्या जोड़ें (7) → 167 + 7 = 174

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

DO IT LIKE PRO

N_1	N_2	$N_1 - N_2$	N_1	N_2	$N_1 - N_2$
169	94		137	92	
146	89		178	98	
278	86		264	197	
247	192		227	192	
576	184		348	192	

कॉन्सेप्ट-03

इस विधि में, दो संख्याएँ घटाई जाती हैं जो किसी आधार संख्या (100, 200, 300...) के नजदीक होती हैं। इसलिए दोनों संख्याओं के आधार संख्या से अंतर को जोड़ें।

Ex. (815 - 777)

777 के सबसे नजदीक का आधार संख्या खोजें → 800

चरण-1: 815, 800 से 15 अधिक है

चरण-2: 777, 800 से 23 कम है

अंतर जोड़ें → 15 + 23 = 38

Ex. (1305 - 878)

878 के सबसे नजदीक का आधार संख्या खोजें → 900

चरण-1: 1305, 900 से 405 अधिक है

1305 – 900 = 405

चरण-2: 878, 900 से 22 कम है

अंतर जोड़ें → 405 + 22 = 427

DO IT LIKE PRO

N_1	N_2	$N_1 - N_2$	N_1	N_2	$N_1 - N_2$
169	124		387	292	
237	196		277	269	
363	158		1264	277	
1639	1345		2273	2182	
4576	4184		3492	2892	

कॉन्सेप्ट-04

हमेशा पहले जोड़ना जरूरी नहीं है। कभी-कभी घटाना भी किया जा सकता है अगर यह आसान हो। 35 + 73 - 55

Ex. (35 + 73 - 55)

चरण-1: चूँकि 73 और 55 एक-दूसरे के नजदीक हैं, इसलिए पहले 73 – 55 = 18

Step -2: परिणाम में 35 जोड़ें → 35 + 18 = 53

Ex. (– 267 + 196 + 253)

चरण-1: चूँकि 253 और 267 एक-दूसरे के नजदीक हैं, इसलिए पहले 253 – 267 = –14

चरण-2: परिणाम में 196 जोड़ें → 196 - 14 = 182

DO IT LIKE PRO

अभिव्यक्ति	हल	अभिव्यक्ति	हल
28 – 65 – 66		47 – 54 + 57	
76 + 62 – 72		57 + 78 – 43	
63 – 58 + 34		64 + 77 – 103	
-267 + 164 + 245		573 + 382 – 234	
576 + 684 – 272		489 – 249 + 125	

कॉन्सेप्ट-05

इस विधि में, संख्या को 100 या 100 के गुणांक जैसे 200, 300 आदि से घटाया जाता है। इसलिए देखें कि छोटी संख्या को बड़ी संख्या तक पहुँचाने के लिए कितना जोड़ना होगा।

Ex. (100 - 46)

46 को 100 तक पहुँचाने की कोशिश करें

चरण-1: 46 में 4 जोड़ें, यह 50 हो जाता है

चरण-2: 50 में 50 जोड़ें, यह 100 हो जाता है।

हमने 4 और 50 जोड़े, इसलिए उत्तर है 54

या

46 = (40 + 6)

चरण-1: 100 में से 40 घटाएँ → 100 – 40 = 60

चरण-2: अब 60 में से 6 घटाएँ → 60 – 6 = 54

Ex. (1000 - 357)

357 है 300 + 50 + 7

चरण-1: 1000 में से 300 घटाएँ → (1000 – 300) = 700

चरण-2: अब 700 में से 57 घटाएँ → (700 – 57) = 643

DO IT LIKE PRO

N_1	N_2	$N_1 + N_2$	N_1	N_2	$N_1 + N_2$
50	26		60	32	
67	46		69	27	
263	135		661	277	
1639	645		1273	682	
2376	1184		2489	1492	

@apna_channels

वर्ग

किसी भी संख्या का वर्ग तेजी से निकालने के लिए, आपको 1 से 30 तक के वर्ग जानने चाहिए।

पाँच (5) पर समाप्त होने वाली संख्याओं का वर्ग कैसे निकालें।

$(10x + 5)^2 = 100x^2 + 100x + 25$

$= 100x(x + 1) + 25$

$= x(x + 1)/25$

Ex. (i) $(65)^2 = 6 \times 7/25 = 4225$

(ii) $(75)^2 = 7 \times 8/25 = 5625$

(iii) $(95)^2 = 9025$ (iv) $(35)^2 = 1225$

(v) $(45)^2 = 2025$ (vi) $(85)^2 = 7225$

$(x5)^2 = x(x + 1)/25$

इसे इस प्रकार समझा जा सकता है

$(x5)^2 = (x^2 + x)/25$

Ex. (i) $(105)^2 = 10^2 + 10/25 = 11025$

(ii) $(125)^2 = 12^2 + 12/25 = 15625$

(iii) $(145)^2 = 21025$ (iv) $(195)^2 = 38025$

(v) $(165)^2 = 27225$ (vi) $(205)^2 = 42025$

31 से 130 तक के वर्ग निकालने में बेस विधि (Base method) का प्रयोग

स्थिति I : 101 – 130

यहाँ, बेस = 100

माना, N = 100 + x

तब $N^2 = (N + x)/x^2$

"यहाँ, x^2 को 2 अंकों में लिखा जाना चाहिए।"

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. (i) $(108)^2 = (108+8)/8^2 = 11664$

(ii) $(116)^2 = (116+16)/16^2 = 132/256 = 13456$

(iii) $(123)^2 = (123+23)/23^2 = 146/529 = 15129$

स्थिति II : 71 – 100

यहाँ, बेस = 100

माना N = 100 – x

तब $N^2 = (N - x)/x^2$

"यहाँ, x^2 को 2 अंकों में लिखा जाना चाहिए।"

(i) $(94)^2 = (94-6)/6^2 = 8836$

(ii) $(89)^2 = (89-11)/11^2 = 78/121 = 7921$

(iii) $(78)^2 = (78-22)/22^2 = 56/484 = 6084$

स्थिति III : 31 – 70

यहाँ, बेस (Base) = 50

माना N = 50 ± x

तब $N^2 = (25 \pm x)/x^2$

"यहाँ, x^2 को 2 अंकों में लिखा जाना चाहिए।"

(i) $(57)^2 = (25+7)/7^2 = 3249$

(ii) $(42)^2 = (25-8)/8^2 = 1764$

वर्ग निकालने की डुप्लेक्स विधि

एक अंक वाली संख्या (a) का डुप्लेक्स उसका वर्ग होता है।

$D(a) = a^2$

Ex. D(4) = 16 D(7) = 49

D(2) = 4 D(8) = 64

दो अंकों वाली संख्या (ab) का डुप्लेक्स उनके गुणनफल का दुगुना होता है।

D(ab) = 2ab

Ex. D(10) = 2 × 1 × 0 = 0 D (12) = 2 × 1 × 2 = 4

D(93) = 54 D(51) = 10

तीन अंकों वाली संख्या (abc) का डुप्लेक्स बाहरी जोड़े के गुणनफल का दुगुना + मध्य अंक का वर्ग होता है।

$D(abc) = 2ac + b^2$

Ex. D (123) = 10 D(512) = 21

D(108) = 16 D(287) = 92

दो अंकों वाली संख्याओं का वर्ग

$(ab)^2 = D(a) / D(ab) / D(b)$

Ex. (i) $(23)^2 = D(2) / D(23) / D(3) = 4/12/9 = 529$

(ii) $(73)^2 = D(7) / D(73) / D(3) = 49/42/9 = 5329$

(iii) $(43)^2 = D(4) / D(43) / D(3) = 16/24/9 = 1849$

तीन अंकों वाली संख्याओं का वर्ग

$(abc)^2 = D(a)/D(ab)/D(abc)/D(bc)/D(c)$

Ex. (i) $(123)^2 = D(1)/D(12)/D(123)/D(23)/D(3)$
$= 1/4/10/12/9 = 15129$

(ii) $(271)^2 = D(2)/D(27)/D(271)/D(71)/D(1)$
$= 4/28/53/14/1 = 73441$

विशेष स्थिति - 01

10^n के नजदीक वाली संख्या का वर्ग

$(98)^2 = (98+2)(98-2) + 2^2$
$= 100 \times 96 + 4 = 9604$

$(103)^2 = (103-3)(103+3) + 3^2$
$= 100 \times 106 + 9 = 10609$

$(993)^2 = (993+7)(993-7) + 7^2$
$= 1000 \times 986 + 49 = 986049$

$(1008)^2 = (1008+8)(1008-8) + 8^2$
$= 1016 \times 1000 + 64$
$= 1016064$

विशेष स्थिति - 02

आइए देखें

3^2 = **09**
33^2 = 1**089**
333^2 = 11**0889**
3333^2 = 111**08889**

6^2 = **36**
66^2 = 4**356**
666^2 = 44**3556**
6666^2 = 444**35556**

9^2 = **81**
99^2 = 9**801**
999^2 = 99**8001**
9999^2 = 999**80001**

विशेष स्थिति - 03

आइए देखें

1^2 = **1**
11^2 = 1**21**
111^2 = 123**21**
1111^2 = 1234**321**

वर्गमूल

पूर्ण वर्ग (Perfect Square) का वर्गमूल

N का इकाई अंक	N^2 का इकाई अंक
1, 9	1
2, 8	4
3, 7	9
4, 6	6
5	5

Ex. 5184 का वर्गमूल निकालें

चरण-1: 5184 का इकाई अंक 4 है, इसलिए इसका वर्गमूल 2 या 8 पर समाप्त होगा।

चरण-2: अब अंत से दो अंक छोड़ें और शेष संख्या देखें। इस मामले में, यह 51 है।

$7^2 < 51 < 8^2$

तो, वर्गमूल का दहाई अंक 7 है।

चरण-3: अब 5184 का वर्गमूल 72 या 78 हो सकता है। इसके लिए, हमें यह जाँचना होगा कि 51, 7^2 के नजदीक है या 8^2 के। चूंकि 51, 7^2 के नजदीक है।

5184 का वर्गमूल 72 है।

DO IT LIKE PRO

$\sqrt{N}$	N	$\sqrt{N}$	N
$\sqrt{7744}$		$\sqrt{1764}$	
$\sqrt{6561}$		$\sqrt{7396}$	
$\sqrt{2916}$		$\sqrt{7569}$	
$\sqrt{4489}$		$\sqrt{4225}$	
$\sqrt{3249}$		$\sqrt{1764}$	
$\sqrt{4624}$		$\sqrt{9216}$	

Ex. 15129 का वर्गमूल निकालें

चरण-1: 15129 का इकाई अंक 9 है, इसलिए इसका वर्गमूल 3 या 7 पर समाप्त होगा।

चरण-2: अब अंत से दो अंक छोड़ें और शेष संख्या देखें। इस मामले में, यह 151 है।

$12^2 < 151 < 13^2$

तो, 15129 के वर्गमूल के पहले दो अंक 12 हैं।

@apna_channels

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

चरण-3: अब 15129 का वर्गमूल 123 या 127 हो सकता है। इसके लिए हमें देखना होगा कि 151, 12^2 या 13^2 के अधिक नजदीक है।
चूँकि 151, 12^2 के नजदीक है।
15129 का वर्गमूल 123 है।

DO IT LIKE PRO

$\sqrt{N}$	N	$\sqrt{N}$	N
$\sqrt{18769}$		$\sqrt{63001}$	
$\sqrt{24964}$		$\sqrt{70225}$	
$\sqrt{54756}$		$\sqrt{33489}$	
$\sqrt{69169}$		$\sqrt{75076}$	

अपूर्ण वर्ग का वर्गमूल (Non-perfect Square)

$$\sqrt{(A \pm B)} = \sqrt{A} \pm \frac{B}{2\sqrt{A}}$$

Ex. $\sqrt{10} = \sqrt{9+1} = \sqrt{9} + \frac{1}{2\sqrt{9}} = 3 + \frac{1}{2 \times 3} = \frac{19}{6} = 3.17$

Ex. $\sqrt{14} = \sqrt{16-2} = \sqrt{16} - \frac{2}{2\sqrt{16}} = 4 - \frac{2}{2 \times 4} = \frac{30}{8} = 3.75$

DO IT LIKE PRO

$\sqrt{N}$	N	$\sqrt{N}$	N
$\sqrt{57}$		$\sqrt{265}$	
$\sqrt{374}$		$\sqrt{445}$	

घन

दो अंकों वाली संख्या का घन

+ कैरी + कैरी + कैरी

$(ab)^3 = a^3 / 3a^2b / 3ab^2 / b^3$

1 अंक, 1 अंक, 1 अंक

Ex. 14 का घन निकालें
यहाँ, a = 1 & b = 4
$14^3 = 1^3/3.1^2.4/3.1.4^2/4^3 = 1/12/48/64 = 2744$

Ex. 79 का घन
यहाँ, a = 7 & b = 9
$79^3 = 7^3/3.7^2.9/3.7.9^2/9^3 = 343/1323/1701/729$
= 493039

DO IT LIKE PRO

16^3		34^3	
84^3		87^3	
69^3		43^3	
51^3		59^3	

निकालें तीन अंकों वाली संख्या का घन

1 अंक
+ कैरी + कैरी + कैरी

$(a\ b)^3 = a^3 / 3a^2b / 3ab^2 / b^3$

2 अंक, 2 अंक, 2 अंक, 2 अंक

Ex. 104 का घन निकालें
यहाँ, a = 1 & b = 4
$104^3 = 1^3/3.1^2.4/3.1.4^2/4^3 = 1/12/48/64 = 1124864$

DO IT LIKE PRO

806^3		506^3	
109^3		408^3	
711^3		912^3	

घनमूल

पूर्ण घन का घनमूल

पूर्ण घन वह संख्या है जो किसी पूर्णांक का घनमूल होती है।

N का इकाई अंक	N^3 का इकाई अंक
1, 4, 5, 6, 9	1, 4, 5, 6, 9
2	8
8	2
3	7
7	3

Ex. 157464 का घनमूल निकालें
सबसे पहले इकाई अंक से शुरू करके 3 अंकों के समूह बनाएँ।
157 464
157464 का इकाई अंक 4 है।
इसलिए घनमूल का इकाई अंक 4 होगा।
अब 157464 के घनमूल का दहाई अंक निकालें, हमें एक प्राकृतिक संख्या ढूँढनी है जिसका घन 157 से थोड़ी कम हो।
इस मामले में यह 5 है।
157464 का घनमूल 54 है।

@apna_channels

DO IT LIKE PRO

$\sqrt[3]{21952}$		$\sqrt[3]{148877}$	
$\sqrt[3]{32768}$		$\sqrt[3]{91125}$	
$\sqrt[3]{24389}$		$\sqrt[3]{50653}$	
$\sqrt[3]{68921}$		$\sqrt[3]{753571}$	
$\sqrt[3]{438976}$		$\sqrt[3]{35937}$	
$\sqrt[3]{46656}$		$\sqrt[3]{85184}$	

अपूर्ण घन का घनमूल (Non-perfect Cube)

$$\sqrt[3]{N} = A \pm \frac{B}{3.A^2}$$

सबसे पहले उस संख्या को ढूँढें जो N के पास का पूर्ण घन हो, इसे A मानें और N और A^3 के बीच का अंतर B हो।
"+ चिन्ह का उपयोग तब करें जब $N > A^3$"
"– चिन्ह का उपयोग तब करें जब $N < A^3$"

Ex. $\sqrt[3]{60} = 4 - \frac{4}{3 \times 4^2} = \frac{188}{48} = 3.92$

Ex. $\sqrt[3]{72} = 4 + \frac{8}{3 \times 4^2} = \frac{200}{48} = 4.17$

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

DO IT LIKE PRO

$\sqrt[3]{10}$		$\sqrt[3]{66}$	
$\sqrt[3]{118}$		$\sqrt[3]{226}$	
$\sqrt[3]{525}$		$\sqrt[3]{706}$	
$\sqrt[3]{953}$		$\sqrt[3]{1365}$	
$\sqrt[3]{1500}$		$\sqrt[3]{255}$	

गुणा

गुणा का मतलब है एक ही संख्या को बार-बार जोड़ना।

कॉन्सेप्ट-01

इस विधि में, हम संख्याओं को 5^n से गुणा करते हैं।

(A) यदि संख्या सम है, तो उसे 2 से भाग दें और फिर परिणाम के अंत में 0 जोड़ें।

Ex. 74 × 5

चरण-1: 74 एक सम संख्या है, इसलिए इसे 2 से भाग दें।

$\frac{74}{2} = 37$

चरण-2: परिणाम संख्या के अंत में 0 लगाये।

370

चरण-3: 74 × 5 = 370

Ex. 6274 × 5

चरण-1: संख्या को 2 से भाग दें।

$\frac{6274}{2} = 3137$

चरण-2: परिणाम संख्या के अंत में 0 लगाये।

31370

चरण-3: 6274 × 5 = 31370

(B) इस विधि में, यदि संख्या विषम है तो संख्या के अंत में 0 जोड़ें और फिर परिणाम संख्या को 2 से भाग दें।

Ex. 43 × 5

चरण-1: संख्या के अंत में 0 लगाये। = 430

चरण-2: परिणाम संख्या को 2 से भाग दें

$\frac{430}{2} = 215$

चरण-3: 43 × 5 = 215

Ex. 7235 × 5

चरण-1: संख्या के अंत में 0 लगाये। = 72350

चरण-2: परिणाम संख्या को 2 से भाग दें

$\frac{72350}{2} = 36175$

चरण-3: 7235 × 5 = 36175

DO IT LIKE PRO

N_1	N_2	$N_1 \times N_2$	N_1	N_2	$N_1 \times N_2$
272	5		437	5	
836	5		295	5	
4278	5		921	5	

कॉन्सेप्ट-02

25 से गुणा: इस विधि में पहले संख्या के अंत में '00' जोड़ें क्योंकि 5^2 = 25। फिर परिणाम संख्या को 4 से भाग दें।

Ex. 27 × 25

चरण-1: संख्या के अंत में 00 लगाये। → 2700

चरण-2: फिर परिणाम संख्या को 4 से भाग दें →

$\frac{2700}{4} = 675$

चरण-3: 27 × 25 = 675

125 से गुणा: इस विधि में पहले संख्या के अंत में '000' लगाये। क्योंकि 5^3 = 125। फिर परिणाम संख्या को 8 से भाग दें।

Ex. 672 × 125

चरण-1: संख्या के अंत में 000 जोड़ें → 672000

चरण-2: फिर परिणाम संख्या को 8 से भाग दें → $\frac{672000}{8}$

= 84000

चरण-3: 672 × 125 = 84000

DO IT LIKE PRO

N_1	N_2	$N_1 \times N_2$	N_1	N_2	$N_1 \times N_2$
29	25		421	125	
724	25		529	125	
321	25		7294	125	
920	25		8125	125	

@apna_channels

कॉन्सेप्ट-03

9, 99, 999 ... से गुणा

इस विधि में, पहले दी गई संख्या में से 1 घटाएँ। फिर परिणाम को 99, 999, 9999 आदि में से घटाएँ (अंकों की संख्या के अनुसार)। अंत में, दोनों परिणामों को एक साथ लिखें ताकि अंतिम उत्तर मिल सके।

Ex. 40 × 99

चरण-1: गुणा की जाने वाली संख्या में से 1 घटाएँ → 40 – 1 = 39

चरण-2: परिणाम को 99 में से घटाएँ → 99 – 39 = 60

चरण-3: दोनों परिणामों को एक साथ रखें → 40 × 99 = 3960

Ex. 231 × 999

चरण-1: गुणा की जाने वाली संख्या में से 1 घटाएँ → 231 – 1 = 230

चरण-2: परिणाम को 999 में से घटाएँ → 999 – 230 = 769

चरण-3: दोनों परिणामों को एक साथ रखें → 230769 अर्थात् 231 × 999 = 230769

DO IT LIKE PRO

N_1	N_2	$N_1 \times N_2$	N_1	N_2	$N_1 \times N_2$
45	99		2562	9999	
352	999		21212	9999	
257	999		345678	999999	

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

क्रिस-क्रॉस विधि से गुणा

2 अंकों × 2 अंकों

Ex.
```
  3 7
× 1 4
```

Step I: 3 [7] / 1 [4] = 28, हम 8 लिखेंगे और 2 को कैरी मानेंगे

Step II: 3 7 / 1 4 (क्रॉस) = 12 + 7 + 2 = 21, हम 1 लिखेंगे और 2 को कैरी मानेंगे

Step III: [3] 7 / [1] 4 = 3 + **2** = 5

इसलिए, 14 × 37 = 518

DO IT LIKE PRO

2 3 × 1 3	3 4 × 2 4
5 7 × 7 4	5 6 × 6 8
7 9 × 8 6	6 9 × 8 3

3 अंकों × 3 अंकों

Ex.
```
  1 2 3
× 5 8 4
```

चरण I: 1 2 [3] / 5 8 [4] = 12, हम 2 लिखेंगे और 1 को कैरी मानेंगे

चरण II: 1 (2)(3) / 5 (8)(4) (क्रॉस) = 2 × 4 + 8 × 3 + 1 = 33 हम 3 लिखेंगे और 3 को कैरी मानेंगे

चरण III: (1)(2)(3) / (5)(8)(4) (क्रॉस) = 1 × 4 + 5 × 3 + 2 × 8 + 3 = 38 हम 8 लिखेंगे और 3 को कैरी मानेंगे

चरण IV: (1)(2) 3 / (5)(8) 4 (क्रॉस) = 1 × 8 + 2 × 5 + 3 = 21 हम 1 लिखेंगे और 2 को कैरी (उधार) के रूप में लिया जाएगा।

चरण V: [1] 2 3 / [5] 8 4 = 5 + 2 = 7

इसलिए, 123 × 584 = 71832

DO IT LIKE PRO

1 2 3 × 4 1 4	1 5 3 × 4 6 1
3 0 7 × 7 8 2	5 1 3 × 6 9 4

3 अंकों × 2 अंकों

इसे 3 अंकों × 3 अंकों की तरह भी किया जा सकता है। बस दूसरी संख्या के तीसरे अंक को 0 मानें।

DO IT LIKE PRO

5 3 7 × 0 4 9	1 9 7 × 4 7

अभ्यास प्रश्न

1 9 × 6 6	7 9 × 3 3
7 8 × 1 9	6 9 × 2 6
3 0 7 × 2 7	6 3 9 × 3 7
3 7 3 × 8 7	2 6 9 × 4 1
7 6 2 × 8 5 2	5 2 9 × 1 3 9
2 9 2 × 8 4 3	6 3 3 × 7 9 6
9 8 4 × 5 1 3	7 2 3 × 3 2 6

@apna_channels

भाग

भाग का मतलब है किसी संख्या को समान भागों में बाँटना।

कॉन्सेप्ट-01

5^n (5, 25, 125 ....) से भाग

(A) **5 से भाग:** इस विधि में पहले संख्या को 2 से गुणा करें। फिर अंतिम अंक से पहले दशमलव बिंदु लगाएँ।

Ex. $\frac{66}{5} = ?$

चरण-1: संख्या को 2 से गुणा करें → 66 × 2 = 132

चरण-2: अब अंतिम अंक से पहले दशमलव लगाएँ → 13.2 अर्थात् $\frac{66}{5}$ = 13.2

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

Ex. $\frac{4257}{5} = ?$

चरण-1: संख्या को 2 से गुणा करें → 4257 × 2 = 8514

चरण-2: अब अंतिम अंक से पहले दशमलव लगाएँ → 851.4

अर्थात् $\frac{4257}{5} = 851.4$

(B) 25 से भाग: इस विधि में पहले संख्या को 4 से गुणा करें। फिर अंतिम 2 अंकों से पहले दशमलव लगाएँ।

Ex. $\frac{76}{25} = ?$

चरण-1: संख्या को 4 से गुणा करें → 76 × 4 = 304

चरण-2: अब अंतिम 2 अंकों से पहले दशमलव लगाएँ → 3.04 अर्थात् $\frac{76}{25} = 3.04$

Ex. $\frac{2481}{25} = ?$

चरण-1: संख्या को 4 से गुणा करें → 2481 × 4 = 9924

चरण-2: अब अंतिम 2 अंकों से पहले दशमलव लगाएँ → 99.24

अर्थात् $\frac{2481}{25} = 99.24$

(C) 125 से भाग: इस विधि में पहले संख्या को 8 से गुणा करें। फिर अंतिम 3 अंकों से पहले दशमलव लगाएँ।

Ex. $\frac{387}{125} = ?$

चरण-1: संख्या को 8 से गुणा करें → 387 × 8 = 3096

चरण-2: अब अंतिम 3 अंकों से पहले दशमलव लगाएँ → 3.096

अर्थात् $\frac{387}{125} = 3.096$

Ex. $\frac{54303}{125} = ?$

चरण-1: संख्या को 8 से गुणा करें → 54303 × 8 = 434424

चरण-2: अब अंतिम 3 अंकों से पहले दशमलव लगाएँ → 434.424

अर्थात् $\frac{54303}{125} = 434.424$

DO IT LIKE PRO

N_1	N_2	$N_1 \div N_2$	N_1	N_2	$N_1 \div N_2$
33	5		701	25	
241	5		1407	25	
879	5		19813	125	
1128	25		8125	125	

चौकोर दर्पण

$14^2 + 87^2 = 78^2 + 41^2$

$15^2 + 75^2 = 57^2 + 51^2$

$17^2 + 84^2 = 48^2 + 71^2$

$26^2 + 97^2 = 79^2 + 62^2$

$27^2 + 96^2 = 69^2 + 72^2$

@apna_channels

तालिका वर्ग

संख्या	वर्ग	संख्या	वर्ग	संख्या	वर्ग	संख्या	वर्ग
$(11)^2$	121	$(21)^2$	441	$(31)^2$	961	$(41)^2$	1681
$(12)^2$	144	$(22)^2$	484	$(32)^2$	1024	$(42)^2$	1764
$(13)^2$	169	$(23)^2$	529	$(33)^2$	1089	$(43)^2$	1849
$(14)^2$	196	$(24)^2$	576	$(34)^2$	1156	$(44)^2$	1936
$(15)^2$	225	$(25)^2$	625	$(35)^2$	1225	$(45)^2$	2025
$(16)^2$	256	$(26)^2$	676	$(36)^2$	1296	$(46)^2$	2116
$(17)^2$	289	$(27)^2$	729	$(37)^2$	1369	$(47)^2$	2209
$(18)^2$	324	$(28)^2$	784	$(38)^2$	1444	$(48)^2$	2304
$(19)^2$	361	$(29)^2$	841	$(39)^2$	1521	$(49)^2$	2401
$(20)^2$	400	$(30)^2$	900	$(40)^2$	1600	$(50)^2$	2500

तालिका – 2 घन

संख्या	घन	संख्या	घन	संख्या	घन
$(1)^3$	1	$(11)^3$	1331	$(21)^3$	9261
$(2)^3$	8	$(12)^3$	1728	$(22)^3$	10648
$(3)^3$	27	$(13)^3$	2197	$(23)^3$	12167
$(4)^3$	64	$(14)^3$	2744	$(24)^3$	13824
$(5)^3$	125	$(15)^3$	3375	$(25)^3$	15625
$(6)^3$	216	$(16)^3$	4096	$(26)^3$	17576
$(7)^3$	343	$(17)^3$	4913	$(27)^3$	19683
$(8)^3$	512	$(18)^3$	5832	$(28)^3$	21952
$(9)^3$	729	$(19)^3$	6859	$(29)^3$	24389
$(10)^3$	1000	$(20)^3$	8000	$(30)^3$	27000

Join Telegram: @apna_rwa

Join Telegram: @yct_publication

तालिका – 3 वर्गमूल

संख्या	वर्गमूल	संख्या	वर्गमूल
1	1	6	2.449
2	1.414	7	2.646
3	1.732	8	2.828
4	2	9	3
5	2.236	10	3.162

तालिका – 4

अभिव्यक्ति	परिणाम	अभिव्यक्ति	परिणाम	अभिव्यक्ति	परिणाम
2^1	2	3^1	3	4^1	4
2^2	4	3^2	9	4^2	16
2^3	8	3^3	27	4^3	64
2^4	16	3^4	81	4^4	256
2^5	32	3^5	243	4^5	1024
2^6	64	3^6	729	5^1	5
2^7	128	6^1	6	5^2	25
2^8	256	6^2	36	5^3	125
2^9	512	6^3	216	5^4	625
2^{10}	1024	6^4	1296	5^5	3125

@apna_channels

तालिका – 5

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
×1	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
×2	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40
×3	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60
×4	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80
×5	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
×6	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120
×7	77	84	91	98	105	112	119	126	133	140
×8	88	96	104	112	120	128	136	144	152	160
×9	99	108	117	126	135	144	153	162	171	180
×10	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
×11	121	132	143	154	165	176	187	198	209	220
×12	132	144	156	168	180	192	204	216	228	240
×13	143	156	169	182	195	208	221	234	247	260
×14	154	168	182	196	210	224	238	252	266	280
×15	165	180	195	210	225	240	255	270	285	300
×16	176	192	208	224	240	256	272	288	304	320
×17	187	204	221	238	255	272	289	306	323	340
×18	198	216	234	252	270	288	306	324	342	360
×19	209	228	247	266	285	304	323	342	361	380
×20	220	240	260	280	300	320	340	360	380	400

Join Telegram: @apna_rwa