ADITYA RANJAN PUBLICATIONS

3rd Edition

हिन्दी माध्यम

संपूर्ण गणित

ब्रह्मास्त्र

FORMULA BOOK

- CONCEPTS
- CLASS NOTES
- SHORT TRICKS
- SOLVED EXAMPLES
- CALCULATION TRICKS

GUARANTEED 25 LAKHS+ BOOKS SOLD ORIGINAL

USEFUL FOR

SSC, RAILWAYS, CET, DEFENCE, BANKING, & ALL GOVT. EXAMS

Selected हैं Selection दिलायेंगे

आदित्य रंजन सर
(EXCISE INSPECTOR)

विषय सूची

यथा शिखा मयूराणा, नागानां मणयो यथा।
तद्वद् वेदाङ्गशास्त्राणां गणितं मूर्धनि संस्थितम्॥

(महर्षि लगध कृत ‘वेदांग ज्योतिष’)

जैसे मोरों में शिखा और नागों में मणि का स्थान सबसे ऊपर है,
वैसे ही सभी वेदांग और शास्त्रों में गणित का स्थान सबसे ऊपर है।

Just as the crest on the heads of peacocks and the gems on the heads of serpents is in the highest position, in the same way the place of mathematics in the Vedangashastras is at the top.


हिंदी माध्यम
संपूर्ण गणित
3rd EDITION
ब्रह्मास्त्र
FORMULA BOOK
PRICE
₹300
₹169
OFFER VALID TILL 25TH SEP.
ORDER NOW
AVAILABLE ON
amazon
Flipkart
हिन्दी माध्यम
संपूर्ण गणित
3rd Edition
ब्रह्मास्त्र
FORMULA BOOK
CONCEPTS
CLASS NOTES
SHORT TRICKS
SOLVED EXAMPLES
CALCULATION TRICKS
USEFUL FOR
SSC, RAILWAYS, CET, DEFENCE, BANKING, & ALL GOVT. EXAMS
25 LAKHS+ BOOKS SOLD
ORIGINAL
Selected हैं Selection दिलायेंगे
आदित्य रंजन सर
(EXCISE INSPECTOR)
ADITYA RANJAN SIR
ABOUT ADITYA RANJAN SIR
ADITYA RANJAN PUBL
amazon

अध्याय 02

द्विविमीय क्षेत्रमिति

परिचय

क्षेत्रमिति शब्द का शाब्दिक अर्थ है 'मापना'। यह गणित की एक शाखा है जो विभिन्न ज्यामितीय आकृतियों के परिमाप, क्षेत्रफल और आयतन के मापन से संबंधित है।

मापन को निम्नलिखित भागों में विभाजित किया गया है।

(i) शून्य - आयामी आकृति

(ii) एक - आयामी आकृति

(iii) दो - आयामी आकृति

(iv) त्रि - आयामी आकृति

शून्य - आयामी आकृति

- शून्य आयामी आकृति एक बिंदु है जिसका
  - कोई लंबाई नहीं, कोई चौड़ाई नहीं, कोई ऊंचाई नहीं।
- दूसरे शब्दों में, एक बिंदु एक आयामहीन वस्तु है जो स्थान में एक सटीक स्थान को दर्शाता है।

एक-आयामी क्षेत्रमिति (1D)

इसमें उन आकृतियों का मापन शामिल है जिनका केवल एक आयाम है, जो कि लंबाई है।

- **रेखाः** दोनों दिशाओं में अनंत तक फैली एक सीधी रास्ता है इसका माप इसकी लंबाई है।
- **रेखाखंड:** रेखा का वह भाग जिसके अलग-अलग अंत बिंदु होते हैं। इसका माप अंत बिंदुओं के बीच की दूरी (लंबाई) है।
- **किरणः** रेखा का वह भाग जो एक बिंदु से शुरू होकर एक दिशा में अनंत तक विस्तारित होता है। इसका माप इसकी लंबाई है।

☞ **एक आयाम**

लंबाई

0 1मी 1

लंबाई = 1मी

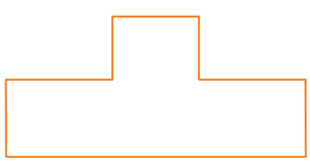
×1000 ×100 ×10

किमी मी सेमी मिमी

÷1000 ÷100 ÷10

द्विविमीय क्षेत्रमिति (2D)

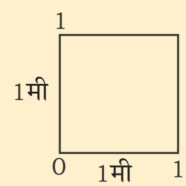
- इसमें समतल आकृतियों का मापन शामिल है, जिनके दो आयाम हैं - लंबाई और चौड़ाई (चौड़ाई)। ये आकृतियाँ समतल में स्थित होती हैं। द्विविमीय क्षेत्रमिति में मुख्य मापन में शामिल हैं।
- द्वि-आयामी मापन में हम द्वि-आयामी आकृतियों (समतल आकृतियों) का अध्ययन करेंगे, जैसे त्रिभुज, चतुर्भुज, बहुभुज, वृत्त आदि।
- **परिधि:** परिधि को किसी आकृति को घेरने वाले पथ या सीमा के रूप में परिभाषित किया जा सकता है। इसे किसी आकृति की प्रारूप की लंबाई के रूप में भी परिभाषित किया जा सकता है।



- **क्षेत्रफल:** क्षेत्रफल को किसी सपाट आकृति या किसी वस्तु की सतह द्वारा घेरे गए स्थान के रूप में परिभाषित किया जा सकता है। किसी आकृति का क्षेत्रफल इकाई वर्गों की संख्या है जो किसी बंद आकृति की सतह को घेरता हैं। क्षेत्रफल को वर्ग इकाइयों जैसे वर्ग सेंटीमीटर, वर्ग मीटर आदि में मापा जाता है।

☞ **दो आयाम**

क्षेत्रफल



क्षेत्रफल = (1मी) × (1मी) = 1मी²

$\times 1000^2$ $\times 100^2$ $\times 10^2$ $\times 100000^2$

किमी² मी² सेमी² मिमी² हेमी² मिमी²

$\div 1000^2$ $\div 100^2$ $\div 10^2$ $\div 100000^2$

- यदि 2D आकृति की प्रत्येक संगत लंबाई को k से गुणा किया जाए तो नया परिमाप P' होगा।

  P' = k × P
- यदि 2D आकृति की प्रत्येक संगत लंबाई को k से गुणा किया जाए तो नया क्षेत्र A' होगा।

  A' = k × लंबाई × k × चौड़ाई

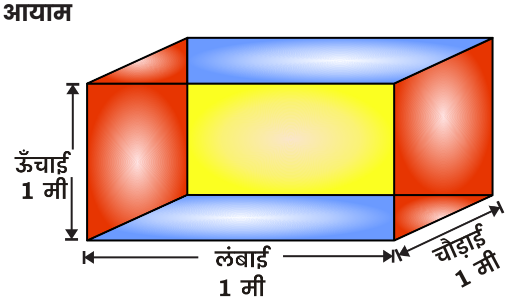
  ⇒ A' = k² (लंबाई × चौड़ाई)

  ⇒ A' = k² × A

त्रिविमीय क्षेत्रमिति (3D)

त्रिविमीय क्षेत्रमिति में हम घन, घनाभ, बेलन, शंकु, छिन्नक, गोला, अर्धगोला, प्रिज्म, पिरामिड आदि त्रिविमीय क्षेत्रमिति आकृतियों का अध्ययन करेंगे।

☞ **तीन आयाम**



V = 1मी × 1मी × 1मी = 1मी³

$\times 1000^3$ $\times 100^3$ $\times 10^3$

किमी³ मी³ सेमी³ मिमी³

$\div 1000^3$ $\div 100^3$ $\div 10^3$

क्षेत्रमिति के लिए कुछ महत्वपूर्ण रूपांतरण

द्रव्यमान के लिए इकाई रूपांतरण

- 1 किलोग्राम = 1000 ग्राम = 10^3
- 1 हेक्टोग्राम = 100 ग्राम = 10^2
- 1 डेकाग्राम = 10 ग्राम = 10^1
- 1 डेसीग्राम = 0.1 ग्राम = 10^{-1}
- 1 सेंटीग्राम = 0.01 ग्राम = 10^{-2}
- 1 मिलीग्राम = 0.001 ग्राम = 10^{-3}

लंबाई के लिए इकाई रूपांतरण

- 1 मिलीमीटर = 0.001 मीटर
- 1 सेंटीमीटर = 0.01 मीटर
- 1 डेसीमीटर = 0.1 मीटर
- 1 हेक्टोमीटर = 100 मीटर
- 1 किलोमीटर = 1000 मीटर
- 1 इंच = 2.54×10^{-2} मीटर
- 5 मील = 8 किमी
- 1 फीट = 0.3048 मीटर

क्षेत्रफल के लिए इकाइयों का रूपांतरण

- 1 वर्ग मील = 2.5899×10^6 वर्ग मीटर
- 1 हेक्टेयर = 1×10^4 वर्ग मीटर
- 1 एकड़ = 4.0468×10^3 वर्ग मीटर
- 1 वर्ग फुट = 9.92903×10^{-2} वर्ग मीटर
- 1 वर्ग इंच = 6.4516×10^{-4} वर्ग मीटर

कुछ अन्य इकाई रूपांतरण

- 1 पाउंड = 16 औंस
- 1 टन = 2000 पाउंड

द्रव्यमान, घनत्व और आयतन के बीच संबंध

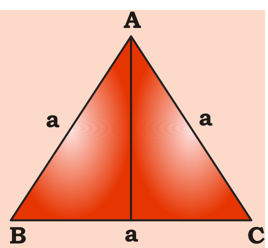
द्रव्यमान = घनत्व × आयतन

$$\text{घनत्व} = \frac{\text{द्रव्यमान}}{\text{आयतन}}$$

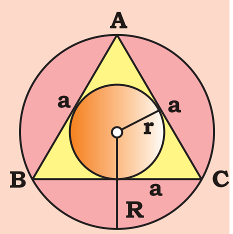
त्रिभुज

समबाहु त्रिभुज

समबाहु त्रिभुज वह त्रिभुज है जिसमें तीन भुजाएँ बराबर लंबाई की होती हैं तथा सभी आंतरिक कोण 60° होते है।



- परिमाप = 3a
- अर्द्ध परिमाप (s) = $\frac{3a}{2}$
- ऊंचाई (h) = $\frac{\sqrt{3}a}{2}$
- क्षेत्रफल = $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{h^2}{\sqrt{3}}$
- अंतः त्रिज्या (r) = $\frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{h}{3}$
- अंतः वृत्त का क्षेत्रफल = $\frac{\pi a^2}{12}$
- परि-त्रिज्या (R) = $\frac{a}{\sqrt{3}}$
- परिवृत्त का क्षेत्रफल = $\frac{\pi a^2}{3}$
- $\frac{\text{अंतःवृत्त की त्रिज्या (r)}}{\text{परिवृत्त की त्रिज्या (R)}} = \frac{1}{2}$
- $\frac{\text{अंतःवृत्त का क्षेत्रफल}}{\text{परिवृत्त का क्षेत्रफल}} = \frac{1}{4}$
- r : a : R का अनुपात = 1 : $2\sqrt{3}$: 2



भुजा	ऊंचाई	क्षेत्रफल
2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
↓×k	↓×k	↓×k²
2k	$\sqrt{3}$k	$\sqrt{3}$k²
↓	↓	↓
(2 × 3 = 6)	($\sqrt{3}$ × 3 = 3$\sqrt{3}$)	($\sqrt{3}$ × 3² = 9$\sqrt{3}$)

Ex. एक समबाहु त्रिभुज की प्रत्येक भुजा की लंबाई 22 सेमी है। इस त्रिभुज का क्षेत्रफल (सेमी में²) ज्ञात कीजिए।

HINTS समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 22 \times 22 = 121\sqrt{3}$ सेमी²

वैकल्पिक विधि

भुजा	क्षेत्रफल
2	$\sqrt{3}$
↓×11	↓×11²
22	121$\sqrt{3}$

Ex. एक समबाहु त्रिभुज की ऊँचाई 3$\sqrt{3}$ सेमी है। इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

HINTS समबाहु Δ की ऊँचाई = $\frac{\sqrt{3}}{2}a \Rightarrow 3\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

$\Rightarrow a = 6$

$\therefore$ समबाहु Δ का क्षेत्रफल = $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 36 = 9\sqrt{3}$ सेमी²

वैकल्पिक विधि

$\therefore$ समबाहु Δ का क्षेत्रफल = $\frac{h^2}{\sqrt{3}} = \frac{(3\sqrt{3})^2}{\sqrt{3}} = \frac{27}{\sqrt{3}} = 9\sqrt{3}$ सेमी²

Ex. एक समबाहु त्रिभुज की ऊंचाई 12$\sqrt{5}$ सेमी है, तो परिवृत्त और अन्तःवृत्त के क्षेत्रफलों के बीच अंतर ज्ञात कीजिए?

HINTS समबाहु त्रिभुज की ऊँचाई = $\frac{\sqrt{3}a}{2}$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}a = 12\sqrt{5} \Rightarrow a = \frac{24\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$

परिवृत्त और अन्तःवृत्त के क्षेत्रफल में अंतर

$= \pi a^2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{12}\right) = \pi \times \frac{576 \times 5}{3} \times \frac{1}{4} = 240\pi$ सेमी²

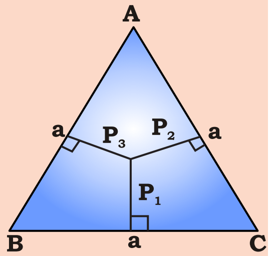
☞ यदि P_1, P_2 तथा P_3 एक समबाहु त्रिभुज के अन्दर स्थित एक बिंदु से उसकी भुजाओं पर खींचे गए लंबों की लंबाइयाँ हैं, तो

(a) $P_1 + P_2 + P_3 = \frac{\sqrt{3}a}{2} = h$ (ऊँचाई),

$a = \frac{2}{\sqrt{3}}(P_1 + P_2 + P_3)$

(b) समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल

$= \frac{(P_1 + P_2 + P_3)^2}{\sqrt{3}}$



Ex. 'P' एक समबाहु त्रिभुज के अंदर स्थित बिंदु है और यदि 'P' से त्रिभुज की प्रत्येक भुजा पर खींचे गए लंबों की लंबाई 2 सेमी, 3 सेमी और 4 सेमी है। समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

HINTS समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{(P_1 + P_2 + P_3)^2}{\sqrt{3}}$

$= \frac{(9)^2}{\sqrt{3}} = 27\sqrt{3}$ सेमी²

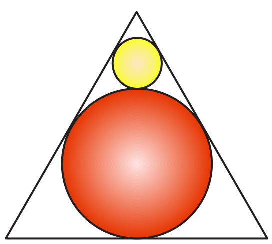
☞ यदि किसी समबाहु त्रिभुज की प्रत्येक भुजा की लंबाई में x की वृद्धि की जाए तो क्षेत्रफल में y की वृद्धि हो जाती है

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{4}(a + x)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + y$

जहाँ $y = x^2 + 2ax$

☞ एक समबाहु त्रिभुज में, अलग-अलग त्रिज्याओं वाले दो वृत्त त्रिभुज के अंदर रखे जाते हैं, तो

$\frac{\text{छोटे वृत्त की त्रिज्या}}{\text{बड़े वृत्त की त्रिज्या}} = \frac{1}{3}$



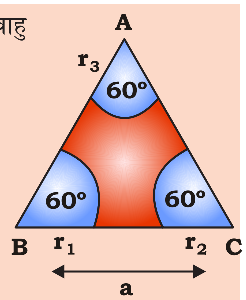
☞ यदि 3 गायों को 'a' सेमी भुजा वाले एक समबाहु त्रिभुजाकार खेत के प्रत्येक कोने पर r_1, r_2 और r_3 सेमी लंबाई की रस्सियों से बाँधा गया है, तो

गायों द्वारा चरे जाने वाले भाग का क्षेत्रफल

$= \frac{\pi}{6}(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)$

गायों द्वारा न चरे जाने वाले भाग का क्षेत्रफल

$= \frac{\sqrt{3}a^2}{4} - \frac{\pi}{6}(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)$



Ex. यदि 3 गायों को एक समबाहु त्रिभुजाकार मैदान के प्रत्येक कोने पर 7 सेमी लम्बी रस्सी से बाँधा गया है, तो गायों द्वारा चरे वाले भाग का कुल क्षेत्रफल ज्ञात करें।

HINTS गायों द्वारा चरे जाने वाला क्षेत्र $= \frac{\pi}{6}(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)$

$= \frac{22}{7 \times 6} \times (7^2 + 7^2 + 7^2) = \frac{22}{42} \times 147$

= 77 सेमी²

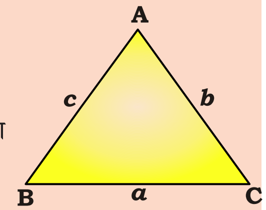
विषमबाहु त्रिभुज

विषमबाहु त्रिभुज एक त्रिभुज है जिसमें तीन असमान भुजाएँ और तीन असमान कोण होते हैं

- परिमाप = $a + b + c$
- अर्द्ध परिमाप (s) = $\frac{a + b + c}{2}$
- **क्षेत्रफल :** त्रिभुज का क्षेत्रफल Δ चिह्न द्वारा दर्शाया जाता है।

क्षेत्रफल = $\sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$

- अंत: त्रिज्या (r) $= \frac{\Delta}{s}$
- परि-त्रिज्या (R) = $\frac{abc}{4\Delta}$



Ex. एक त्रिभुज की भुजाओं की लंबाई 5 सेमी, 7 सेमी और 10 सेमी है। त्रिभुज का क्षेत्रफल (सेमी² में) ज्ञात कीजिए।

HINTS

अर्द्ध परिमाप (s) = $\frac{a + b + c}{2} = \frac{5 + 7 + 10}{2} = 11$

हीरोन के सूत्र से,

त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$

$= \sqrt{11(11 - 5)(11 - 7)(11 - 10)}$

$= \sqrt{11 \times 6 \times 4 \times 1} = 2\sqrt{66}$ सेमी²

Ex. एक त्रिभुज का क्षेत्रफल 15 वर्ग सेमी है और उसके अन्त:वृत्त की त्रिज्या 3 सेमी है। इसका परिमाप बराबर है:

HINTS 15 = 3 × s ⇒ s = 5 सेमी

∴ परिमाप = 5 × 2 = 10 सेमी

☞ **विशेष स्थिति जब भुजाएँ 13, 14, 15 हों**

Ex. एक त्रिभुज के लिए जिसकी भुजाएँ 13 सेमी, 14 सेमी, 15 सेमी हैं।

(i) त्रिभुज का क्षेत्रफल

(ii) त्रिभुज की अंत:त्रिज्या

HINTS

अर्द्ध-परिमाप (s) = $\frac{13 + 14 + 15}{2} = 21$ सेमी

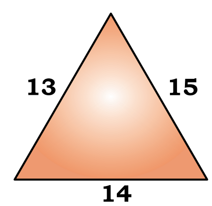
(i) त्रिभुज का क्षेत्रफल

$= \sqrt{21(21 - 13)(21 - 14)(21 - 15)}$

$= \sqrt{21 \times 8 \times 7 \times 6} = \sqrt{7 \times 3 \times 8 \times 7 \times 6}$

= 7 × 12 = 84 सेमी²

(ii) अंत: त्रिज्या (r) $= \frac{\Delta}{s} = \frac{84}{21} = 4$

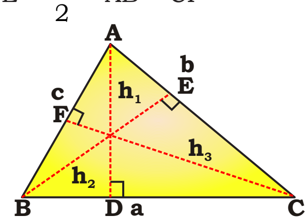


☞ क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × भुजा × संगत ऊँचाई

$\Delta = \frac{1}{2} \times BC \times AD = \frac{1}{2} \times AC \times BE = \frac{1}{2} \times AB \times CF$

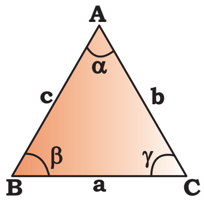
$\therefore ah_1 = bh_2 = ch_3$ = (स्थिर)

$\therefore a : b : c = \frac{1}{h_1} : \frac{1}{h_2} : \frac{1}{h_3}$



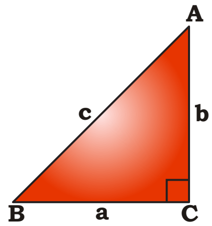
☞ जब किसी त्रिभुज की दो भुजाएँ तथा उनके बीच का कोण दिया हो, तो,

$$\text{क्षेत्रफल} = \frac{1}{2}\times bc\sin\alpha = \frac{1}{2}\times ca\sin\beta = \frac{1}{2}\times ab\sin\gamma$$



☞ दो दी गई भुजाओं वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल अधिकतम होगा यदि ये दोनों भुजाएँ एक दूसरे के समकोण पर स्थित हों।
यदि a, b त्रिभुज की दो भुजाएँ हैं तो अधिकतम

$$\text{क्षेत्रफल} = \frac{1}{2}ab$$



☞ त्रिभुज की भुजाओं के मध्य-बिंदुओं को मिलाने से जो त्रिभुज बनता है, उसका परिमाप मूल त्रिभुज के परिमाप का आधा तथा उसका क्षेत्रफल मूल त्रिभुज के क्षेत्रफल का एक-चौथाई होता है।

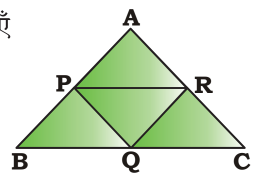
यदि P, Q और R क्रमशः भुजाएँ AB, BC और AC, के मध्य-बिंदु हों, तो

(a) ΔPQR का परिमाप

$= \frac{1}{2} \times \Delta ABC$ का परिमाप

(b) यदि ΔABC का क्षेत्रफल Δ है, तो

ΔPQR का क्षेत्रफल $= \frac{\Delta}{4}$



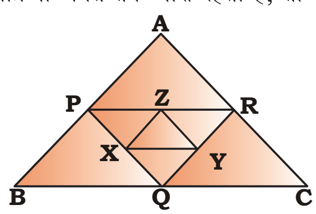
☞ मान लीजिए ΔABC की भुजाओं के मध्य-बिंदुओं को मिलाकर एक त्रिभुज PQR बनाया जाता है, फिर ΔPQR की भुजाओं के मध्य-बिंदुओं को मिलाकर एक ΔXYZ बनाया जाता है, यदि यह प्रक्रिया अनंत तक जारी रहती है, तो

(a) सभी त्रिभुजों का क्षेत्रफल

$= \frac{4}{3} \times \Delta ABC$ का क्षेत्रफल

(b) सभी त्रिभुजों का परिमाप

$= 2 \times \Delta ABC$ का परिमाप



Ex. एक इकाई लंबाई की भुजा वाले एक समबाहु त्रिभुज पर विचार करें। एक समबाहु त्रिभुज के मध्य-बिंदुओं को मिलाकर एक नया समबाहु त्रिभुज बनाया जाता है, फिर दूसरे समबाहु त्रिभुज के मध्य-बिंदु को मिलाकर एक तीसरा समबाहु त्रिभुज बनाया जाता है। यह प्रक्रिया जारी रहती है। इस प्रकार बने सभी त्रिभुजों का परिमाप है:

HINTS सभी परिमापों का योग

$= 2 \times$ मूल त्रिभुज का परिमाप $= 2 \times 3 \times 1 = 6$ इकाई

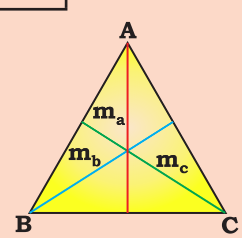
☞ यदि किसी त्रिभुज की तीन माध्यिकाएँ - m_a, m_b, m_c दी गई हैं तो त्रिभुज का क्षेत्रफल है

$$\boxed{\Delta = \frac{4}{3}\sqrt{S_m(S_m - m_a)(S_m - m_b)(S_m - m_c)}}$$

जहाँ, $S_m = \frac{m_a + m_b + m_c}{2}$

☞ यदि $m_a^2 = m_b^2 + m_c^2$, तो

$$\boxed{\text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{2}{3}m_b\, m_c}$$



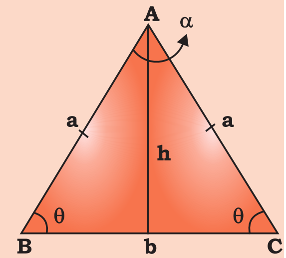
समद्विबाहु त्रिभुज

समद्विबाहु त्रिभुज वह त्रिभुज है जिसमें दो भुजाएँ समान लंबाई की तथा दो कोण समान माप के होते हैं।

- भुजा (AB = AC) = a
- परिमाप = 2a + b
- क्षेत्रफल $= \frac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2} = \frac{1}{2}a^2\sin\theta$
- ऊंचाई

$$= \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} = \frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{2} = \frac{a^2}{2R}$$

- परित्रिज्या (R) $= \frac{a^2}{\sqrt{4a^2 - b^2}}$
- आधार $= \frac{a}{R}\sqrt{(2R+a)(2R-a)}$



Ex. एक समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी भुजाएँ 8 सेमी, 5 सेमी और 5 सेमी हैं।

HINTS क्षेत्रफल $= \frac{8}{4}\sqrt{4\times 5^2 - 8^2}$

$= 2\sqrt{(36)} = 12$ सेमी²

Ex. एक समद्विबाहु त्रिभुज का परिमाप 100 सेमी है। यदि आधार 36 सेमी है, तो इसका अर्द्ध परिमाप (सेंटीमीटर में) ज्ञात कीजिए।

HINTS अर्द्ध परिमाप $= \frac{100}{2} = 50$ सेमी

Ex. एक समद्विबाहु त्रिभुज का परिमाप 91 सेमी है। यदि बराबर भुजाओं में से एक की माप 28 सेमी है, तो दूसरी असमान भुजा का मान क्या है?

HINTS एक बराबर भुजा = 28 सेमी

समद्विबाहु त्रिभुज का परिमाप = 91

$\Rightarrow 28 + 28 + a = 91 \Rightarrow a = 35$ सेमी

Ex. एक समद्विबाहु त्रिभुज की प्रत्येक बराबर भुजा और तीसरी भुजा की लंबाई का अनुपात 3 : 5 है। यदि त्रिभुज का क्षेत्रफल $30\sqrt{11}$ सेमी² है, तो तीसरी भुजा की लंबाई (सेमी में) क्या है?

HINTS मान लीजिए, बराबर भुजाओं की लंबाई $= 3x$

तीसरी भुजा की लंबाई $= 5x$

$$AD = \sqrt{9x^2 - \frac{25x^2}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{36x^2 - 25x^2}{4}} = \frac{x\sqrt{11}}{2}$$

प्रश्नानुसार,

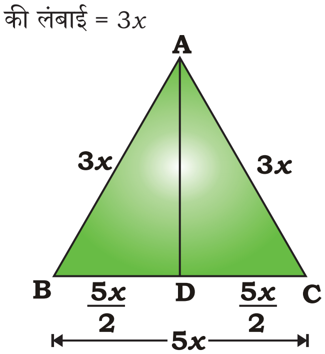
त्रिभुज का क्षेत्रफल $= 30\sqrt{11}$ सेमी²

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\times 5x \times \frac{x\sqrt{11}}{2} = 30\sqrt{11}$$

$\Rightarrow x = 2\sqrt{6}$

$\therefore BC = 5x = 5 \times 2\sqrt{6} = 10\sqrt{6}$ सेमी

$\therefore$ तीसरी भुजा की लंबाई $= 10\sqrt{6}$ सेमी

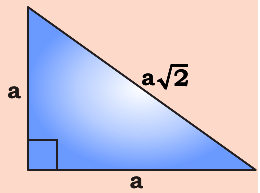


समद्विबाहु-समकोण त्रिभुज

- परिमाप (P) = $a(2+\sqrt{2})$

  $= a\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)$

- क्षेत्रफल = $\frac{a^2}{2}$



Ex. यदि एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज का परिमाप $8(\sqrt{2}+1)$ सेमी है, तो त्रिभुज के कर्ण की लंबाई क्या है?

HINTS $8(\sqrt{2}+1) = a\times\sqrt{2}(\sqrt{2}+1) \Rightarrow a = 4\sqrt{2}$

$\therefore$ कर्ण = $a\sqrt{2} = 4\times 2 = 8$ सेमी

Ex. एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल 16 वर्ग मीटर है। इसका कर्ण ______ है।

HINTS समद्विबाहु समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल= $\frac{a^2}{4}$

$\Rightarrow \frac{a^2}{4} = 16 \Rightarrow a^2 = 64 \Rightarrow a = 8$

Ex. एक समद्विबाहु, समकोण त्रिभुज का परिमाप 2p इकाई है। उसी त्रिभुज का क्षेत्रफल है-

HINTS मान लीजिए, समद्विबाहु समकोण Δ की भुजा = AB = AC = a

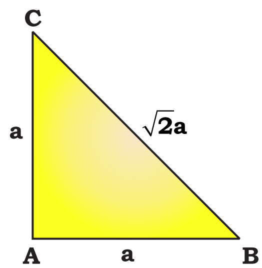
$\Rightarrow BC = \sqrt{2}a$

$\because AB + AC + BC = \Delta ABC$ का परिमाप

$\Rightarrow 2p = 2a + \sqrt{2}a$

$\Rightarrow p = a + \frac{a}{\sqrt{2}}$

क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}\times a\times a = \frac{1}{2}a^2$



$$= \frac{1}{2}\left(\frac{p}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\right)^2 = \frac{p^2}{(\sqrt{2}+1)^2} = \frac{p^2(2+1-2\sqrt{2})}{1} = p^2(3-2\sqrt{2})$$

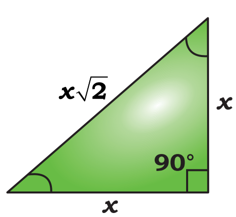
Ex. एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज का परिमाप 30 मीटर है। इसका क्षेत्रफल (मीटर² में) ज्ञात कीजिए। (निकटतम पूर्णांक मान तक पूर्णांकित)

HINTS परिमाप = $x + x + x\sqrt{2}$

$\Rightarrow 2x + x\sqrt{2} = 30$

$\Rightarrow x = \frac{30}{2+\sqrt{2}} = \frac{30\times(2-\sqrt{2})}{2}$

$= 15(2-\sqrt{2})$



त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}\times[15(2-1.41)]^2$

$= \frac{225\times 0.59\times 0.59}{2} \approx 39$ मी²

वैकल्पिक विधि

2p = 30 मी $\Rightarrow$ p = 15 मी

त्रिभुज का क्षेत्रफल = $p^2(3-2\sqrt{2}) = 15^2(3-2\sqrt{2})$

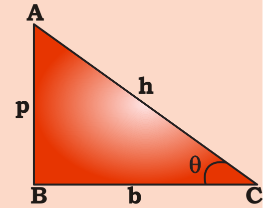
= 225 × 0. 172 ~ 39 मी²

समकोण त्रिभुज

समकोण त्रिभुज वह त्रिभुज है जिसमें दो भुजाएँ लंबवत होती हैं, जो समकोण बनाती हैं।

- $p^2 + b^2 = h^2$
- परिमाप = p + b + h
- त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}\times p\times b$
- समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल

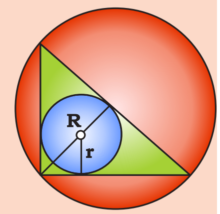
  $= \frac{h^2}{4}\sin 2\theta$



- अंत:त्रिज्या (r) = $\frac{p+b-h}{2}$ 'या'

  $\left[\frac{\text{लंब + आधार – कर्ण}}{2}\right]$

- परिमाप (R) = $\frac{h}{2}$ 'या' $\left[\frac{\text{कर्ण}}{2}\right]$



Ex. यदि एक त्रिभुज जिसका आधार 6 सेमी है, का क्षेत्रफल 18 सेमी² है, तो उसकी ऊँचाई क्या है?

HINTS त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × आधार × ऊँचाई

$\Rightarrow 18 = \frac{1}{2}\times 6\times$ ऊंचाई

$\Rightarrow$ ऊंचाई = 6 सेमी

Ex. एक समकोण त्रिभुज का एक कोण 15° है और कर्ण 1 मीटर है। त्रिभुज का क्षेत्रफल (वर्ग सेमी में) है

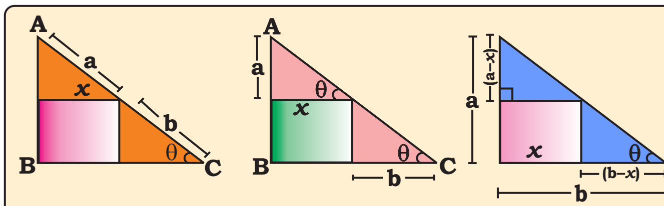
HINTS क्षेत्रफल = $\frac{h^2}{4}\sin 2\theta$

$= \frac{100\times 100}{4}\times \sin 30° = 1250$ सेमी²

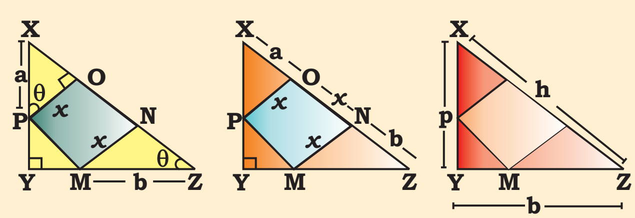
Ex. यदि किसी समकोण Δ का कर्ण 10 सेमी है, तो उसका अधिकतम क्षेत्रफल क्या हो सकता है?

HINTS क्षेत्रफल$_{\text{अधिकतम}}$ = $\frac{10\times 10}{4}$ = 25 सेमी²

समकोण त्रिभुज के अंदर वर्ग



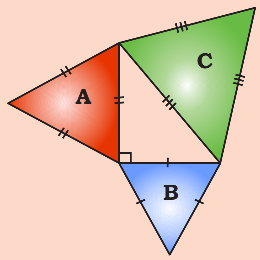
$\boxed{x = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}$ $\boxed{x = \sqrt{ab}}$ $\boxed{x = \frac{ab}{a+b}}$



$\boxed{x = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}$ $\boxed{x = \sqrt{ab}}$ $\boxed{x = \frac{p\times b\times h}{p^2+b^2+h^2}}$

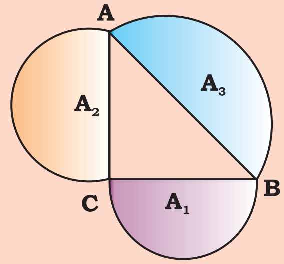
छायांकित भाग का क्षेत्रफल

समकोण त्रिभुज की प्रत्येक भुजा पर समबाहु त्रिभुज का निर्माण



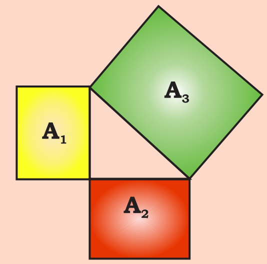
क्षेत्रफल (ΔC) = क्षेत्रफल (ΔA) + क्षेत्रफल (ΔB)

समकोण त्रिभुज की प्रत्येक भुजा पर अर्धवृत्त का निर्माण



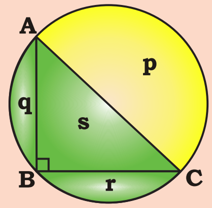
क्षेत्रफल (A_3) = क्षेत्रफल (A_1) + क्षेत्रफल (A_2)

समकोण त्रिभुज की प्रत्येक भुजा पर वर्ग का निर्माण

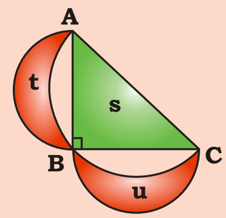


क्षेत्रफल (A_3) = क्षेत्रफल (A_2) + क्षेत्रफल (A_1)

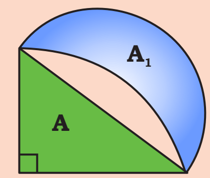
- छायांकित भाग (p) का क्षेत्रफल = भाग (q), (r) और (s) के क्षेत्रफल का योग



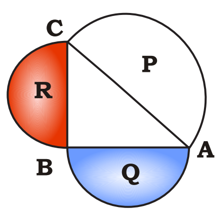
- छायांकित भाग (s) का क्षेत्रफल = भाग (t) और (u) के क्षेत्रफल का योग



- छायांकित भाग (A_1) का क्षेत्रफल = त्रिभुज (A) का क्षेत्रफल



Ex. छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जहाँ AC = 10 सेमी.

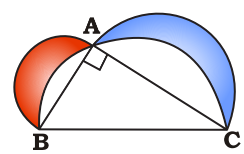


HINTS कुल आवश्यक क्षेत्रफल

= कर्ण पर बने अर्धवृत्त का क्षेत्रफल

$= \dfrac{\pi \times 10^2}{4} = 25\pi$ सेमी^{2}

Ex. दी गई आकृति में, ΔABC की तीन भुजाओं पर 3 अर्धवृत्त खींचे गए हैं। यदि AB = 21 सेमी, AC = 28 सेमी और BC = 35 सेमी है, तो छायांकित भाग का क्षेत्रफल (सेमी^{2} में) क्या है?



HINTS

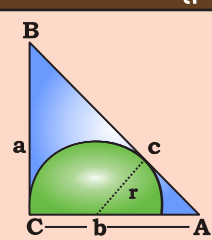
छायांकित भाग का क्षेत्रफल = ΔABC का क्षेत्रफल

$= \dfrac{1}{2} \times 21 \times 28 = 294$ सेमी^{2}

महत्त्वपूर्ण परिणाम

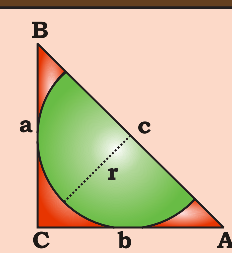
☞ जब एक समकोण त्रिभुज के अन्दर एक अर्धवृत्त अंकित किया जाता है, जैसा कि चित्र में दिखाया गया है। तब–

$$\boxed{\text{त्रिज्या } (r) = \frac{ab}{a+c}}$$



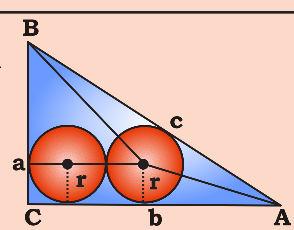
☞ जब r-त्रिज्या वाला एक अर्धवृत्त एक समकोण त्रिभुज में अंकित होता है जो कर्ण पर स्थित होता है जैसा कि चित्र में दिखाया गया है, तो

$$\boxed{\text{त्रिज्या } (r) = \frac{ab}{a+b}}$$



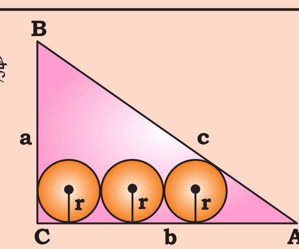
☞ जब समान त्रिज्या वाले दो वृत्तों को एक समकोण त्रिभुज में अंकित किया जाता है जैसा कि चित्र में दिखाया गया है, तो

$$\boxed{\text{त्रिज्या } (r) = \frac{ab}{3a+b+c}}$$



☞ जब समान त्रिज्या वाले तीन वृत्तों को एक समकोण त्रिभुज में अंकित किया जाता है जैसा कि चित्र में दिखाया गया है, तो

$$\boxed{\text{त्रिज्या } (r) = \frac{ab}{5a+b+c}}$$

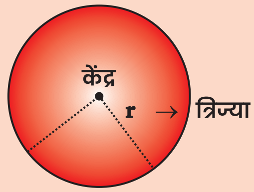


वृत्त

एक वृत्त एक बंद 2D आकृति है जिसमें समतल के सभी बिंदुओं का समूह एक निश्चित बिंदु से समान दूरी पर होता है जिसे केंद्र कहते हैं।

- व्यास (d) = $2r = \sqrt{\frac{4A}{\pi}}$

  जहाँ, r = त्रिज्या, A = क्षेत्रफल
- वृत्त का क्षेत्रफल = πr^2
- वृत्त की परिधि = $2\pi r$



त्रिज्या	परिधि = $2\pi r$	क्षेत्रफल = πr^2
7	44	154
↓	↓	↓
7k	44k	$154k^2$
↓	↓	↓
(14 = 7×2)	44×2	154×2^2
↓	↓	↓
$\left(3.5 = 7\times\frac{1}{2}\right)$	$44\times\frac{1}{2} = 22$	$154\times\frac{1}{4} = 38.5$

Ex. एक वृत्त का क्षेत्रफल 1386 वर्ग सेमी है। वृत्त की त्रिज्या क्या है? [$\pi = 22/7$ लीजिए]

HINTS वृत्त का क्षेत्रफल= πr^2

$\Rightarrow 1386 = \frac{22}{7}\times r^2$

$\Rightarrow r^2 = \frac{1386\times7}{22}$

$\Rightarrow r^2 = 441$

$\Rightarrow r = 21$ सेमी

वैकल्पिक विधि

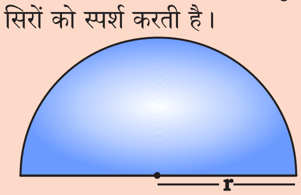
त्रिज्या	क्षेत्रफल
7	154
↓ ×3	↓ $\times3^2$
21	1386 सेमी²

अर्द्ध वृत्त

अर्धवृत्त को एक ऐसे आधे वृत्त के रूप में परिभाषित किया जाता है जो किसी वृत्त को दो बराबर भागों में काटने से बनता है। यह तब बनता है जब एक रेखा वृत्त के केंद्र से होकर गुजरती है और उसके दोनों सिरों को स्पर्श करती है।

- अर्धवृत्त का क्षेत्रफल = $\frac{\pi r^2}{2}$
- अर्धवृत्त की परिधि

  = $\pi r + 2r$



त्रिज्या	परिधि	क्षेत्रफल
7	36	77
	↓	↓
	$2r + \pi r$	$\frac{\pi r^2}{2}$
	$= 2\times7+\frac{22}{7}\times7$	$=\frac{22}{7}\times\frac{7\times7}{2}$
	= 36	= 77

Ex. एक अर्धवृत्ताकार शीट की त्रिज्या 21 सेमी है, इसकी परिधि ज्ञात कीजिए।

HINTS

त्रिज्या	परिधि
7	36
↓ ×3	↓ ×3
21	108

Ex. 35 सेमी त्रिज्या वाले अर्धवृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

HINTS

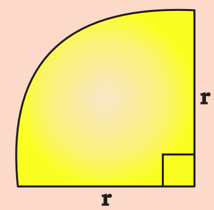
त्रिज्या	क्षेत्रफल
7	77
↓ ×5	↓ $\times5^2$
35	1925 सेमी²

चतुर्थांश

यह एक वृत्त का एक-चौथाई भाग है। यह दो रेखाओं के समूह से बनता है जो प्रकृति में लंबवत होती हैं।

- वृत्त के चतुर्थांश का क्षेत्रफल = $\frac{1}{4}\pi r^2$
- वृत्त के चतुर्थांश की परिधि

  $= \frac{\pi r}{2} + 2r$



त्रिज्या	परिधि	क्षेत्रफल
7	25	$\frac{154}{4} = 38.5$
	↓	↓
	$2r + \frac{2\pi r}{4}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
	$= 2\times7+2\times\frac{22}{7}\times\frac{7}{4}$	$=\frac{22}{7}\times\frac{7^2}{4}$
	= 25	= 38.5

Ex. 14 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त के चतुर्थांश का क्षेत्रफल क्या है?

HINTS क्षेत्रफल = $\frac{1}{4}\pi r^2 = \frac{1}{4}\times\frac{22}{7}\times14^2 = 154$ सेमी²

वैकल्पिक विधि

त्रिज्या	क्षेत्रफल
7	38.5
↓ ×2	↓ $\times2^2$
14	154

Ex. 21 सेमी त्रिज्या वाले एक वृत्त के चतुर्थांश का परिमाप (परिधि) ज्ञात कीजिए।

HINTS चतुर्थांश का परिमाप = $\frac{\pi r}{2} + 2r$

$= \frac{22}{7}\times\frac{21}{2} + 2\times21$

= 33 + 42 = 75 सेमी²

वैकल्पिक विधि

त्रिज्या	परिधि
7	25
↓ ×3	↓ ×3
21	75

त्रिज्यखंड

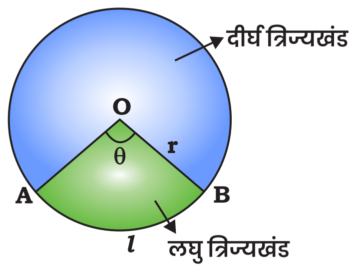
त्रिज्यखंड (सेक्टर) वृत्त का वह भाग है जो दो त्रिज्याओं और चाप के बीच घिरा होता है।

- **r** = वृत्त की त्रिज्या।
- **θ** = त्रिज्यखंड का केंद्रीय कोण (डिग्री या रेडियन में)
- चाप की लंबाई **(l)** = वक्रीय सीमा की लंबाई
- **क्षेत्रफल (A)** = त्रिज्यखंड द्वारा घेरा गया क्षेत्र

दीर्घ त्रिज्यखंड

यदि $\theta > 180°$

- क्षेत्रफल = $\frac{\theta}{360°} \times \pi r^2$
- चाप की लंबाई = $\frac{\theta}{360°} \times 2\pi r$
- त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times l\, r$



लघु त्रिज्यखंड

यदि $\theta < 180°$

- क्षेत्रफल = $1 - \frac{\theta}{360°} \times \pi r^2$
- चाप की लंबाई = $1 - \frac{\theta}{360°} \times 2\pi r$

Ex. यदि चाप की लंबाई = 6 सेमी और वृत्त की त्रिज्या = 5 सेमी है, तो वृत्त के त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

HINTS क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times 6 \times 5 = 15$ सेमी²

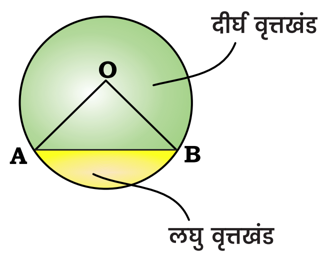
Ex. 7 सेमी त्रिज्या वाले एक वृत्त के त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसका केन्द्रीय कोण 90° है।

HINTS क्षेत्रफल = $\frac{\pi r^2}{360°} \times 90° = \frac{\pi \times 7 \times 7}{4} = \frac{77}{2} = 38.5$ सेमी²

"केन्द्रीय कोण यह निर्धारित करता है कि कोई त्रिज्यखंड दीर्घ है या लघु"

वृत्तखंड

खण्ड जीवा और संगत चाप के बीच का क्षेत्र है।



लघु वृत्तखंड

यदि θ डिग्री में है:-

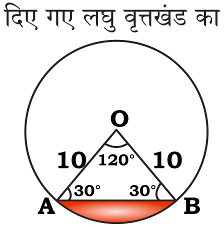
- लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल

$= r^2\left[\frac{\pi\theta}{360°} - \frac{\sin\theta}{2}\right]$

यदि θ रेडियन में है:-

- लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल = $\frac{r^2}{2}(\theta - \sin\theta)$

Ex. नीचे दिए गए चित्र में दिए गए लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



HINTS लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल = त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल – ΔOAB का क्षेत्रफल

$= \frac{\pi r^2\theta}{360^0} - \frac{1}{2}r^2 \sin\theta = \pi 10^2 - \frac{1}{2} \times 10^2 \times \sin 120°$

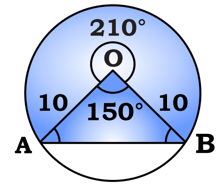
$= \left(\frac{100\pi}{3} - 25\sqrt{3}\right)$ सेमी²

दीर्घ वृत्तखंड

दीर्घ वृत्तखंड का क्षेत्रफल = $\left(\frac{\pi r^2\theta}{360°} + \frac{1}{2}r^2\sin\theta\right)$

वृत्तखंड का परिमाप = $2r\left[\frac{\pi\theta}{360°} + \frac{\sin\theta}{2}\right]$

Ex. दी गई आकृति में दीर्घ वृत्तखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



HINTS दीर्घ वृत्तखंड का क्षेत्रफल

= त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल (210°) + ΔOAB का क्षेत्रफल

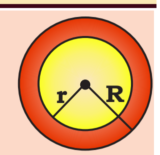
$= \frac{\pi r^2\theta}{360^0} + \frac{1}{2}r^2 \sin\theta$

$= \pi 10^2 \frac{210°}{360°} + \frac{1}{2} \times 10^2 \times \sin 150° = \left(\frac{175\pi}{3} + 25\right)$ सेमी²

वलय (Ring)

यदि R और r दो संकेंद्रित वृत्तों की त्रिज्याएँ हैं, तो

- दो वृत्तों से घिरा क्षेत्रफल = π (R + r) (R – r)
- पथ की चौड़ाई = $\frac{\text{बाह्य परिधि – आंतरिक परिधि}}{2\pi}$



Ex. संकेन्द्रीय वृत्तों के बीच का क्षेत्रफल 770 सेमी² है तथा बाह्य वृत्त की त्रिज्या 21 सेमी है, तो आंतरिक वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

HINTS दो वृत्तों के बीच का क्षेत्रफल = $\pi(R^2 - r^2)$

$\Rightarrow \frac{22}{7}(21^2 - r^2) = 770$ सेमी² $\Rightarrow r = \sqrt{196} = 14$ सेमी

Ex. दो संकेन्द्रीय वृत्तों से घिरे एक वृत्ताकार पथ का क्षेत्रफल 3080 वर्ग मीटर है। यदि वृत्ताकार पथ के बाहरी किनारे और भीतरी किनारे की त्रिज्याओं के बीच का अंतर 10 मीटर है, तो दोनों त्रिज्याओं का योग (मीटर में) क्या है?

HINTS $\pi(R^2 - r^2) = 3080$

$\Rightarrow \frac{22}{7}(R + r)(R - r) = 3080 \Rightarrow R + r = 98$ सेमी

पहिया

एक घूमते पहिये द्वारा एक मिनट में पूरी की गई परिक्रमाओं की संख्या

$= \frac{\text{1 मिनट में तय की गई दूरी}}{\text{परिधि}}$

Ex. एक एथलीट 7 मीटर त्रिज्या वाले एक वृत्ताकार मैदान के चारों ओर 3 मिनट 40 सेकंड में 8 चक्कर लगाता है। उसकी गति (किमी/घंटा में) क्या है?

HINTS 8 राउंड में तय की गई कुल दूरी

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 8 = 352$ मी $= \frac{352}{1000}$ किमी

कुल समय = 3 मिनट 40 सेकंड = 220 सेकंड

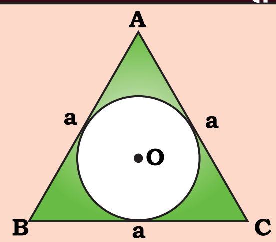
$= \frac{220}{3600}$ घंटे $= \frac{11}{180}$ घंटे

गति = $\frac{352}{1000} \times \frac{180}{11} = \frac{144}{25}$ किमी/घंटा

महत्त्वपूर्ण परिणाम

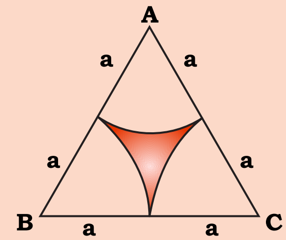
☞ छायांकित भाग का क्षेत्रफल

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 - \pi\left(\frac{a^2}{12}\right)$$



☞ छायांकित भाग का क्षेत्रफल

$$= a^2\left(\sqrt{3} - \frac{11}{7}\right)$$

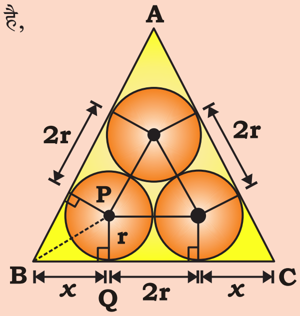


☞ एक समबाहु त्रिभुज तीनों वृत्तों के परिगत है, जिनमें से प्रत्येक की त्रिज्या 'r' है, तो

भुजा = 2r (√3 + 1)

त्रिभुज का परिमाप

= 3 × भुजा = 6r(√3 + 1)

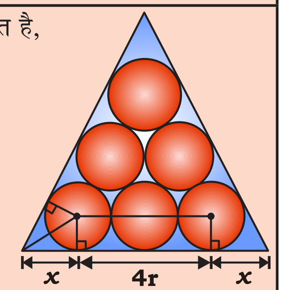


☞ एक समबाहु त्रिभुज सभी छह वृत्तों के परिगत है, जिनमें से प्रत्येक की त्रिज्या 'r' है, तो

भुजा = 2r(√3 + 2)

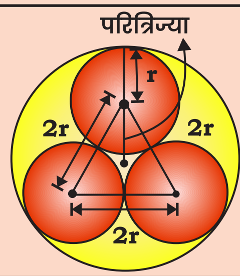
त्रिभुज का परिमाप

= 6r(√3 + 2)



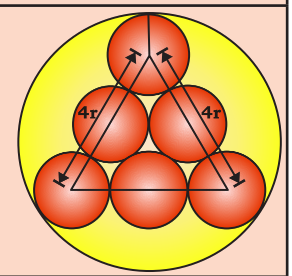
☞ त्रिज्या r वाले तीन बराबर वृत्त एक बड़े वृत्त द्वारा परिबद्ध हैं।

$$\text{बड़े वृत्त की त्रिज्या} = r \times \left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)$$

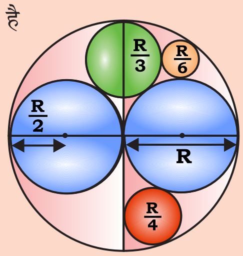


☞ छः बराबर वृत्त, जिनमें से प्रत्येक की त्रिज्या r है, एक बड़े वृत्त द्वारा परिबद्ध हैं।

$$\therefore \text{ बड़े वृत्त की त्रिज्या} = \frac{r}{\sqrt{3}}(\sqrt{3}+4)$$

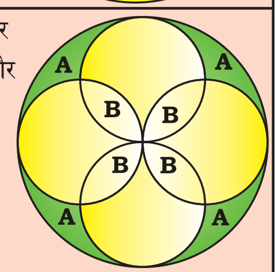


☞ चित्र के अनुसार, यदि बाहरी वृत्त की त्रिज्या R है तो प्रत्येक वृत्त की त्रिज्या:



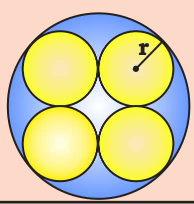
☞ दी गई आकृति के अनुसार, एक बड़ा वृत्त और उसके अन्दर 4 छोटे वृत्त दिए गए हैं, तो A और B का अनुपात 1:1 होगा।

$$A = B$$
$$A : B = 1 : 1$$



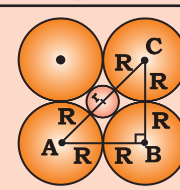
☞ दी गई आकृति में सभी आंतरिक वृत्त की त्रिज्या 'r' है तो बड़े (बाहरी) वृत्त की त्रिज्या

$$R = \left(\sqrt{2}+1\right)r$$



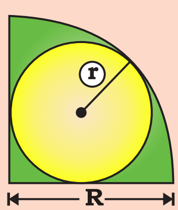
☞ जब सभी बाहरी वृत्तों की त्रिज्याएँ 'R' हों, तो आंतरिक वृत्त की त्रिज्या

$$r = (\sqrt{2}-1)R$$



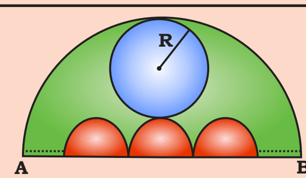
☞ जब एक वृत्त को चित्र में दिखाए अनुसार चतुर्थांश में अंकित किया जाता है तब

$$r = (\sqrt{2}-1)R$$



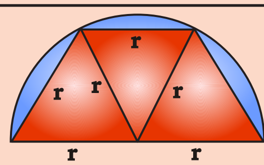
☞ $R = \frac{n(AB)}{4(n+1)}$

n = अर्धवृत्त की संख्या



☞ त्रिज्या 'r' सेमी के अर्धवृत्त में अंकित तीन समबाहु त्रिभुज का कुल क्षेत्रफल

$$\text{क्षेत्रफल } = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{4}r^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$$



☞ आकृति के अनुसार, एक चतुर्थांश में दो अर्धवृत्त अंकित हैं।

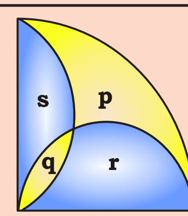
(i) भाग (p) का क्षेत्रफल = भाग (q) का क्षेत्रफल

(ii) छायांकित भाग (r) का क्षेत्रफल

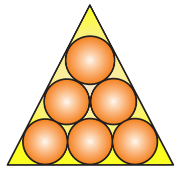
= छायांकित भाग (s) का क्षेत्रफल

(iii) भाग (p), (q), (r), (s) के क्षेत्रफलों का अनुपात क्रमशः है

p : q : r : s = 4 : 4 : 7 : 7

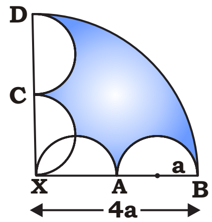


Ex. एक समबाहु त्रिभुज सभी वृत्तों के परिगत है, जिनमें से प्रत्येक की त्रिज्या 10 सेमी है। समबाहु त्रिभुज का परिमाप क्या है?



HINTS परिमाप = $3 \times 2 \times 10\ (\sqrt{3}+2) = 60\,(\sqrt{3}+2)$ सेमी

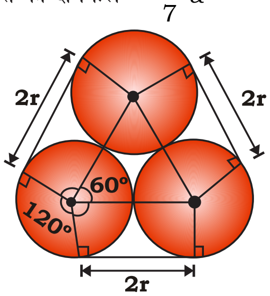
Ex. XBD एक वृत्त का चतुर्थांश है जहाँ XB = 4a सेमी, XA = AB = XC = CD है। XA, AB, XC और CD को व्यास मानकर चार अर्धवृत्त खींचे गए हैं। छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



HINTS XB = 4a सेमी

छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल = त्रिज्या (4a) के चतुर्थांश का क्षेत्रफल – 4 × त्रिज्या (a) के अर्धवृत्त का क्षेत्रफल + त्रिज्या (a) के पत्ते का क्षेत्रफल = $\frac{48}{7}a^2$

Ex. समान त्रिज्या r सेमी वाले तीन वृत्ताकार वलय एक-दूसरे को स्पर्श कर रहे हैं। एक डोरी इन वलय समूहों के चारों ओर बहुत ही सटीक रूप से घूमती है। तीनों वलय को इस प्रकार बाँधने के लिए आवश्यक डोरी की न्यूनतम लंबाई क्या है?



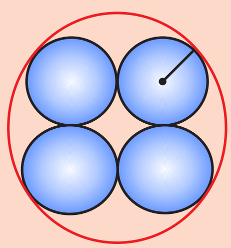
HINTS

तीन चाप की लंबाई = $3 \times \left(\frac{2\pi r}{360°} \times 120°\right) = 2\pi r$

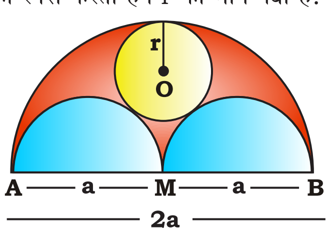
$\therefore$ डोरी की लंबाई = $2\pi r$ + व्यास × वृत्तों की संख्या

$= 2\pi r + 3 \times 2r = 2r(\pi + 3)$

☞ समान त्रिज्या r सेमी वाले चार वृत्ताकार छल्ले एक-दूसरे को स्पर्श कर रहे हैं। एक डोरी इन छल्लों के चारों ओर बहुत कसकर बंधी हुई है। तो डोरी की न्यूनतम लंबाई $= 8r + 2\pi r$



Ex. नीचे दी गई आकृति में, AB एक 2a लंबाई की रेखा है, जिसका मध्य-बिंदु M है। एक ओर AM, MB और AB को व्यास मानकर अर्धवृत्त खींचे गए हैं। केंद्र O और त्रिज्या r वाला एक वृत्त इस प्रकार खींचा गया है कि यह वृत्त तीनों अर्धवृत्तों को स्पर्श करता है। r का मान क्या है?



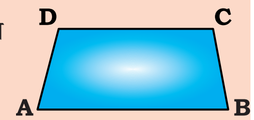
HINTS $2R = 2a \Rightarrow R = a$

$\therefore r = \frac{R}{3} = \frac{a}{3}$

चतुर्भुज

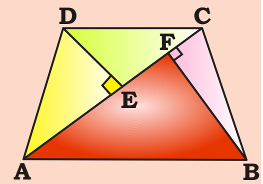
चतुर्भुज एक बहुभुज है जिसमें चार भुजाएँ, चार शीर्ष और चार कोण होते हैं।

- चतुर्भुज के आंतरिक कोणों का योग सदैव 360° होता है।



$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$

- चतुर्भुज का क्षेत्रफल



$= \left(\frac{1}{2} \times AC \times DE\right) + \left(\frac{1}{2} \times AC \times BF\right)$

$= \frac{1}{2} \times AC\ (DE + BF)$

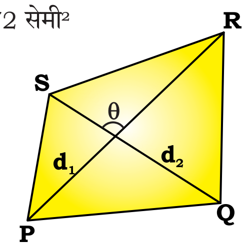
$= \frac{1}{2} \times$ विकर्ण $\times$ (उस पर डाले गए लंबों का योग)

Ex. चतुर्भुज ABCD में, AC = 12 सेमी, यदि B और D से रेखा AC पर खींचे गए लंबों की लंबाई 5 सेमी और 7 सेमी है, तो चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल है:

HINTS क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times 12 \times (7 + 5) = 72$ सेमी²

☞ d_1 और d_2 चतुर्भुज PQRS के विकर्ण हैं।

$\boxed{\text{क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2 \sin\theta}$

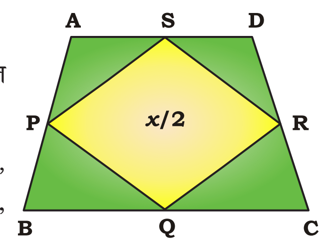


☞ चतुर्भुज की आसन्न भुजा के मध्य-बिंदु को मिलाने से बना चतुर्भुज आधे क्षेत्रफल वाला एक समांतर चतुर्भुज होगा।

यदि P, Q, R, S क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्य-बिंदु हैं, तो–

(a) PQRS एक समांतर चतुर्भुज है।

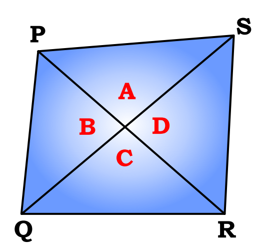
(b) यदि चतुर्भुज का क्षेत्रफल x है, तो



$\boxed{\text{समांतर चतुर्भुज PQRS का क्षेत्रफल} = \frac{x}{2}}$

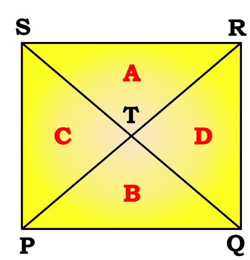
☞ किसी भी चतुर्भुज में A, B, C और D दो विकर्णों द्वारा बनाए गए त्रिभुजों के क्षेत्रफल हैं तो

$\boxed{A \times C = B \times D}$



☞ PQRS कोई भी आयत/वर्ग है। T इसके अंदर एक बिंदु है। A, B, C, D क्षेत्रफल हैं, तो

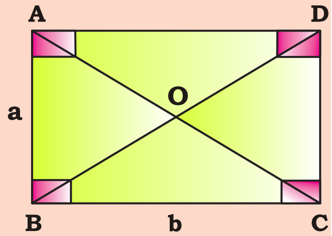
$\boxed{A + B = C + D}$



चतुर्भुज के प्रकार

- आयत
- वर्ग
- चतुर्भुज
- विषमकोण
- समलंब

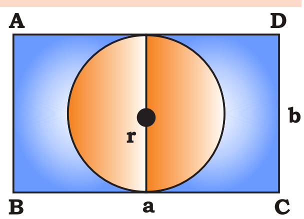
आयत



- AB = CD = a और
  BC = AD = b
- AC = BD = $\sqrt{a^2 + b^2}$
- AO = OC = OB = OD
  = $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$
- परिमाप = 2(लंबाई + चौड़ाई) = 2(a + b)
- क्षेत्रफल = लंबाई × चौड़ाई = ab
- ΔAOB का क्षेत्रफल = ΔDOC का क्षेत्रफल = ΔAOD का क्षेत्रफल
  = ΔBOC का क्षेत्रफल= $\dfrac{ab}{4}$

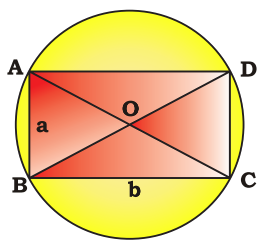
☞ अधिकतम बड़े संभावित वृत्त की त्रिज्या

$r = \dfrac{\text{चौड़ाई}}{2} = \dfrac{b}{2}$

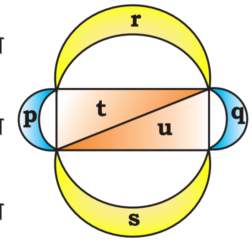


☞ आयत ABCD के परिगत वृत्त की त्रिज्या R हो, तो

$R = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$



☞



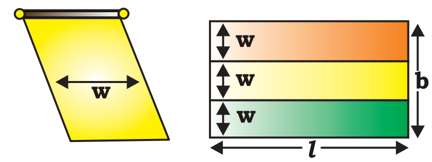
(i) छायांकित भाग (p) का क्षेत्रफल = छायांकित भाग (q) का क्षेत्रफल

(ii) छायांकित भाग (r) का क्षेत्रफल = छायांकित भाग (s) का क्षेत्रफल

(iii) छायांकित भाग (t) का क्षेत्रफल = छायांकित भाग (u) का क्षेत्रफल

(iv) छायांकित भाग (p), (q), (r), (s) का क्षेत्रफल = आयताकार भाग का क्षेत्रफल

☞ एक कालीन की चौड़ाई निश्चित होती है



(i) मान लीजिए कि चौड़ाई w का कालीन $l \times b$ आयाम के फर्श को ढकता है

कालीन का क्षेत्रफल = फर्श का क्षेत्रफल ⇒ $l_c \times w = l \times b$

कालीन की आवश्यक लंबाई $(l_c) = \dfrac{lb}{w}$

(ii) मान लीजिए कि $(x \times y)$ आयाम वाली आयताकार टाइलें $(l \times b)$ आयाम वाले फर्श को ढकती हैं

⇒ n टाइल्स का क्षेत्रफल = फर्श का क्षेत्रफल

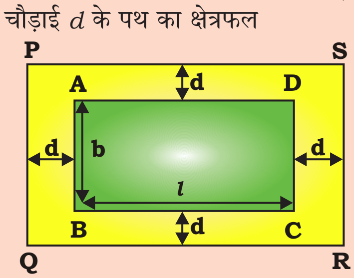
⇒ $n \times x \times y = l \times b \Rightarrow n = \dfrac{lb}{xy}$

(iii) यदि फर्श न्यूनतम संख्या में वर्गाकार टाइलों से ढका है, तो वर्गाकार टाइल की भुजा फर्श की लंबाई और चौड़ाई का HCF है।

> यदि आयत की लंबाई x गुना तथा चौड़ाई y गुना हो जाए, तो आयत का क्षेत्रफल xy गुना हो जाएगा।

एक आयत के अंदर/बाहर का पथ

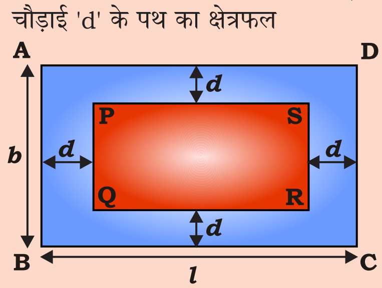
☞ आयत ABCD के बाहर चारों ओर एकसमान चौड़ाई d के पथ का क्षेत्रफल



पथ का क्षेत्रफल = $2d\,(l + b + 2d)$

पथ की परिधि = $4\,(l + b + 2d)$

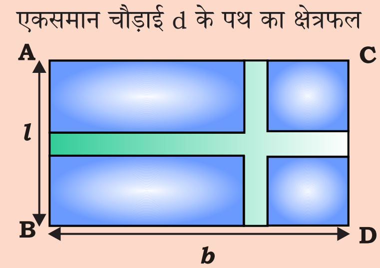
☞ आयत ABCD के अंदर चारों ओर एकसमान चौड़ाई 'd' के पथ का क्षेत्रफल



पथ का क्षेत्रफल = $2d\,(l + b - 2d)$

पथ का परिमाप = $4\,(l + b - 2d)$

☞ आयत ABCD में लंबाई और चौड़ाई के अनुदिश एकसमान चौड़ाई d के पथ का क्षेत्रफल



पथ का क्षेत्रफल = $(l + b - d)d$

पथ का परिमाप = $2\,(l + b - 2d)$

Ex. 10 मीटर चौड़ी एक सड़क बाहर से एक आयताकार बगीचे को घेरती है जिसका माप 200 मीटर × 180 मीटर है। पथ का क्षेत्रफल (वर्ग मीटर में) है:

HINTS पथ का क्षेत्रफल

= 2 × 10 (200 + 180 + 20) = 20 (400) = 8000 मी²

Ex. 37 मीटर × 30 मीटर विमाओं वाले एक आयताकार पार्क के भीतरी भाग में 570 वर्ग मीटर क्षेत्रफल में फैला एक पथ बनाया गया है। पथ की चौड़ाई क्या है?

(a) 10 मी (b) 15 मी (c) 5 मी (d) 28 मी

HINTS पथ का क्षेत्रफल = $2d \times (l + b - 2d)$

⇒ 570 = 2d × (37 + 30 – 2d)

⇒ 570 = 2d × (67 – 2d)

विकल्पों की मदद से, d = 5

570 = 2 × 5 × (67 – 10)

⇒ 570 = 570

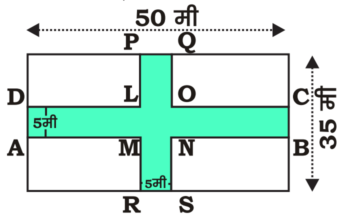
अत: पथ की चौड़ाई = 5 मीटर

Ex. नीचे दिया गया आरेख 50 मीटर लंबे और 35 मीटर चौड़े एक आयताकार मैदान के अंदर खींचे गए दो रास्तों को दर्शाता है। प्रत्येक रास्ते की चौड़ाई 5 मीटर है। छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

HINTS छायांकित भाग का क्षेत्रफल

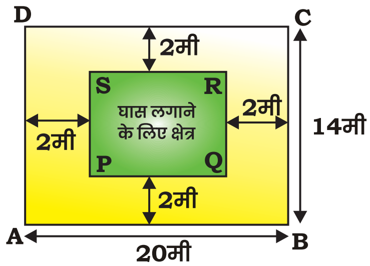
$= (l + b - d)d$

$= (50 + 35 - 5)5 = 400$ मी^{2}



Ex. 20 मीटर लंबे और 14 मीटर चौड़े एक आयताकार भूखंड को चारों ओर 2 मीटर जगह छोड़कर घास से ढकना है। घास लगाने के लिए आवश्यक क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

HINTS



घास वाले लॉन की लंबाई

$= 20 - 2 \times 2 = 20 - 4$

$= 16$ मी

घास वाले लॉन की चौड़ाई

$= 14 - 2 \times 2 = 14 - 4$

$= 10$ मी

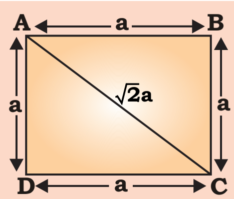
घास वाले लॉन का क्षेत्रफल = लंबाई × चौड़ाई

$= 16 \times 10 = 160$ मी^{2}

वर्ग

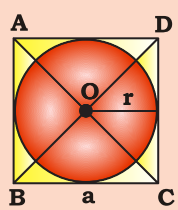
- परिमाप = 4 × भुजा = 4a
- क्षेत्रफल = (भुजा)^2 = a^2
- जब विकर्ण दिया गया हो तो,

  क्षेत्रफल $= \frac{(\text{विकर्ण})^2}{2} = \frac{d^2}{2}$



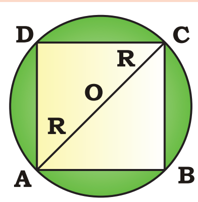
- ΔAOB का क्षेत्रफल = ΔBOC का क्षेत्रफल = ΔCOD का क्षेत्रफल

  = ΔDOA का क्षेत्रफल = $\frac{a^2}{4}$



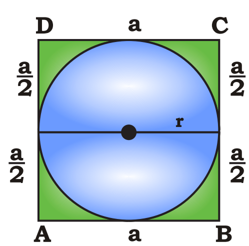
- भुजा 'a' के वर्ग के बाहर खींचे गए सबसे बड़े वृत्त की त्रिज्या

  परिवृत्त की त्रिज्या (R) = $\frac{a}{\sqrt{2}}$



- भुजा 'a' वाले वर्ग के अंदर अंकित सबसे बड़े वृत्त की त्रिज्या

  अंत:वृत्त की त्रिज्या (r) = $\frac{a}{2}$



- परित्रिज्या (R) : अंत:त्रिज्या (r) = $\sqrt{2} : 1$

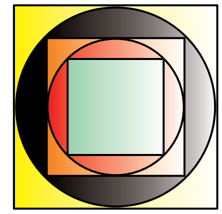
  ⇒ क्षेत्रफल = 2 : 1
- यदि विकर्ण या परिमाप में से कोई एक x गुना हो जाए तो क्षेत्रफल x^2 गुना हो जाएगा या $(x^2 - 1)$ गुना बढ़ जाएगा।

- दो वर्गों के लिए

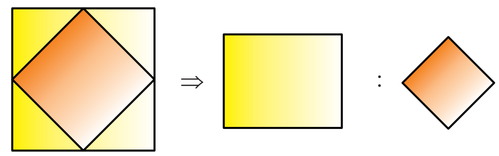
  (a) दो वर्गों के लिए भुजाओं का अनुपात = विकर्ण का अनुपात = परिमाप का अनुपात

  (b) क्षेत्रफल का अनुपात = (भुजाओं का अनुपात)^2 = (विकर्ण का अनुपात)^2 = (परिमाप का अनुपात)^2

☞ यदि हम एक वर्ग के अंदर एक वृत्त बनाते हैं और फिर वृत्त के अंदर एक वर्ग बनाते हैं और इसी तरह आगे बढ़ते हैं तो क्षेत्रफल आधा हो जाएगा और आगे भी ऐसे ही।

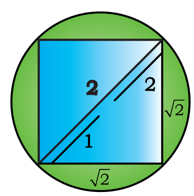


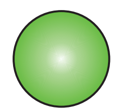
सबसे बड़े वर्ग का क्षेत्रफल : मध्य वर्ग का क्षेत्रफल : सबसे छोटे वर्ग का क्षेत्रफल = 4 : 2 : 1



क्षेत्रफल = 2 : 1

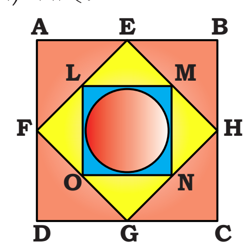
☞ वृत्त के क्षेत्रफल और वर्ग के क्षेत्रफल का अनुपात है:



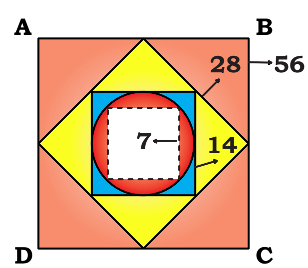


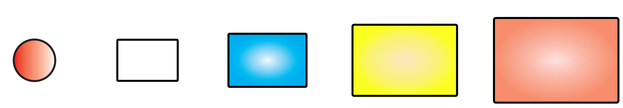
क्षेत्रफल = $\pi 1^2$	:	$(\sqrt{2})^2$
$= \pi$	:	2
$= \frac{22}{7}$	:	2
11	:	7

Ex. दी गई आकृति में, ABCD एक वर्ग है। EFGH, ABCD की भुजाओं के मध्य-बिंदुओं को मिलाकर बना एक वर्ग है। LMNO, EFGH की भुजाओं के मध्य-बिंदुओं को मिलाकर बना एक वर्ग है। LMNO के अंदर एक वृत्त बना है। यदि वृत्त का क्षेत्रफल 38.5 वर्ग सेमी है, तो वर्ग ABCD का क्षेत्रफल (वर्ग सेमी में) क्या है?



HINTS





11 : 7 : 14 : 28 : 56

38.5 सेमी^{2} 196 सेमी^{2}

जब एक वृत्त की परिधि एक वर्ग के परिमाप के बराबर हो तो क्षेत्रफल का अनुपात 14 : 11 होगा।

Ex. जब एक तार को वर्ग के आकार में मोड़ा जाता है, तो उसके द्वारा घेरा गया क्षेत्रफल 5929 सेमी² होता है। यदि तार को वृत्त के आकार में मोड़ा जाए, तो तार द्वारा घेरा गया क्षेत्रफल कितना होगा?

HINTS दिया गया है,

$a^2 = 5929$ सेमी² और $2\pi R = 4a$

$\Rightarrow R = \dfrac{4a}{2\pi} = \dfrac{2a}{\pi}$

क्षेत्रफल $= \pi R^2 = \pi \times \dfrac{2a}{\pi} \times \dfrac{2a}{\pi} = \dfrac{4a^2}{\pi}$

$= \dfrac{4 \times 5929 \times 7}{22} = 7546$ सेमी²

वैकल्पिक विधि

	वर्ग	:	वृत्त
क्षेत्रफल का अनुपात →	11	:	14
	×539		×539
क्षेत्रफल →	5929		$\boxed{7546}$

वृत्त का क्षेत्रफल = 7546 सेमी²

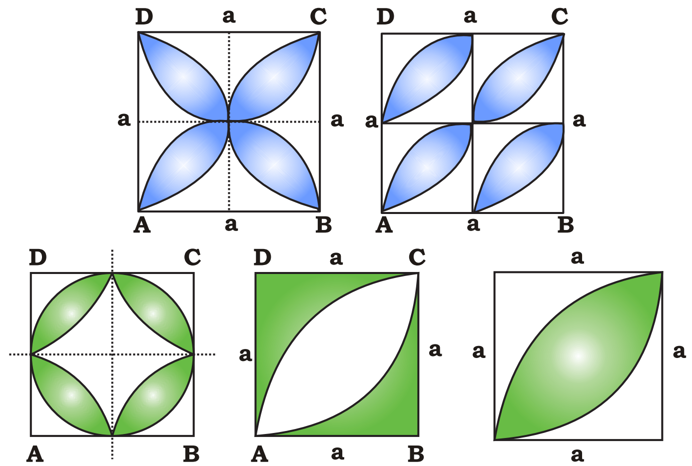
Ex. एक तांबे के तार को एक वर्ग के आकार में मोड़ा गया है और यह 30.25 सेमी² क्षेत्रफल घेरता है। यदि उसी तार को एक वृत्त बनाने के लिए मोड़ा जाए, तो वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

HINTS

	वर्ग	:	वृत्त
क्षेत्रफल का अनुपात →	11	:	14
	×2.75		×2.75
क्षेत्रफल →	30.25		$\boxed{38.5}$

वृत्त का क्षेत्रफल = 38.5 सेमी²

☞ आकृति के अनुसार छायांकित भाग का क्षेत्रफल



"प्रत्येक स्थिति में छायांकित भाग का क्षेत्रफल बराबर है"

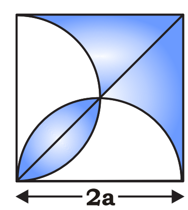
$\boxed{\text{प्रत्येक स्थिति में छायांकित भाग का क्षेत्रफल} = \frac{4}{7}a^2}$

Ex. ABCD एक वर्ग है जिसकी भुजा 14 सेमी है, छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

HINTS छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल $= \dfrac{4}{7}a^2$

$= \dfrac{4}{7} \times 14 \times 14 = 112$ सेमी²

Ex. यदि वर्ग की भुजा = 2a सेमी है, तो छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

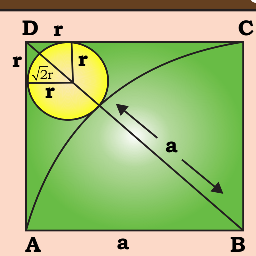


HINTS छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल = भुजा (2a) वाले वर्ग का क्षेत्रफल – 2 × त्रिज्या (a) वाले अर्धवृत्त का क्षेत्रफल + 2 त्रिज्या (a) वाले पत्ते का क्षेत्रफल = $2a^2$

महत्त्वपूर्ण परिणाम

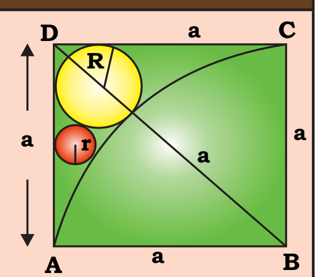
☞ ABCD भुजा 'a' का वर्ग है। AC एक वक्र है और त्रिज्या r का एक वृत्त खींचा गया है, तो

$\boxed{r = \left(\sqrt{2}-1\right)^2 a}$



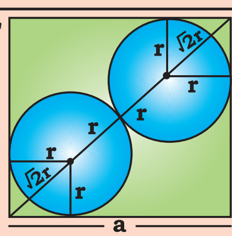
☞ ABCD भुजा 'a' का वर्ग है। AC एक वक्र है और त्रिज्या r और R के दो वृत्त खींचे गए हैं, तो

$\boxed{\frac{1}{\sqrt{r}} = \frac{1}{\sqrt{R}} + \frac{1}{\sqrt{a}}}$ $\boxed{r = \frac{R}{2}}$



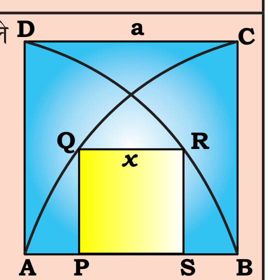
☞ जब समान त्रिज्या 'r' वाले दो वृत्तों को भुजा 'a' के एक वर्ग के अंदर रखा जाता है तो

$\boxed{r = \frac{a\left(\sqrt{2}-1\right)}{\sqrt{2}}}$



☞ ABCD और PQRS भुजाओं 'a' और x वाले वर्ग हैं। वक्र AC, BD, PQRS को Q और R पर काटते हैं।

$\boxed{x = \frac{3a}{5}}$

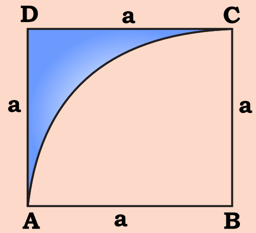


छायांकित भाग का क्षेत्रफल

☞ यदि वर्ग की भुजा = a सेमी तो

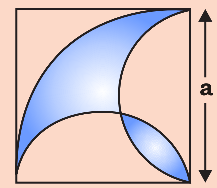
छायांकित भाग का क्षेत्रफल

$= \frac{a^2}{4}(4-\pi)$



☞ यदि वर्ग की भुजा = a सेमी तो

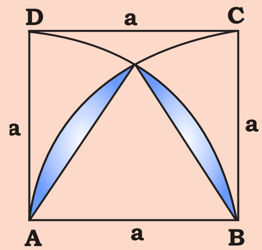
छायांकित भाग का क्षेत्रफल = $\frac{a^2(\pi-2)}{4}$



☞ निम्नलिखित आकृति में वर्ग की भुजा 'a' है।

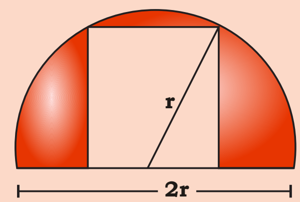
छायांकित भाग का क्षेत्रफल

$= 2\left(\frac{a^2\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}a^2\right)$



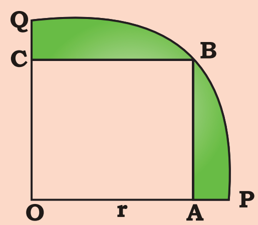
☞ त्रिज्या r के अर्धवृत्त के अन्दर खींचे जा सकने वाले सबसे बड़े वर्ग का क्षेत्रफल।

वर्ग का क्षेत्रफल = $\frac{4}{5}r^2$



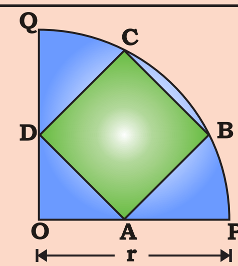
☞ त्रिज्या 'r' वाले वृत्त के चतुर्थांश में अंकित वर्ग का क्षेत्रफल (जैसा कि चित्र में दिखाया गया है)।

वर्ग का क्षेत्रफल = $\frac{r^2}{2}$



☞ त्रिज्या 'r' वाले वृत्त के चतुर्थांश में अंकित वर्ग का क्षेत्रफल (जैसा कि चित्र में दिखाया गया है)।

वर्ग का क्षेत्रफल = $\frac{2}{5}r^2$



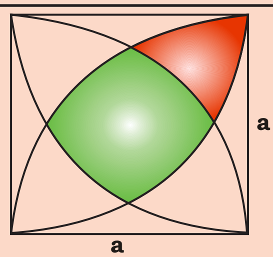
☞ आकृति के अनुसार छायांकित भाग का क्षेत्रफल

हरे भाग का क्षेत्रफल

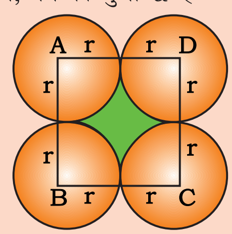
$= \frac{a^2}{3}\{3(1-\sqrt{3})+\pi\}$

लाल भाग का क्षेत्रफल

$= \frac{a^2}{12}[\pi - 12 + 6\sqrt{3}]$

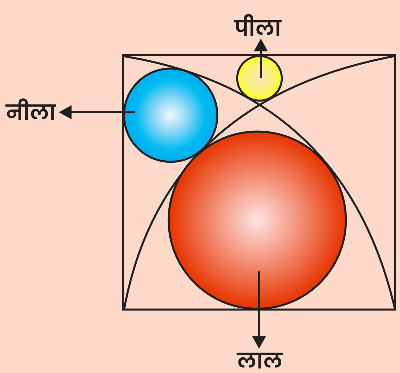


☞ निम्नलिखित आकृति में, वर्ग की भुजा 'a' है



हरे भाग का क्षेत्रफल = $\frac{3a^2}{14} = r^2(4-\pi)$

☞ यदि वर्ग की भुजा = 'a'

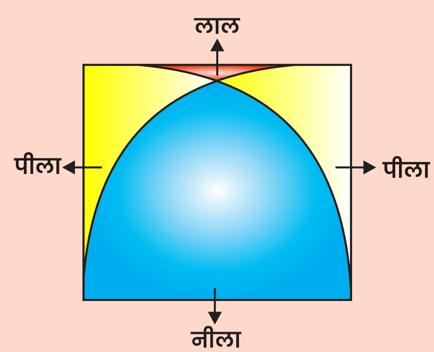


पीले वृत्त की त्रिज्या = $\frac{a}{16}$

नीले वृत्त की त्रिज्या = $\frac{a}{6}$

लाल वृत्त की त्रिज्या = $\frac{3a}{8}$

☞ निम्नलिखित आकृति में वर्ग की भुजा 'a' है।



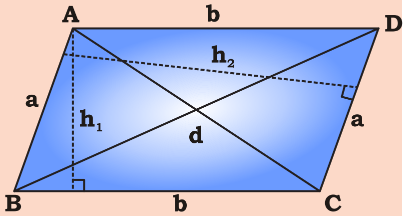
नीले भाग का क्षेत्रफल = $\frac{\pi a^2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

पीले भाग का क्षेत्रफल = $2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 - \frac{\pi a^2}{12}\right)$

लाल भाग का क्षेत्रफल = $a^2 - \frac{\pi a^2}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

समानांतर चतुर्भुज

समांतर चतुर्भुज ABCD में, मान लीजिए भुजा AB = a सेमी और BC = b सेमी है, तो



- AB = CD और BC = AD
- प्रत्येक विकर्ण AC या BD समांतर चतुर्भुज को सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करता है।
- $AC^2 + BD^2 = 2(a^2 + b^2)$
- परिमाप = 2(a + b)
- क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई = $a \times h_2 = b \times h_1$
- एक विकर्ण की लंबाई d है
  तो, समांतर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल
  $= 2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-d)}$
  जहाँ, $s = \dfrac{a+b+d}{2}$

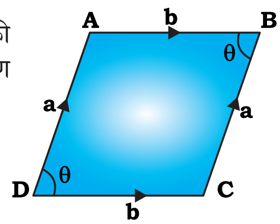
समांतर चतुर्भुज के प्रकार

1. **आयत** - सभी कोण 90° के होते हैं, विकर्ण बराबर होते हैं।
2. **समचतुर्भुज** - सभी भुजाएँ बराबर होती हैं, विकर्ण लंबवत होते हैं।
3. **वर्ग** - सभी भुजाएँ और कोण बराबर होते हैं। यह एक समचतुर्भुज और एक आयत होता है।

Ex. एक समांतर चतुर्भुज ABCD की भुजा AB, 24 सेमी और भुजा AD = 16 सेमी है। AB और CD के बीच की दूरी 10 सेमी है, तो AD और BC के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

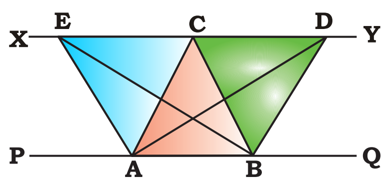
HINTS क्षेत्रफल ⇒ $24 \times 10 = 16 \times x \Rightarrow x = 15$ सेमी

☞ ABCD एक समांतर चतुर्भुज है जिसकी भुजाएँ a और b हैं तथा उनके बीच का कोण θ है, तो



$\boxed{\text{क्षेत्रफल} = \dfrac{1}{2} ab \sin(\theta)}$

☞ समान आधार वाले सभी त्रिभुजों तथा समान्तर रेखाओं के बीच का क्षेत्रफल समान होता है।

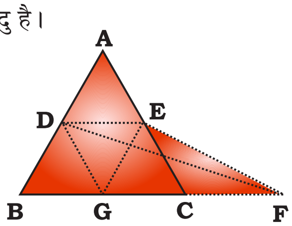


यदि XY || PQ, तो

ΔABC का क्षेत्रफल = ΔABD का क्षेत्रफल = ΔABE का क्षेत्रफल

Ex. ΔABC में, D और E क्रमशः भुजाओं AB और AC के मध्य बिंदु हैं। BC को F तक इस प्रकार बढ़ाया जाता है कि CF = BC है। तो ΔDEF और ΔABC के बीच क्या संबंध है?

HINTS मान लीजिए G, BC का मध्य बिंदु है।



∴ ΔDEG का क्षेत्रफल

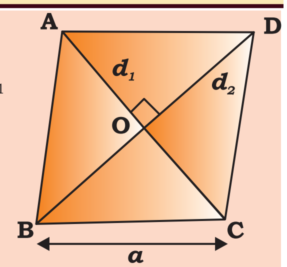
$= \dfrac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{4}$

यदि D और E क्रमशः AB और AC के मध्य बिंदु हैं तो DE || BC || BF

ΔDEF का क्षेत्रफल = ΔDEG का क्षेत्रफल (समान आधार वाली समान्तर रेखाओं के बीच त्रिभुज)

$= \dfrac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{4}$

समचतुर्भुज



समचतुर्भुज ABCD में,

मान लीजिए भुजा BC = a, AC = d_1 और BD = d_2, तो

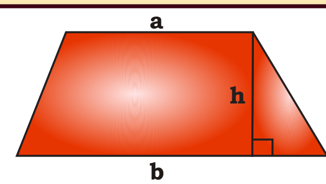
- AB = BC = CD = DA = a
- भुजा (a) = $\dfrac{1}{2}\sqrt{d_1^2 + d_2^2}$ और,
  $4a^2 = d_1^2 + d_2^2$
- परिमाप = 4a
- क्षेत्रफल = $\dfrac{1}{2} \times d_1 \times d_2$
- एक समचतुर्भुज का परिमाप 2p इकाई है तथा विकर्णों की लंबाइयों का योग m इकाई है, तो समचतुर्भुज का क्षेत्रफल
  $= \dfrac{1}{4}(m^2 - p^2)$ वर्ग इकाई

Ex. एक समचतुर्भुज की प्रत्येक भुजा की लंबाई 13 सेमी है और एक विकर्ण 24 सेमी है। समचतुर्भुज का क्षेत्रफल (वर्ग सेमी में) क्या है?

HINTS $4 \times 13 \times 13 = 24^2 + d_2^2 \Rightarrow d_2 = 10$ सेमी

क्षेत्रफल = $\dfrac{1}{2} \times 24 \times 10 = 120$ सेमी²

समलम्ब चतुर्भुज



समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\dfrac{1}{2}$ × समांतर भुजाओं का योग × ऊँचाई

Ex. एक समलम्ब चतुर्भुज की समांतर भुजाओं की लंबाई का अनुपात 3 : 2 है। उनके बीच की न्यूनतम दूरी 15 सेमी है। यदि समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल 450 वर्ग सेमी है, तो समांतर भुजाओं की लंबाई का योग क्या होगा?

HINTS समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\dfrac{1}{2}$ × समांतर भुजाओं का योग × ऊँचाई

$\Rightarrow 450 = \dfrac{1}{2}(2x + 3x) \times 15$

$\Rightarrow 5x = 30 \times 2 \Rightarrow x = 12$

∴ समानांतर भुजाओं की लंबाई का योग

$= 5x = 5 \times 12 = 60$ सेमी

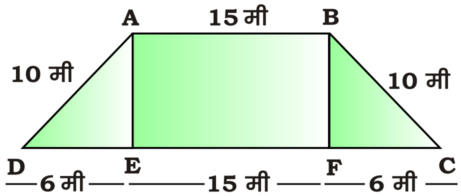
Ex. एक दीवार समलम्ब चतुर्भुज के आकार की है जिसकी ऊँचाई 4 मीटर है और समान्तर भुजाएँ क्रमशः 3 मीटर और 5 मीटर हैं। दीवार को रंगने की लागत क्या है, यदि रंगने की दर 25 प्रति वर्ग मीटर है?

HINTS समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\dfrac{1}{2}(3 + 5) \times 4 = 16$ मी²

पेंटिंग की कुल लागत = 16 × 25 = ₹400

Ex. एक समलम्ब चतुर्भुज ABCD में, AB और DC एक-दूसरे के समांतर हैं और उनके बीच 8 मीटर की लम्बवत दूरी है। साथ ही, (AD) = (BC) = 10 मीटर, और (AB) = 15 मीटर < (DC) है। समलम्ब चतुर्भुज ABCD का परिमाप (मीटर में) क्या है?

HINTS



पाइथागोरस प्रमेय से, $DE = \sqrt{AD^2 - AE^2}$

$= \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6$ मी

समलम्ब चतुर्भुज का परिमाप

= AD + DC + BC + AB

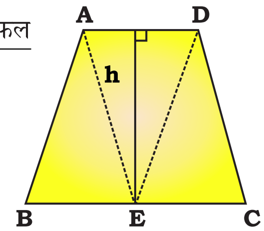
=10 + 27 +10 + 15

= 62 मी

Ex. ABCD एक समलम्ब चतुर्भुज है जिसकी AD और BC समांतर भुजाएँ हैं, E, BC पर स्थित एक बिंदु है। ABCD के क्षेत्रफल का ΔAED के क्षेत्रफल से अनुपात क्या है?

HINTS $\dfrac{\text{समलम्ब चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल}}{\Delta \text{AED का क्षेत्रफल}}$

$= \dfrac{\frac{1}{2}(AD + BC) \times h}{\frac{1}{2} AD \times h} = \dfrac{AD + BC}{AD}$



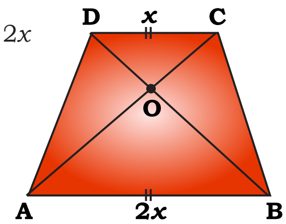
Ex. ABCD एक समलम्ब चतुर्भुज है जिसमें AB || DC और AB = 2CD है। विकर्ण AC और BD बिंदु O पर मिलते हैं। ΔAOB और ΔCOD के क्षेत्रफलों का अनुपात क्या है?

HINTS माना CD = x तो AB = 2 CD = $2x$

ΔCOD ~ ΔAOB

$\dfrac{\Delta \text{AOB का क्षेत्रफल}}{\Delta \text{COD का क्षेत्रफल}} = \dfrac{AB^2}{CD^2}$

$= \dfrac{(2x)^2}{x^2} = 4 : 1$



अध्याय 03

त्रिविमीय क्षेत्रमिति

परिचय

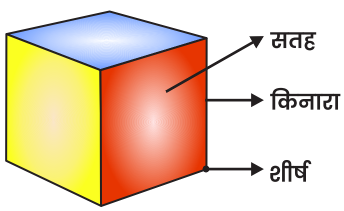
एक त्रि-आयामी आकृति (3-D Solid) वह ठोस आकृति होती है जिसमें लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई (या मोटाई) होती है, जो कि समतल द्वि-आयामी (2-D) आकृतियों से भिन्न होती है। ये ठोस आकृतियाँ सपाट परतों से घिरी होती हैं, जिन्हें सतह (Faces) कहा जाता है। जब दो सतह आपस में मिलती हैं, तो वे एक किनारा (Edge) बनाती हैं, और जब दो या अधिक किनारे मिलते हैं, तो वे शीर्ष बिंदु (Vertices) बनाते हैं।

किसी भी त्रि-आयामी ठोस आकृति की संरचना को समझाने के लिए महान गणितज्ञ यूलर (Euler) ने शीर्ष बिंदुओं (V), किनारों (E) और सतहों (F) के बीच एक गणितीय संबंध प्रस्तुत किया। इस संबंध को **यूलर का सूत्र (Euler's Formula)** कहा जाता है, जो इस प्रकार है:

$$\boxed{V + F = E + 2}$$

इसका अर्थ है कि प्रत्येक त्रि-आयामी ठोस आकृति जो एक उत्तल बहुभुज (Convex Polyhedron) होती है, उसमें शीर्ष बिंदुओं (Vertices) और सतहों (Faces) का योग हमेशा किनारों (Edges) की संख्या से दो अधिक होता है।

इसे घन के उदाहरण के माध्यम से समझते है:



V= 8, F = 6 तथा E = 12

यूलर के नियम से, V+F = E + 2

$\Rightarrow$ 8 + 6 = 12+2

$\Rightarrow$ 14 = 14

पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल

यह 3D आकृति की वक्र सतह के क्षेत्रफल को संदर्भित करता है। इसका उपयोग आमतौर पर बेलन, शंकु और गोले जैसी वस्तुओं के लिए किया जाता है। एक बेलन का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल गोलाकार शीर्ष और तल को छोड़कर घुमावदार भाग का क्षेत्रफल है।

कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल

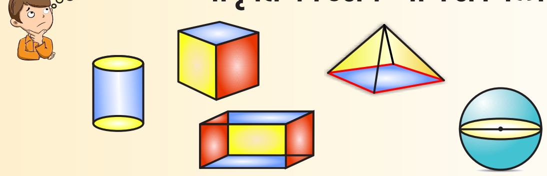
किसी ठोस का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल और आधार और शीर्ष के क्षेत्रफलों का योग है।

कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल + ऊपरी सतह का क्षेत्रफल + निचली सतह का क्षेत्रफल

आयतन

यह किसी वस्तु द्वारा घेरे गए स्थान की मात्रा को संदर्भित करता है, जिसे घन इकाइयों में मापा जाता है। केवल 3-D वस्तुओं में ही आयतन होता है।

आकृति को उसके नाम से मिलाएं

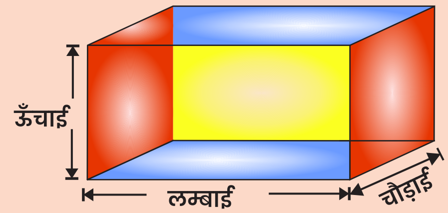


गोला | शंकु | पिरामिड

घनाभ | बेलन | घन

घनाभ

घनाभ एक आयताकार ठोस है जिसमें छह आयताकार सतहें होती हैं। इसे कभी-कभी आयताकार समानान्तर चतुर्भुज भी कहा जाता है।



लंबाई (l), चौड़ाई (b) और ऊंचाई (h) वाले घनाभ के लिए

(i) पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल = चारों दीवारों का क्षेत्रफल = $2(l + b)\,h$

(ii) कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2(lb + bh + hl)$

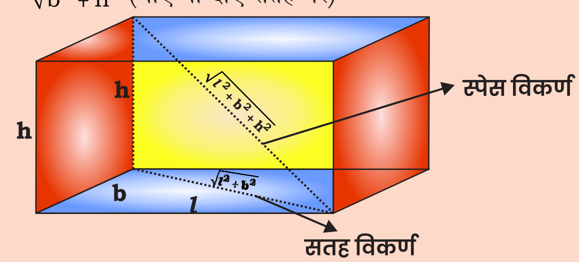
(iii) घनाभ का आयतन = $l \times b \times h$

(iv) घनाभ का सतह (face) विकर्ण

= $\sqrt{l^2 + b^2}$ (नीचे या ऊपर के सतह पर)

= $\sqrt{l^2 + h^2}$ (सामने या पीछे के सतह पर)

= $\sqrt{b^2 + h^2}$ (बाएँ या दाएँ सतह पर)

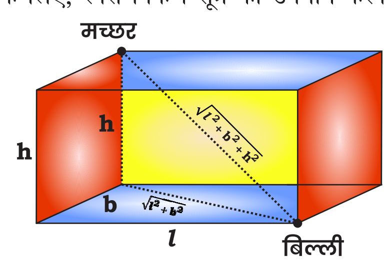


(v) स्पेस विकर्ण = $\sqrt{l^2 + b^2 + h^2}$ (सबसे लम्बा)

किसी कमरे में रखी जा सकने वाली सबसे बड़ी छड़ की लम्बाई = स्पेस विकर्ण = $\sqrt{l^2 + b^2 + h^2}$

Ex. 7 × 3 × 2.5 मी आयाम वाले एक घनाभीय कमरे के ऊपरी कोने पर बैठा एक मच्छर कमरे के सबसे निचले कोने पर सो रही एक बिल्ली को देखता है। बिल्ली को काटने के लिए मच्छर को कितनी दूरी तक उड़ना होगा?

HINTS घनाभ के आर-पार सबसे छोटी सीधी रेखा दूरी (एक कोने से विपरीत कोने तक) ज्ञात करने के लिए, स्पेस विकर्ण सूत्र का उपयोग करें। यदि घनाभ की भुजाएँ a, b, और c हैं, तो दूरी $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ होगी।



दूरी = $\sqrt{7^2 + 3^2 + 2.5^2}$

= $\sqrt{49 + 9 + 6.25}$

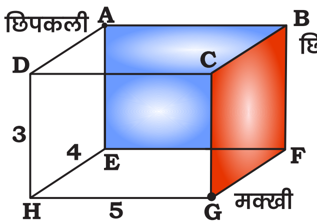
= $\sqrt{64.25} \approx 8.01$ मी

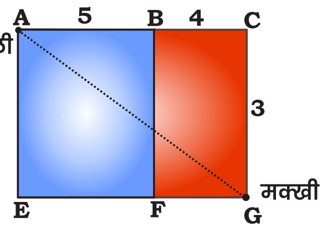
(क्योंकि मच्छर हवा में स्वतंत्र रूप से उड़ सकता है, उसे दीवारों या सतहों के साथ चलने की जरूरत नहीं होती वह सीधे 3D स्थान में सबसे छोटा सीधा रास्ता तय करता है।)

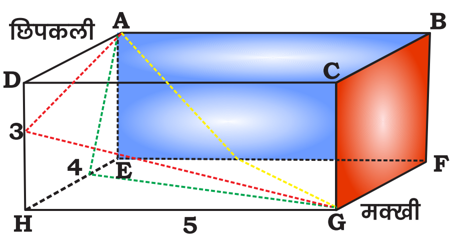
सामान्यतः यदि किसी घनाभ के आयाम a, b, c हों, जहाँ $a \geq b \geq c$ तो उसकी सतह के साथ चलते हुए प्राप्त की जाने वाली सबसे छोटी दूरी $\sqrt{(b+c)^2 + a^2}$ होगी। (इसे यदि चाहें तो बीजगणितीय रूप से सिद्ध किया जा सकता है)।

Ex. एक छिपकली 5 × 4 × 3 मी के आयताकार कमरे के एक ऊपरी कोने में बैठी है और वह कमरे के सबसे दूर के निचले कोने में सोती हुई एक मक्खी को देखती है। छिपकली को मक्खी तक पहुँचने के लिए कितनी दूरी रेंगनी होगी?

HINTS







दो आसन्न सतहों को एक सपाट आयत में खोलें, जिससे 3D एक सीधी 2D रेखा में बदल जाए।

पथ 1 (हरी रेखा) = A → E → G

$AG = \sqrt{(4+3)^2 + 5^2} = \sqrt{74} \approx 8.6$ मी (सबसे छोटा)

पथ 2 (लाल रेखा) = A → D → H → G

$AG = \sqrt{(5+3)^2 + 4^2} = \sqrt{80} \approx 8.94$ मी (मध्यम दूरी)

पथ 3 (बैंगनी रेखा) = A → B → F → G

$AG = \sqrt{(5+4)^2 + 3^2} = \sqrt{90} \approx 9.48$ मी (सबसे लम्बी)

इसलिए, सतहों के साथ रेंगते हुए सबसे छोटा मार्ग = 8.6 मी (ऊँचाई + चौड़ाई वाले सतहों को खोलकर)

वैकल्पिक विधि

रंगकर तय की गई सबसे छोटी दूरी = $\sqrt{(b+c)^2 + a^2}$ $(a \geq b \geq c)$

$\sqrt{(4+3)^2 + 5^2} = \sqrt{74} \approx 8.6$ m

(मच्छर के विपरीत, छिपकली उड़ नहीं सकती। मक्खी तक पहुंचने के लिए उसे कमरे की सतह पर रेंगना पड़ता है। इसलिए हमें घनाभ की दीवारों के साथ रेंगने का सबसे छोटा पथ खोजना होगा।)

संलग्न सतहों वाला घनाभ

माना एक घनाभ के आयाम हैं:

लम्बाई = l, चौड़ाई = b, ऊँचाई = h

माना एक कोने पर मिलने वाली तीन संलग्न सतहों के क्षेत्रफल इस प्रकार हैं:

P = lb (आधार क्षेत्रफल), Q = bh (पार्श्व क्षेत्रफल), R = hl (मुख्य सतह का क्षेत्रफल)

आयतन (V = l × b × h), P, Q, R का प्रयोग करने पर

P × Q × R = (lb) × (bh) × (hl) = $l^2b^2h^2$

आयतन = = $l$bh = $\sqrt{PQR}$

यदि किसी घनाभ की तीन संलग्न सतहों के क्षेत्रफल ज्ञात हों, तो आप उसके आयतन को सीधे निम्नलिखित सूत्र से ज्ञात कर सकते हैं:
आयतन = $\sqrt{PQR}$

Ex. एक घनाभ के तीन आसन्न फलकों का क्षेत्रफल 32 सेमी², 24 सेमी² और 48 सेमी² है। घनाभ का आयतन ज्ञात कीजिए?

HINTS आयतन = $\sqrt{32 \times 24 \times 48}$ = 192 सेमी³

☞ घनाभ के विकर्ण और कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल में सम्बंध

$(l + b + h)^2 = l^2 + b^2 + h^2 + 2(lb + bh + hl)$

या (विमाओं का योगफल)² = (विकर्ण)² + (कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल)

Ex. एक घनाभ की लंबाई, चौड़ाई और ऊंचाई का योग 20 सेमी है। यदि विकर्ण की लंबाई 12 सेमी है, तो घनाभ का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करें।

HINTS (विमाओं का योगफल)² = (विकर्ण)² + (कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल)

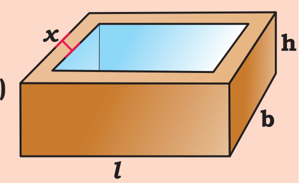
⇒ (20)² = 12 × 12 + कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल

⇒ कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = 256 सेमी²

☞ खोखले घनाभ का आयतन

= $lbh - (l - 2x)(b - 2x)(h - 2x)$

जहाँ, x घनाभ की दीवार की मोटाई है।



Ex. एक आयताकार बक्से की विमाएँ क्रमशः 20 सेमी × 12 सेमी × 10 सेमी है। लकड़ी की मोटाई 1 सेमी है। बक्से को बनाने में लगी लकड़ी का आयतन ज्ञात करें।

HINTS खोखले घनाभ का आयतन

= 20 × 12 × 10 – (20 – 2) (12 – 2) (10 – 2) = 960 सेमी³

Ex. एक घनाभ (cuboid) की माप 30 सेमी × 25 सेमी × 20 सेमी है। यदि इस घनाभ का द्रव्यमान 15 किग्रा है, तो इसका घनत्व ग्राम/सेमी³ में ज्ञात कीजिए।

HINTS

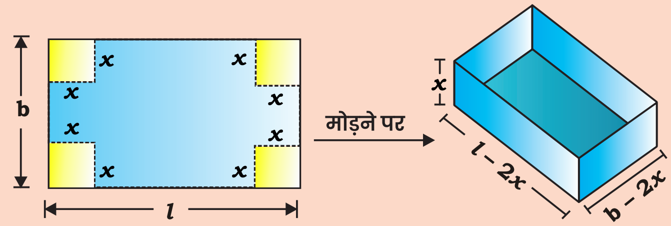
आयतन = 30 × 25 × 20 = 15000 सेमी³

द्रव्यमान = 15 किग्रा = 15000 ग्राम

घनत्व = $\frac{\text{द्रव्यमान}}{\text{आयतन}} = \frac{15000}{15000}$ = 1 ग्राम/सेमी³

आयताकार शीट से खुला डिब्बा बनाना

चार कोनों पर x इकाई भुजा वाले बराबर वर्गों को काटकर तथा शेष को मोड़कर एक खुला आयताकार बॉक्स बनाया जा सकता है।



आयताकार डिब्बे का आयतन = $(l - 2x)(b - 2x)x$

Ex. 25 सेमी × 20 सेमी आयाम वाली एक आयताकार शीट के चारों कोनों से 2 सेमी भुजा वाला वर्ग काट दिया जाता है और एक बॉक्स बनाया जाता है। बॉक्स का आयतन है

HINTS आयताकार बॉक्स का आयतन = $(l - 2x)(b - 2x)x$

$= (25 - 2 \times 2)(20 - 2 \times 2) \times 2 = 21 \times 16 \times 2 = 672$ सेमी³

Ex. चारों कोनों से 3 सेमी भुजा वाला वर्ग एक 24 सेमी लंबे तथा 18 सेमी-चौड़े आयताकार शीट से काट दिया गया तथा शेष भाग को मोड़कर एक खुला बक्सा बनाया गया। बक्से का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करें।

HINTS खुले हुए बॉक्स का पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= (l - 2x)(b - 2x) + 2(b - 2x)(x) + 2(x)(l - 2x)$

$= (24 - 2 \times 3)(18 - 2 \times 3) + 2(18 - 2 \times 3)(3) + 2(3)(24 - 2 \times 3)$

$= 18 \times 12 + 6 \times 12 + 6 \times 18 = 216 + 72 + 108 = 396$ सेमी²

वैकल्पिक विधि

खुले हुए बॉक्स का पृष्ठीय क्षेत्रफल = आयत का क्षेत्रफल – 4 × 3 सेमी भुजा वाले वर्ग का क्षेत्रफल $= 24 \times 18 - 4 \times 3^2 = 396$ सेमी²

खुले बॉक्स की स्थिति में, ऊपरी सतह का क्षेत्रफल (lb) घटाया जाता है। इसी प्रकार, किसी कमरे की पेंटिंग की लागत की गणना करते समय, फर्श का क्षेत्रफल (lb) घटाया जाता है और शेष सतह क्षेत्रफल ($lb + 2bh + 2hl$) को प्रति इकाई क्षेत्रफल की लागत से गुणा किया जाता है।

Ex. एक कमरे की लंबाई, चौड़ाई और ऊंचाई क्रमशः 10 मी, 8 मी और 6 मी है। ₹7.50 प्रति वर्ग मीटर की दर से कमरे की दीवारों और छत पर सफेदी करने की लागत ज्ञात करें।

(a) ₹2,220 (b) ₹1,850 (c) ₹2,150 (d) ₹2,000

HINTS क्षेत्रफल $= (10 \times 8 + 2 \times 8 \times 6 + 2 \times 6 \times 10) = 296$ मी²

सफेदी करने की लागत = 296 × 7.5 = ₹2220

क्षेत्रमिति में, यदि प्रति इकाई क्षेत्रफल लागत एक अभाज्य संख्या या अभाज्य संख्या का गुणज है, तो अंतिम उत्तर भी उस अभाज्य संख्या का गुणज होगा, यदि यह 9 या 9 का गुणज है, तो सही उत्तर के अंकों का योग 9 होगा।

उपर्युक्त उदाहरण में, 7.5 अभाज्य संख्या 3 का गुणज है, अतः अंतिम उत्तर भी 3 का गुणज होगा। दिए गए विकल्पों में से केवल विकल्प (a) ही 3 का गुणज है।

☞ एक आयताकार टैंक 'l' मीटर लंबा और 'h' मीटर गहरा है। यदि टैंक से 'x' घन मीटर पानी निकाला जाता है, तो टैंक में पानी का स्तर 'd' मीटर कम हो जाता है, तो टैंक में रखे जा सकने वाले पानी की मात्रा $\left(\frac{x \times h}{d}\right)$ घन मीटर होती है तथा टंकी की चौड़ाई $\left(\frac{x}{ld}\right)$ मीटर होती है।

Ex. एक आयताकार टैंक 50 मी लंबा और 29 मी गहरा है। यदि टैंक से 1000 घन मीटर पानी निकाला जाता है, तो टैंक में पानी का स्तर 2 मी कम हो जाता है। टैंक कितने घन मीटर पानी रख सकता है और टैंक की चौड़ाई भी ज्ञात करें।

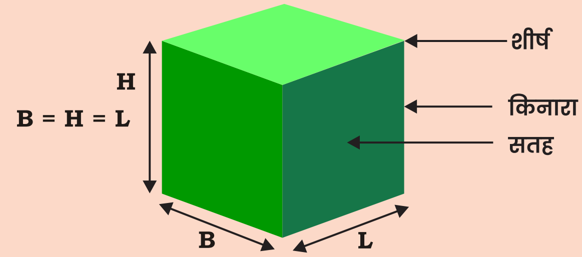
HINTS टैंक का आयतन $= \frac{1000 \times 29}{2} = 14500$ मी³

हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि भले ही आयताकार टैंक की लंबाई नहीं दी गई हो तो भी टैंक के आयतन की गणना की जा सकती है। टैंक की चौड़ाई ज्ञात करने के लिए लंबाई की आवश्यकता है लेकिन टैंक की ऊंचाई की नहीं।

$\therefore$ टैंक की चौड़ाई $= \frac{1000}{50 \times 2} = 10$ मी

घन

एक ठोस जिसकी सभी छह सतहें वर्गाकार हों, घन कहलाती है। इस प्रकार एक घन की लंबाई, चौड़ाई और ऊंचाई बराबर है।



माना 'a' घन की भुजा है

(i) पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल = $4a^2$

(ii) कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $6a^2$

(iii) आयतन $= a^3 = \left(\sqrt{\frac{\text{कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल}}{6}}\right)^3$

(iv) विकर्ण $= \sqrt{3}a$

(v) सतह विकर्ण $= \sqrt{2}\,a$

(vi) यदि घन का विकर्ण दिया गया है तो घन का आयतन $= \left(\frac{\text{विकर्ण}}{\sqrt{3}}\right)^3$

Ex. एक घन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल 1728 सेमी² है। इसका आयतन ज्ञात कीजिए।

HINTS माना, घन की भुजा = a

घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल = $6a^2$

$\Rightarrow 6a^2 = 1728$

$\Rightarrow a = 12\sqrt{2}$

$\therefore$ घन का आयतन $= a^3 = \left(12\sqrt{2}\right)^3 = 3456\sqrt{2}$ सेमी³

वैकल्पिक विधि

आयतन $= \left(\sqrt{\frac{\text{कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल}}{6}}\right)^3 = \left(\sqrt{\frac{1728}{6}}\right)^3$

$= \left(\sqrt{288}\right)^3 = \left(12\sqrt{2}\right)^3$

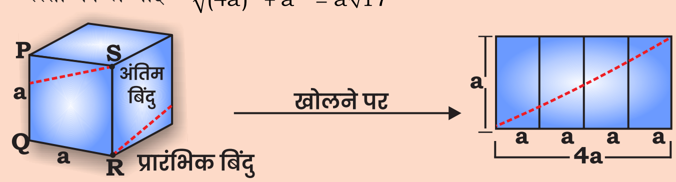
$= 3456\sqrt{2}$ सेमी³

Ex. एक घन के सबसे लंबे विकर्ण की लंबाई $7\sqrt{3}$ सेमी है। इसका आयतन (सेमी³ में) ज्ञात कीजिए।

HINTS घन का आयतन $= \left(\frac{\text{विकर्ण}}{\sqrt{3}}\right)^3 = \left(\frac{7\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)^3 = 343$ सेमी³

रस्सी इस आयत के निचले बाएँ कोने (बिंदु R) से ऊपरी दाएँ कोने (बिंदु S) तक तिरछी दिशा में जाती है।

रस्सी की लम्बाई $= \sqrt{(4a)^2 + a^2} = a\sqrt{17}$



Ex. एक रस्सी घन की भुजाओं और सतहों के किनारे के साथ दो पूरे चक्कर लगाती है। यह नीचे के एक बिंदु से शुरू होकर, ठीक उसी के ऊपर स्थित बिंदु पर समाप्त होती है। रस्सी की लंबाई ज्ञात कीजिए।

HINTS जब इसे खोला जाता है, तो यह एक आयत का आकार लेता है जिसकी चौड़ाई 8a (4 सतहें × 2 चक्कर) और ऊँचाई a होती है।

रस्सी की लम्बाई = $\sqrt{(8a)^2 + a^2} = a\sqrt{65}$

महत्वपूर्ण स्थिति I :-

जब एक घनाभ को बनाने के लिए n घनों (भुजा = a) को जोडा जाता है।

(i) घनाभ की लम्बाई = n × a

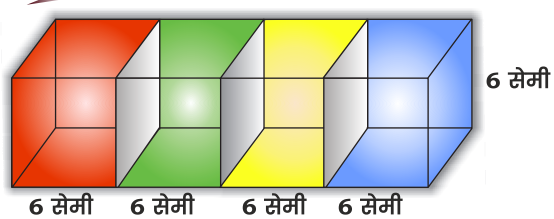
(ii) घनाभ की चौड़ाई तथा ऊँचाई = a

(iii) घनाभ का आयतन = $n \times a^3$

(iv) घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2a^2\,(2n+1)$

Ex. 216 घन सेमी आयतन वाले चार घनों को एक दूसरे से जोड़कर एक नया ठोस बनाया गया है। नए ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल है:

HINTS घन का आयतन = $a^3 \Rightarrow a^3 = 216 \Rightarrow a = 6$



जब 4 घनों को आपस में जोड़ा जाता है तो लंबाई = 4 × 6 = 24 सेमी, चौड़ाई = ऊंचाई = 6 सेमी

घनाभ का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2(lb + bh + hl)$

= 2 × (24 × 6 + 6 × 6 + 6 × 24)

= 2 × (144 + 36 + 144) = 2 × 324 = 648 सेमी²

वैकल्पिक विधि

घन का आयतन $(a)^3 = 216 \Rightarrow a = 6$ सेमी

घनों की संख्या (n) = 4

घनाभ की लम्बाई = n × a = 4 × 6 सेमी = 24 सेमी

ऊँचाई = चौड़ाई = 6 सेमी

घनाभ का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2a^2\,(2n + 1)$

= $2 \times 6^2\,(2 \times 4 + 1) = 648$ सेमी²

महत्वपूर्ण स्थिति II :-

जब न्यूनतम n घनों को बनाने के लिए किसी घनाभ को काटा जाता है।

(i) घन की भुजा = घनाभ की भुजाओं का म.स.प.

(ii) n = $\dfrac{\text{घनाभ का आयतन}}{\text{घन का आयतन}}$

Ex. लंबाई 20 सेमी, चौड़ाई 15 सेमी और ऊँचाई 10 सेमी के आयताकार ब्लॉक को बराबर घनों की सटीक संख्या में काट दिया जाता है। घनों की कम से कम संभव संख्या होगी।

HINTS घन की भुजा = (20, 15, 10) का म.स.प. = 5

$n = \dfrac{20 \times 15 \times 10}{5 \times 5 \times 5} = 24$

महत्वपूर्ण स्थिति III :-

जब एक घन को बनाने के लिए न्यूनतम n घनाभों को जोड़ा जाता है।

(i) घन की भुजा = घनाभ की भुजाओं का ल.स.प.

(ii) n = $\dfrac{\text{घन का आयतन}}{\text{घनाभ का आयतन}}$

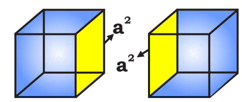
Ex. 6 सेमी, 4 सेमी और 3 सेमी आयाम का एक घनाभ है। न्यूनतम ऐसे घनाभों को एक घन बनाने के लिए व्यवस्थित किया जाता है। घन का आयतन ज्ञात कीजिए।

HINTS घन की भुजा = (6, 4, 3) का ल.स.प. = 12

घन का आयतन = 12^3 = 1728 सेमी³

क्या आप जानते हैं ?

(i) घनों का जोड़: यदि हम दो घनों को जोड़ते हैं, तो उनकी दो सतहें समाप्त हो जाती हैं।

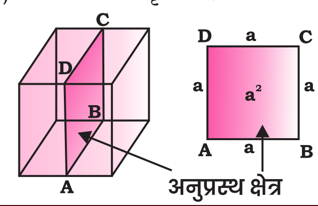


कुल वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = $6a^2 + 6a^2 - a^2 - a^2 = 10a^2$

(ii) n कट लगाने पर हमें (n + 1) घनाभ प्राप्त होते हैं।

कुल वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल में हुई वृद्धि = $2na^2$

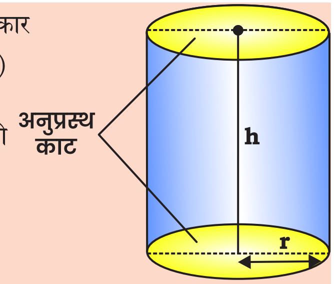
इन (n + 1) भागों का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2a^2\,(n+3)$



समवृत्तीय बेलन

एक ठोस जिसका अनुप्रस्थ काट सम वृत्ताकार होता है, उसे बेलन (या लम्बवृत्तीय बेलन) कहा जाता है।

मान लीजिए r वृत्ताकार अनुप्रस्थ काट की त्रिज्या है और h बेलन की ऊंचाई है, तो



(i) अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल = πr^2

(ii) अनुप्रस्थ काट की परिधि = $2\pi r$

(iii) वक्र (पार्श्व) पृष्ठीय क्षेत्रफल = अनुप्रस्थ काट की परिधि × ऊंचाई = $2\pi rh$

(iv) सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = वक्र (पार्श्व) पृष्ठीय क्षेत्रफल + 2 × अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल = $2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(r + h)$

(v) आयतन = अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल × ऊंचाई = $\pi r^2 h$

(vi) कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल से अनुपात = $\dfrac{h + r}{h}$

Ex. एक बेलन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल क्या है जिसकी आधार त्रिज्या 7 सेमी तथा ऊंचाई 5 सेमी है?

HINTS r = 7 सेमी, h = 5 सेमी

बेलन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2\pi r(h + r)$

= $2 \times \dfrac{22}{7} \times 7\,(7 + 5) = 44 \times 12 = 528$ सेमी²

Ex. यदि एक बेलन की ऊंचाई और व्यास क्रमशः 12 सेमी और 28 सेमी है तो कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल और वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल का अनुपात ज्ञात कीजिए

HINTS h = 12 सेमी, r = $\dfrac{28}{2}$ = 14 सेमी

$\dfrac{TSA}{CSA} = \dfrac{h + r}{h} = \dfrac{12 + 14}{12} = \dfrac{26}{12} = \dfrac{13}{6}$

Ex. यदि एक बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल 880 सेमी² है तो उसकी ऊँचाई तथा त्रिज्या का गुणनफल क्या है?

HINTS वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2\pi rh$

$\Rightarrow 2 \times \dfrac{22}{7} \times rh = 880 \Rightarrow rh = 140$ सेमी²

जब आयतन, CSA और TSA 11 का गुणज हों तो यह आवश्यक है कि त्रिज्या या ऊँचाई 7 का गुणज होगी।

(i) यदि पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल (c) तथा आयतन (v) दिया गया हो तो त्रिज्या का ऊंचाई से अनुपात है।

$$\boxed{\frac{r}{h} = \frac{8\pi V^2}{c^3}}$$

Ex. एक बेलनाकार स्तंभ का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल (CSA) 264 मी² है और इसका आयतन (V) 924 मी³ है। इसके व्यास और इसकी ऊँचाई का अनुपात ज्ञात कीजिए।

HINTS $\frac{\text{व्यास}}{\text{ऊँचाई}} = \frac{2r}{h} = \frac{2\times 8\pi V^2}{(CSA)^3} = \frac{2\times 8\times 22\times 924\times 924}{7\times 264\times 264\times 264} = \frac{7}{3}$

(ii) यदि पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल (c) तथा ऊंचाई (h) दिया गया हो तो बेलन का आयतन है।

$$\boxed{V = \frac{c^2}{4\pi h}}$$

Ex. 16 सेमी ऊंचाई का एक लंब वृत्तीय बेलन 16 सेमी × 22 सेमी आकार के एक आयताकार टिन की पतली पन्नी से ढका हुआ है। बेलन का आयतन है:

HINTS यदि बेलन को टिन की पन्नी से ढका गया है तो बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल टिन की पन्नी के क्षेत्रफल के बराबर होगा।

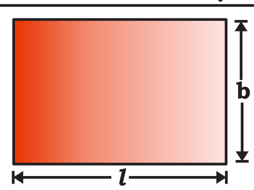
वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = 16 सेमी × 22 सेमी

h = 16 सेमी

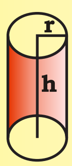
आयतन = $\frac{c^2}{4\pi h} = \frac{16\times 22\times 16\times 22\times 7}{4\times 22\times 16}$ = 616 सेमी³

एक आयताकार शीट को मोड़कर और घुमाकर बेलन बनाना

आयताकार शीट को मोड़ने पर



लंबाई के साथ मोड़ना

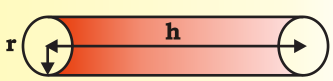


h = b

$2\pi r = l$

$\Rightarrow r = \frac{l}{2\pi}$

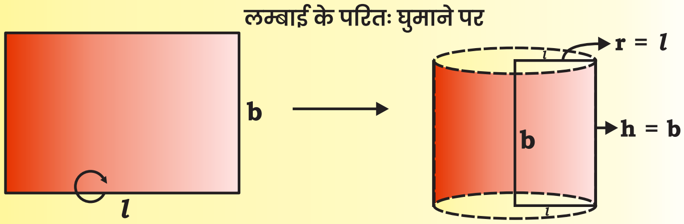
चौड़ाई के साथ मोड़ना



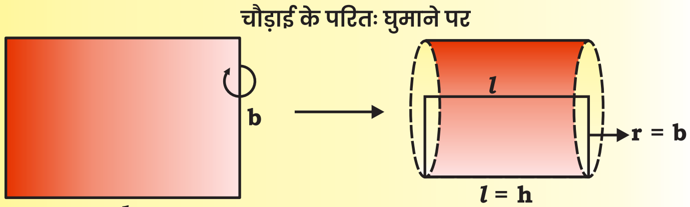
$h = l,\ 2\pi r = b \Rightarrow r = \frac{b}{2\pi}$

आयताकार शीट को घुमाने पर

लम्बाई के परितः घुमाने पर



चौड़ाई के परितः घुमाने पर



Ex. 22 सेमी × 12 सेमी आयाम वाली एक आयताकार कागज की शीट को उसकी लंबाई के साथ एक बेलन के रूप में मोड़ा जाता है। इस बेलन का आयतन कितना होगा?

HINTS $2\pi r = 22 \Rightarrow r = \frac{22\times 7}{2\times 22} = \frac{7}{2}$ सेमी., h = 12 सेमी

∴ बेलन का आयतन = $\pi r^2 h = \frac{22}{7}\times\frac{49}{4}\times 12$ = 462 सेमी³

Ex. 7 सेमी × 4 सेमी आयाम वाली एक आयताकार शीट को उसकी चौड़ाई के परितः घुमाकर एक आकृति बनाई जाती है। इस प्रकार बनी आकृति का आयतन क्या है?

HINTS h = 7 सेमी, r = 4 सेमी

बेलन का आयतन = $\pi r^2 h = \frac{22}{7}\times 4\times 4\times 7$ = 352 सेमी³

जब एक रस्सी को बेलन के चारों ओर कुंडलीदार (सर्पिल) रूप में लपेटा जाता है तो बेलन को खोलने पर एक आयत में बदल जाता है।

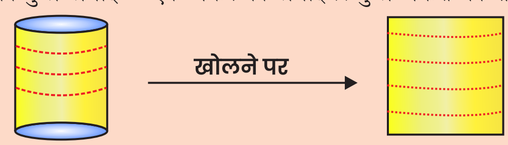
प्रत्येक टर्न के लिए-

रस्सी की लम्बाई (प्रत्येक टर्न) = $\sqrt{(\text{परिधि})^2 + (\text{प्रत्येक चक्कर में वृद्धि})^2}$

जहाँ, परिधि = दी गई आधार परिधि

प्रत्येक चक्कर में ऊँचाई = $\frac{\text{कुल ऊँचाई}}{\text{कुल चक्करों की सख्या}}$

रस्सी की कुल लंबाई = एक चक्कर की लंबाई × कुल चक्करों की संख्या



Ex. एक धागा 10 सेमी त्रिज्या और 24 सेमी ऊँचाई वाले बेलन के चारों ओर एक बार लपेटा गया है। धागे की लंबाई ज्ञात कीजिए।

HINTS बेलन की परिधि = $2\pi r$ = 2 × 3.14 × 10 = 62.8

h = 24 सेमी, चक्करों की संख्या (n) = 1

प्रत्येक चक्कर की लम्बाई = $\sqrt{(62.8)^2 + (24)^2} = \sqrt{4519.84} \approx 67.2$

धागे की लम्बाई = 67.2 सेमी

खोखला बेलन

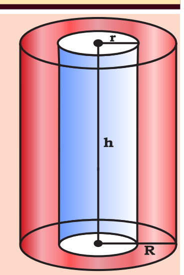
(i) मोटाई = (R – r)

(ii) पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2\pi rh + 2\pi Rh$
$= 2\pi h(R + r)$

(iii) कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2\pi h(R + r) + 2\pi(R^2 - r^2)$

(iv) खोखले बेलन में उपयोग किए गए पदार्थ का आयतन
$= \pi(R^2 - r^2)h$

(v) खोखले बेलन का द्रव्यमान (भार) = घनत्व × पदार्थ का आयंतन



Ex. एक खोखला बेलन स्टील का बना है। इसके बाहरी और भीतरी पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल में अंतर 132 सेमी² है। बेलन की ऊंचाई 21 सेमी है और इसकी आंतरिक और बाहरी त्रिज्या का योग भी 21 सेमी है। खोखले बेलन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल (सेमी² में) ज्ञात करें।

HINTS $2\pi h(R - r) = 132 \Rightarrow R - r = 1$

R + r = 21 सेमी (दिया है) ⇒ R = 11 सेमी, r = 10 सेमी

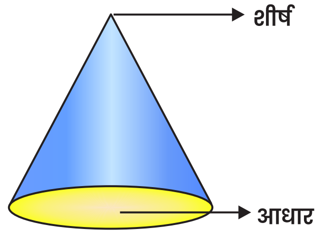
अत : खोखले बेलन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2\pi h(R + r) + 2\pi(R^2 - r^2)$

$= 2\pi(R + r)[h + R - r]$

$= 2\times\frac{22}{7}\times 21[21 + 1] = 6\times 22\times 22 = 2904$ सेमी²

शंकु

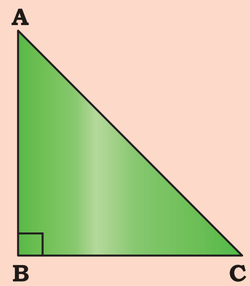
शंकु एक त्रिविमीय आकृति है, जिसका एक वृत्तीय आधार होता है। इस आधार के प्रत्येक बिंदु को एक सामान्य बिंदु (जिसे शीर्ष कहते हैं) से जोड़ने वाले रेखाखंड मिलकर शंकु बनाते हैं।

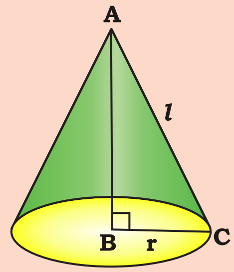


सम वृत्तीय शंकु

किसी समकोण त्रिभुज को उसकी किसी एक भुजा (कर्ण के अतिरिक्त) के परितः परिक्रमण करने पर प्राप्त ठोस को शंकु या लंब वृत्तीय शंकु कहते हैं।

मान लीजिए कि एक शंकु बनाने के लिए समकोण त्रिभुज ABC को उसकी भुजा AB के चारों ओर घुमाया जाता है; तब AB बने शंकु की ऊंचाई (h) है, BC इसके आधार की त्रिज्या (r) है और AC तिरछी ऊंचाई(l) है।





(i) तिर्यक ऊँचाई = $\sqrt{r^2 + h^2}$

(ii) पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल = $\pi r l$

(iii) कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $\pi r(r + l)$

(iv) आयतन = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

Ex. एक शंकाकर टैंट जो कपड़े से बनाया गया है उसका आयतन 1232 मी³ है तथा आधार का क्षेत्रफल 154 मी² है। अगर कपड़े की चौड़ाई 2 मी है तो टैंट बनाने के लिए कितने लंबे कपड़े की जरूरत होगी।

HINTS $\pi R^2 = 154$ मी² $\Rightarrow R = 7$ मी

& $\pi R^2 h = 1232$ मी³ $\Rightarrow \frac{h}{3} = \frac{1232}{154} \Rightarrow h = 24$ मी

$\therefore l = 25$ मी (7, 24, 25 के त्रिक से)

तम्बू बनाने के लिए आवश्यक कैनवास का क्षेत्रफल = $\pi r l$

जो आयताकार कैनवास के क्षेत्रफल के बराबर होगा।

$\Rightarrow \frac{22}{7} \times 7 \times 25 = 2 \times$ कैनवास की लम्बाई

$\Rightarrow$ कैनवास की लम्बाई = 275 मी

शंक्काकार तम्बू बनाने के लिए आवश्यक कैनवास = शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

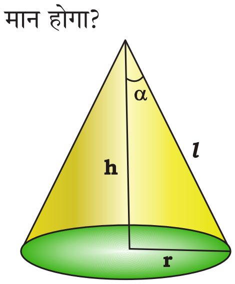
☞ S किसी शंकु के वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल को व्यक्त करत है, तथा h ऊँचाई और α अर्द्ध शीर्ष कोण को व्यक्त करता है, तब S का मान होगा?

$\tan\alpha = \frac{r}{h} \Rightarrow r = h\tan\alpha$

$\cos\alpha = \frac{h}{l} \Rightarrow l = h\sec\alpha$

शंकु का पृष्ठीय क्षेत्रफल = $\pi r l$

$= \pi h^2 \sec\alpha . \tan\alpha$



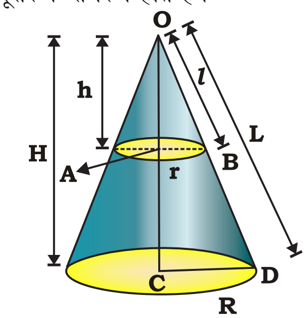
शंकु को काटने पर

☞ शंकु को काटने से बने सभी त्रिभुज एक दूसरे के समरूप होते हैं।

(A) (i) $\Delta OCD \sim \Delta OAB$

$(\angle A = \angle C = 90°, \angle O = \angle O)$

$\frac{H}{h} = \frac{R}{r} = \frac{L}{l}$ या $\frac{H}{R} = \frac{h}{r}$



☞ माना, V बड़े शंकु का आयतन तथा v छोटे शंकु का आयतन है

(ii) $\frac{V}{v} = \frac{\frac{1}{3}\pi R^2 H}{\frac{1}{3}\pi r^2 h} = \frac{R^2 H}{r^2 h}$

(iii) $\frac{V}{v} = \frac{H^3}{h^3} = \frac{R^3}{r^3} = \frac{L^3}{l^3}$

(B) शंकु के 5 भागों के क्षेत्रफल का अनुपात

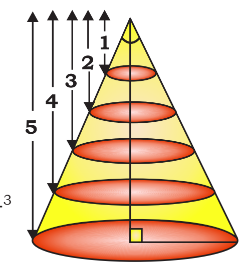
$= 1^2 : 2^2 - 1^2 : 3^2 - 2^2 : 4^2 - 3^2 : 5^2 - 4^2$

$= 1 : 3 : 5 : 7 : 9$

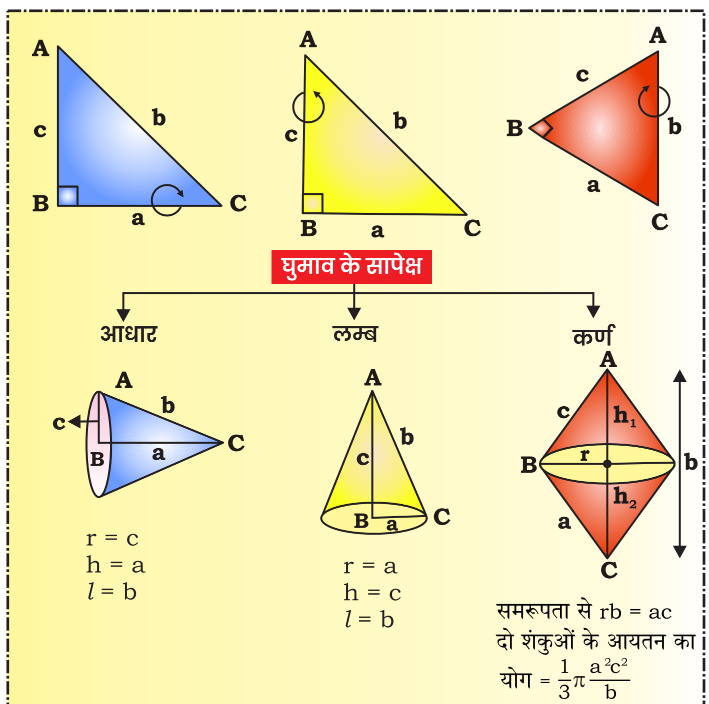
शंकु के 5 भागों के आयतन का अनुपात

$= 1^3 : 2^3 - 1^3 : 3^3 - 2^3 : 4^3 - 3^3 : 5^3 - 4^3$

$= 1 : 7 : 19 : 37 : 61$



समकोण त्रिभुज को घुमाने पर बना शंकु



Ex. 5 सेमी, 12 सेमी और 13 सेमी भुजाओं वाले एक समकोण त्रिभुज ABC को 12 सेमी भुजा के परितः घुमाया जाता है। इस प्रकार प्राप्त ठोस का आयतन क्या है?

HINTS r = 5 सेमी, h = 12 सेमी

शंकु का आयतन = $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \times 5^2 \times 12 = 100\,\pi$सेमी³

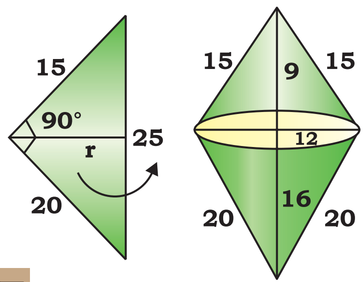
Ex. एक समकोण त्रिभुज जिसकी भुजाएँ 15 सेमी और 20 सेमी (कर्ण के अलावा) हैं, को उसके कर्ण के चारों ओर घुमाया जाता है। इस प्रकार बने दोहरे शंकु का आयतन ज्ञात कीजिए?

HINTS

$r = \frac{15 \times 20}{25} = 12$ सेमी

आयतन $= \frac{1}{3} \times 12^2 \times (9 + 16)$

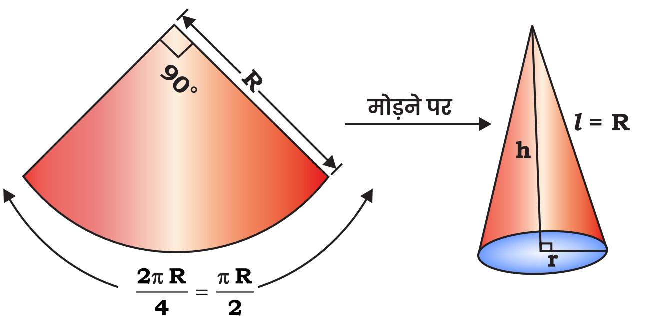
$= 48\pi \times 25 = 1200\pi$ सेमी^{3}



त्रिज्यखंड को घुमाने पर बना शंकु

जब किसी त्रिज्यखंड को इस प्रकार घुमाया जाता है कि इसकी दो त्रिज्याएँ जुड़ जाती हैं, तो एक शंकु का निर्माण होता है।

1. R सेमी त्रिज्या के एक समकोणीय त्रिज्यखंड को घुमा कर बना शंकु



$\Rightarrow 2\pi r = \frac{\pi R}{2} \Rightarrow r = \frac{R}{4}$ & $l = R$

शंकु की ऊँचाई (h) $= \sqrt{l^2 - r^2}$

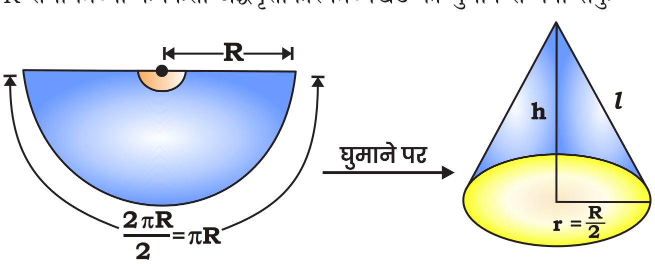
$= \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{16}} = \frac{\sqrt{15}R}{4}$

शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल $= \frac{\pi R^2}{4}$

शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi \times \left(\frac{R}{4}\right)^2 \times \frac{\sqrt{15}R}{4}$

$= \frac{\sqrt{15}\pi R^3}{192}$

2. R सेमी त्रिज्या के किसी अर्द्धवृत्ताकार त्रिज्यखंड को घुमाने से बना शंकु



शंकु की ऊँचाई (h)

$= \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}R}{2}$

शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल $= \frac{\pi R^2}{2}$

शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3}\pi \times \frac{R^2}{4} \times \frac{\sqrt{3}R}{2} = \frac{\pi R^3}{8\sqrt{3}}$

वृत्त से शंकु

• अर्द्धवृत्त (वृत्त का $\frac{1}{2}$ भाग) • शंकु → l = R $r = \frac{R}{2}$	• चतुर्थांश (वृत्त का $\frac{1}{4}$ भाग) • शंकु → l = R $r = \frac{R}{4}$
जहाँ R = अर्द्धवृत्त की त्रिज्या, l = शंकु की तिर्यक ऊँचाई r = शंकु की त्रिज्या	

Ex. एक शंकु 35 सेमी त्रिज्या और 90° के कोण वाले वृत्त से बना है। शंकु का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल कितना है?

HINTS कोण = 90° (वृत्त का $\frac{1}{4}$ भाग)

त्रिज्यखंड की त्रिज्या (R) = 35 = l

शंकु की त्रिज्या (r) $= \frac{35}{4}$

कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi r(l + r)$

$= \frac{22}{7} \times \frac{35}{4}\left(35 + \frac{35}{4}\right) = \frac{55}{2} \times \frac{175}{4} = 1203.125$ सेमी^{2}

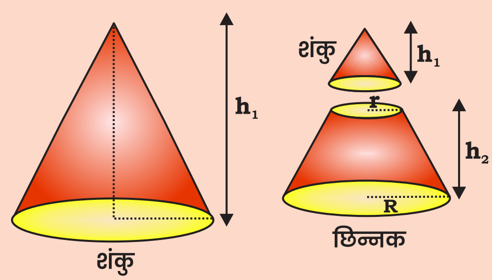
Ex. 28 सेमी व्यास वाली धातु की एक अर्धवृत्ताकार शीट को एक खुले शंक्वाकार कप के आकार में मोड़ा गया है। कप की धारिता है?

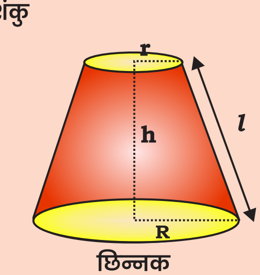
HINTS कप की धारिता $= \frac{\pi r^3}{8\sqrt{3}}$

$= \frac{22 \times 14 \times 14 \times 14}{7 \times 8 \times 1.732} = 622.36$ सेमी^{3}

छिन्नक

यदि किसी शंकु को उसके आधार के समांतर समतल द्वारा काटा जाता है तो इस समतल और आधार के बीच ठोस भाग शंकु का छिन्नक कहलाता है।





(i) छिन्नक का आयतन $= \frac{1}{3}\pi(R^2 + r^2 + Rr)\,h$

(शंकु के आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$ से तुलना करें)

(ii) पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi(R + r)l$

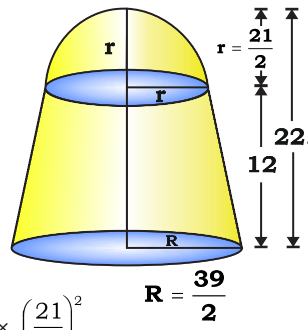
(शंकु के पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi r l$ से तुलना करें)

(iii) कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi l(R + r) + \pi(R^2 + r^2)$

(शंकु के कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi r\,(r + l)$ से तुलना करें)

जहाँ $l = \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$

Ex. 22.5 मी ऊंचा एक तम्बू एक शंकु के छिन्नक के आकार का है जिसके ऊपर एक अर्धगोला लगा हुआ है। यदि छिन्नक के ऊपरी और निचले वृत्ताकार सिरों के व्यास क्रमशः 21 मी और 39 मी हैं, तो तम्बू बनाने में इस्तेमाल किए गए कपड़े का क्षेत्रफल (वर्ग मीटर में) ज्ञात करें (बर्बादी को नजरअंदाज करते हुए)।



HINTS $l = \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$

$= \sqrt{12^2 + \left(\frac{39}{2} - \frac{21}{2}\right)^2} = 15$

आवश्यक क्षेत्रफल

$= \pi(r + R)l + 2\pi r^2$

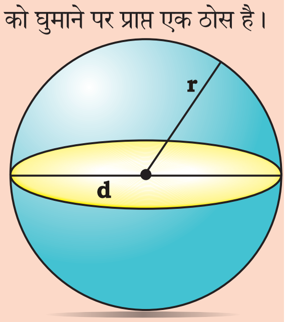
$= \frac{22}{7}\left(\frac{21}{2} + \frac{39}{2}\right)15 + 2 \times \frac{22}{7} \times \left(\frac{21}{2}\right)^2$

$= \frac{22}{7} \times \frac{60}{2} \times 15 + 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{21}{2} \times \frac{21}{2}$

$= \frac{22}{7} \times \frac{1341}{2} = \frac{14751}{7} = 2107\frac{2}{7}$ मी²

गोला

गोला अपने किसी भी व्यास के चारों ओर एक वृत्त को घुमाने पर प्राप्त एक ठोस है।



(i) गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल = $4\pi r^2$

(ii) गोले का आयतन = $\frac{4}{3}\pi r^3$

☞ माना V_1 तथा V_2 और S_1 तथा S_2 दो गोले के आयतन और क्षेत्रफल हैं।

$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^{\frac{3}{2}}$ या $\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\frac{2}{3}}$

Ex. एक गोलाकार गेंद का व्यास ज्ञात कीजिए जिसका आयतन 38.808 सेमी³ है।

HINTS गोले का आयतन = $\frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow 38.808 = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times r^3$

$\Rightarrow r = 2.1$

$\therefore$ व्यास = 2.1 × 2 = 4.2 सेमी

Ex. दो गोलों के पृष्ठीय क्षेत्रफल का अनुपात 4 : 9 है। उनके आयतन का अनुपात होगा।

HINTS $\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{2^2}{3^2}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$

Ex. विभिन्न सामग्रियों के दो गोले के वजन का अनुपात 8: 17 है और प्रत्येक के प्रति 1cc सामग्री के वजन का अनुपात 289 : 64 है। दोनों गोले की त्रिज्याओं का अनुपात ज्ञात कीजिए।

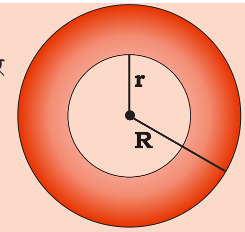
HINTS घनत्व = $\frac{\text{द्रव्यमान}}{\text{आयतन}}$

गोले के आयतन का अनुपात = $\frac{\frac{8}{289}}{\frac{17}{64}} = \frac{8 \times 64}{289 \times 17}$

$\Rightarrow \frac{\frac{4}{3}\pi r_1^3}{\frac{4}{3}\pi r_2^3} = \frac{8 \times 8 \times 8}{17 \times 17 \times 17} \Rightarrow \frac{r_1^3}{r_2^3} = \left(\frac{8}{17}\right)^3 \Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = \frac{8}{17}$

खोखला गोला

यह दो संकेंद्रित गोलों के बीच घिरा हुआ ठोस है।



माना एक गोलाकार शैल की बाहरी त्रिज्या R और आंतरिक त्रिज्या r है, तब

(i) आयतन = गोलाकार खोल में पदार्थ का आयतन

$= \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)$

(ii) कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $4\pi(R^2 - r^2)$

Ex. एक खोखली गोलाकार धातु की गेंद का बाहरी व्यास 6 सेमी है और मोटाई $\frac{1}{2}$ सेमी है। गेंद के आयतन का मान (सेमी³ में) है

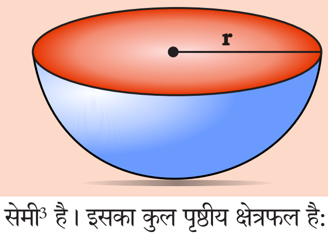
HINTS गेंद का आयतन = $\frac{4}{3}\pi\left[3^3 - \left(3 - \frac{1}{2}\right)^3\right]$

$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7}\left(27 - \frac{125}{8}\right) = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7}\left(\frac{216 - 125}{8}\right)$

$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{91}{8} = \frac{143}{3} = 47\frac{2}{3}$ सेमी³

अर्द्धगोला

जब एक ठोस गोले को उसके केंद्र से दो बराबर (समान) टुकड़ों में काटा जाता है, तो प्रत्येक टुकड़े को गोलार्द्ध अथवा अर्द्धगोला कहा जाता है।



(i) पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2\pi r^2$

(ii) कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= 2\pi r^2 + \pi r^2 = 3\pi r^2$

(iii) आयतन = $\frac{2}{3}\pi r^3$

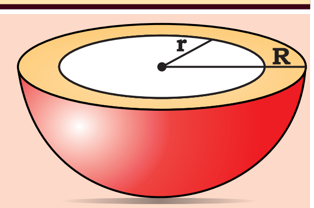
Ex. एक ठोस अर्धगोले का आयतन 19404 सेमी³ है। इसका कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल है:

HINTS $\frac{2}{3}\pi r^3 = 19404 \Rightarrow \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times r^3 = 19404$

$\Rightarrow r^3 = \frac{19404 \times 3 \times 7}{2 \times 22} = 9261 \Rightarrow r = (9261)^{\frac{1}{3}} = 21$ सेमी

$\therefore$ कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $3\pi r^2 = 3 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 = 4158$ सेमी²

अर्द्धगोलीय शेल



(i) पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2\pi(R^2 + r^2)$

(ii) कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= 2\pi R^2 + 2\pi r^2 + \pi(R^2 - r^2)$

$= 3\pi R^2 + \pi r^2$

(iii) आयतन = $\frac{2}{3}\pi(R^3 - r^3)$

Ex. एक अर्धगोलाकार कटोरा चांदी से बना है और इसका आंतरिक व्यास 4 सेमी है। यदि चांदी की मोटाई 0.5 सेमी है, तो कटोरे को बनाने में उपयोग की गई चांदी की मात्रा दशमलव के दो स्थानों तक सही ढंग से ज्ञात करें (π = 3.14 का उपयोग करें)।

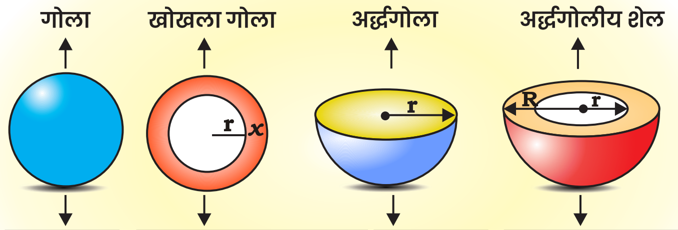
HINTS r = 2 सेमी, R = 2 + 0.5 = 2.5 सेमी

प्रयोग की गई चाँदी की मात्रा = $\frac{2}{3}\pi(R^3 - r^3)$

$= \frac{2}{3} \times 3.14\,(2.5^3 - 2^3) = \frac{2}{3} \times 3.14 \times 7.625$

= 15.96 सेमी³

सारांश



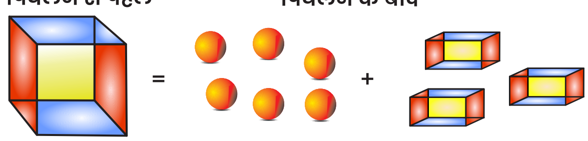
$V = \frac{4}{3}\pi r^3$ | $V = \frac{4}{3}\pi\left[(r+x)^3 - r^3\right]$ | $V = \frac{2}{3}\pi r^3$ | $V = \frac{2}{3}\pi\left(R^3 - r^3\right)$

पिघलने और पुनर्रचना की अवधारणा

पिघली हुई वस्तु का आयतन = पुनर्रचना के बाद वस्तु का आयतन

Ex. एक बड़े ठोस घन को पिघलाकर 'N' छोटे ठोस गोले बनाए गए हैं, जिनमें से प्रत्येक की त्रिज्या 3 सेमी है, और 'N + 2' छोटे ठोस घनाभ बनाए गए हैं, जिनकी प्रत्येक भुजा 4 सेमी × 4 सेमी × 6.5 सेमी है। यदि बड़े ठोस घन की प्रत्येक भुजा की लंबाई 12 सेमी है, तो 'N' का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS



दिया है, छोटे गोलों की त्रिज्या = 3 सेमी

घनाभ का आयतन = (4 × 4 × 6.5) सेमी^{3}

घन की भुजा = 12 सेमी

प्रश्नानुसार,

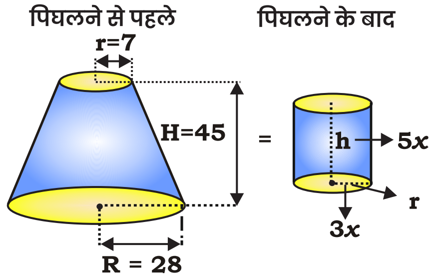
$12 \times 12 \times 12 = \left(\frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 3 \times 3 \times 3 \times N\right) + (N+2)\,(4 \times 4 \times 6{\cdot}5)$

$\Rightarrow 1728 = \frac{88}{7} \times 9N + 104N + 208$

$\Rightarrow 1520 = \frac{792}{7} \times N + 104N \Rightarrow 1520 = \frac{1520}{7}N \Rightarrow N = 7$

Ex. 45 सेमी ऊँचे एक ठोस लम्ब-वृत्ताकार शंकु के छिन्नक के सिरों की त्रिज्याएँ 28 सेमी और 7 सेमी हैं। यदि इस छिन्नक को पिघलाकर एक ठोस लम्ब-वृत्ताकार बेलन बनाया जाए, जिसके आधार की त्रिज्या और ऊँचाई का अनुपात 3 : 5 है, तो इस बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल (सेमी^{2} में) ज्ञात कीजिए।

HINTS पिघलने से पहले   पिघलने के बाद



छिन्नक का आयतन = बेलन का आयतन $\Rightarrow \frac{1}{3}\pi H\left(R^2 + Rr + r^2\right) = \pi r^2 h$

$\Rightarrow \frac{45}{3}\left[28^2 + (28 \times 7) + 7^2\right] = 9x^2 \times 5x \Rightarrow 784 + 196 + 49 = 3x^3$

$\Rightarrow 1029 = 3x^3 \Rightarrow x^3 = 343 \Rightarrow x = 7$

$\therefore$ बेलन की त्रिज्या = 3 × 7 = 21 सेमी

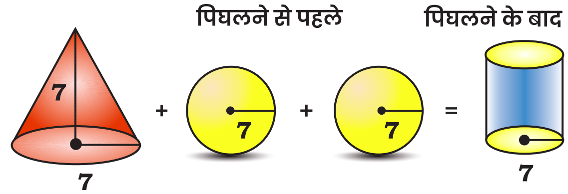
बेलन की ऊँचाई = 5 × 7 = 35 सेमी

$\therefore$ बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2\pi rh = 2 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 35$

= 4620 सेमी^{2}

Ex. 7 सेमी त्रिज्या और 7 सेमी ऊँचाई वाले एक ठोस शंकु को 7 सेमी त्रिज्या वाले दो ठोस गोलों के साथ पिघलाकर 7 सेमी त्रिज्या वाला एक ठोस बेलन बनाया गया। बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल (सेमी^{2} में) क्या है?

HINTS



(शंकु + 2 गोले) का आयतन = बेलन का आयतन

$\Rightarrow \frac{1}{3} \times \pi \times 7^2 \times 7 + 2 \times \frac{4}{3}\pi \times 7^3 = \pi R^2 h$

$\Rightarrow \frac{1}{3}\pi \times 343 \times (1 + 8) = \pi R^2 h$

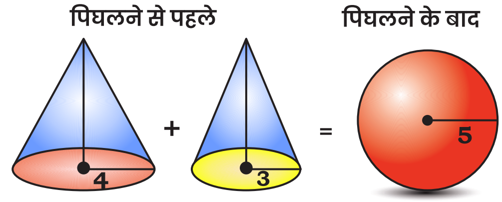
$\Rightarrow R^2 h = 343 \times 3 \Rightarrow 49 \times h = 343 \times 3 \Rightarrow h = 21$ सेमी

$\therefore$ बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2\pi rh$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 21 = 44 \times 21 = 924$ सेमी^{2}

Ex. 3 सेमी और 4 सेमी आधार त्रिज्याओं वाले बराबर ऊंचाई वाले दो लम्ब वृत्तीय शंकुओं को एक साथ पिघलाकर 5 सेमी त्रिज्या वाला एक ठोस गोला बनाया जाता है। शंकु की ऊंचाई है:

HINTS



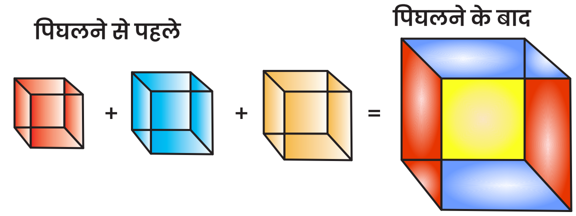
दो शंकुओं का आयतन = गोले का आयतन

$\Rightarrow \frac{1}{3}\pi \times 3^2 \times h + \frac{1}{3}\pi \times 4^2 \times h = \frac{4}{3}\pi \times 5^3$

$\Rightarrow 9h + 16h = 4 \times 125 \Rightarrow h = \frac{4 \times 125}{25} = 20$ सेमी

Ex. धातु के तीन घन जिनके किनारे क्रमशः 6 सेमी, 8 सेमी और 10 सेमी हैं। को पिघलाया जाता है और एक घन बनाया जाता है। नए बने घन के किनारे की लंबाई क्या है?

HINTS



पुनः निर्मित घन का आयतन = तीन घनों के आयतन का योग

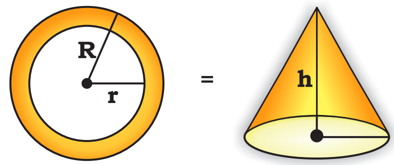
$\Rightarrow a^3 = 6^3 + 8^3 + 10^3 = 216 + 512 + 1000 = 1728$

$\Rightarrow a = (1728)^{\frac{1}{3}} = 12$ सेमी

जब कई घन मिलकर एक घन बनाते हैं, तो नए घन की भुजा $= \sqrt[3]{\text{सभी घनों की भुजाओं के घनों का योग}}$

Ex. आंतरिक और बाह्य व्यास क्रमशः 6 सेमी और 10 सेमी वाले एक खोखले गोले को पिघलाकर 8 सेमी व्यास वाला एक लम्ब वृत्तीय शंकु बनाया गया है। शंकु की ऊँचाई है:

HINTS पिघलने से पहले — पिघलने के बाद



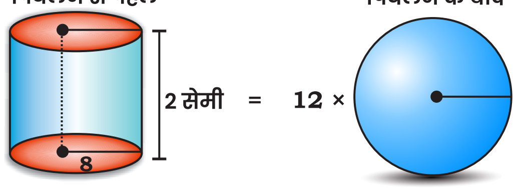
शंकु का आयतन = खोखले गोले का आयतन

$\Rightarrow \frac{1}{3}\pi \times 4^2 \times h = \frac{4}{3}\pi(5^3 - 3^3)$

$\Rightarrow h = \frac{125-27}{4} = \frac{98}{4} = \frac{49}{2} = 24.5$ सेमी

Ex. 16 सेमी व्यास और 2 सेमी ऊंचाई वाले एक ठोस बेलन को पिघलाकर समान आकार के 12 गोले बनाए गए हैं। प्रत्येक गोले का व्यास है:

HINTS पिघलने से पहले — पिघलने के बाद



12 गोलों का आयतन = बेलन का आयतन

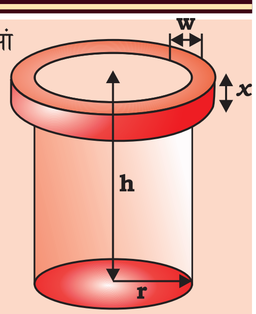
$\Rightarrow 12 \times \frac{4}{3}\pi r^3 = \pi \times 8^2 \times 2$

$\Rightarrow r^3 = \frac{64 \times 2 \times 3}{12 \times 4} = 8 \Rightarrow r = 2$ सेमी

खुदाई और निकाली गई मिट्टी की अवधारणा

'D' मीटर व्यास या 'r' मीटर त्रिज्या वाला एक कुआं 'h' मीटर गहरा खोदा गया है। यदि निकाली गई मिट्टी को इसके चारों ओर 'w' मीटर चौड़ाई में फैलाकर एक गोलाकार तटबंध बनाया गया है, तो तटबंध की ऊंचाई

$= \frac{r^2h}{w(w+D)}$

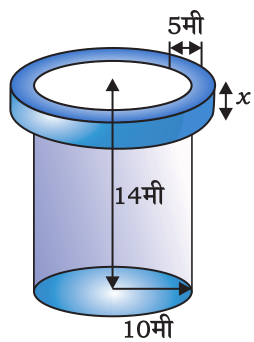


Ex. 20 मी व्यास वाला एक कुआँ 14 मी गहरा खोदा जाता है और निकाली गई मिट्टी को चबूतरा बनाने के लिए उसके चारों ओर 5 मी की चौड़ाई में फैला दिया जाता है। चबूतरे की ऊंचाई है:

HINTS तटबंध का आयतन = कुएँ का आयतन (निकाली गई मिट्टी का आयतन)

$\Rightarrow \pi(15^2 - 10^2)\, h = \pi \times 10^2 \times 14$

$\Rightarrow h = \frac{10 \times 10 \times 14}{125} = \frac{56}{5} = 11.2$ मी



वैकल्पिक विधि

तटबंध की ऊँचाई $= \frac{r^2h}{w(w+D)}$

$= \frac{10 \times 10 \times 14}{5(5+20)} = \frac{1400}{125} = \frac{56}{5} = 11.2$ मी

Ex. एक मैदान 125 मी लंबा और 15 मी चौड़ा है। इसमें 10 मी × 7.5 मी × 6 मी का एक टैंक खोदा गया और इस तरह खोदी गई मिट्टी को शेष मैदान पर समान रूप से फैला दिया गया। इस प्रकार मैदान की ऊँचाई में वृद्धि किसके बराबर है?

HINTS शेष मैदान = मैदान का क्षेत्रफल – टैंक का क्षेत्रफल

= 125 × 15 – 10 × 7.5 = 1800 मी²

खोदी गई मिट्टी का आयतन = 10 × 7.5 × 6 = 450मी³

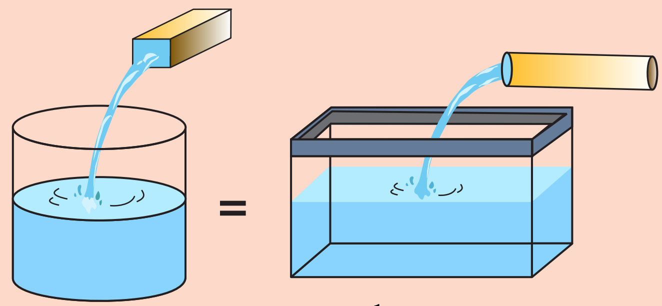
दी गई शर्त से, 1800 × h = 450

$\Rightarrow h = \frac{450}{1800} = \frac{1}{4}$ मी $= \frac{100}{4}$ सेमी = 25 सेमी

एक पात्र को दूसरे आकार के पात्र से भरना

t समय में पाइप (बेलनाकार / घनाभ) से बहने वाले पानी का आयतन = टैंक का आयतन (बेलनाकार / घनाभ)

⇒ आधार का क्षेत्रफल × प्रवाह की गति × समय = टैंक का आयतन (बेलनाकार / घनाभ)



(a) $\pi r^2 \times v \times t = \pi R^2 h$ या LBH या $\frac{1}{3}\pi R^2 H$

(b) $l \times b \times v \times t =$ LBH या $\pi R^2 h$

Ex. पानी एक बेलनाकार पाइप जिसकी त्रिज्या 7 सेमी है, से 5 मी प्रति सेकंड की गति से बहता है। 1.54 मी ऊँचाई और आधार का क्षेत्रफल (3 × 5) वर्ग मीटर वाले एक खाली पानी के टैंक को भरने में लगने वाला समय है।

HINTS πr^2 (vt) = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई

$\Rightarrow \frac{22}{7} \times \frac{7}{100} \times \frac{7}{100} \times 5t = (3 \times 5) \times 1.54$

⇒ t = 300 सेकंड = 5 मिनट

Ex. 5 मिमी व्यास वाले एक बेलनाकार पाइप से 10 मी प्रति मिनट की दर से पानी बहता है। एक शंकाकार बर्तन को भरने में कितना समय लगेगा जिसका आधार व्यास 30 सेमी और गहराई 24 सेमी है?

HINTS $\pi r^2 (vt) = \frac{1}{3}\pi R^2 H$

$\Rightarrow 0.25 \times 0.25 \times 1000t = \frac{1}{3} \times 15 \times 15 \times 24$

$\Rightarrow t = \frac{144}{5} = 28\frac{4}{5}$ मिनट = 28 मिनट, $\frac{4}{5} \times 60$ सेंकड

= 28 मिनट 48 सेकंड

Ex. 20 सेमी आंतरिक व्यास वाले एक वृत्ताकार पाइप के माध्यम से 3 किमी/घंटा की दर से पानी 10 मी व्यास और 2 मी गहराई वाले एक वृत्ताकार टैंक में बह रहा है। कितने समय में टैंक भर जाएगा?

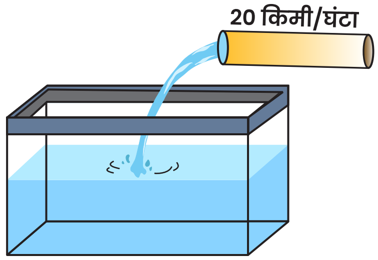
HINTS पाइप से t घंटे में पानी बहता है = वृत्ताकार टंकी का आयतन

$\Rightarrow \pi r^2 (vt) = \pi R^2 H \Rightarrow t = \frac{R^2H}{r^2v} = \frac{5 \times 5 \times 2 \times 100 \times 100}{10 \times 10 \times 3000} = \frac{5}{3}$

$= 1$ घंटा, $\frac{2}{3} \times 60$ मिनट = 1 घंटा, 40 मिनट

Ex. 200 मी लंबे और 150 मी चौड़े एक टैंक में पानी 0.3 मी × 0.2 मी क्रॉस-सेक्शन वाले पाइप के माध्यम से 20 किमी/घंटा की गति से बहता है। तो टैंक में पानी का स्तर 8 मी तक पहुंचने में लगने वाला समय (घंटों में) है:

HINTS माना टैंक में पानी का स्तर 8 मी तक पहुंचने में t घंटे का समय लगता है



$\therefore$ पाइप द्वारा t घंटे में भरा गया पानी = पानी की टंकी का आयतन

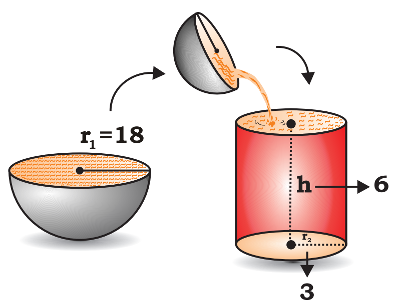
$\Rightarrow$ क्रॉस सेक्शन का क्षेत्रफल × (v × t) = $l \times b \times h$

$\Rightarrow 0.3 \times 0.2 \times 20000t = 200 \times 150 \times 8$

$\Rightarrow t = \dfrac{200 \times 150 \times 8}{0.3 \times 0.2 \times 20000}$ = 200 घंटे

Ex. तरल रूप में कुछ दवा 36 सेमी व्यास वाले अर्धगोलाकार कंटेनर में तैयार की जाती है। जब कंटेनर दवा से भर जाता है, तो दवा को 6 सेमी व्यास और 6 सेमी ऊंचाई वाली छोटी बेलनाकार बोतलों में स्थानांतरित कर दिया जाता है। कंटेनर को खाली करने के लिए कितनी बोतलों की आवश्यकता होगी?

HINTS



अर्द्धगोले का व्यास = 36 सेमी

अर्द्धगोले की त्रिज्या (r_1) = 18 सेमी

बेलन का व्यास = 6 सेमी

बेलन की त्रिज्या (r_2) = 3 सेमी

माना n बेलनाकार बोतलों की आवश्यकता है।

$\therefore$ अर्द्धगोले का आयतन = n × बेलन का आयतन

$\Rightarrow \dfrac{2}{3}\pi r_1^3 = n \times \pi r_2^2 \times h$

$\Rightarrow \dfrac{2}{3} \times 18 \times 18 \times 18 = n \times 3 \times 3 \times 6 \Rightarrow n = 72$

इसे स्वयं करें

Ex. 6 सेमी आंतरिक त्रिज्या वाले एक अर्धगोलाकार कटोरे में एक द्रव है। इस द्रव को 2 सेमी व्यास और 4 सेमी ऊँचाई वाली बेलनाकार छोटी बोतलों में भरना है। कटोरे को खाली करने के लिए कितनी बोतलों की आवश्यकता होगी?

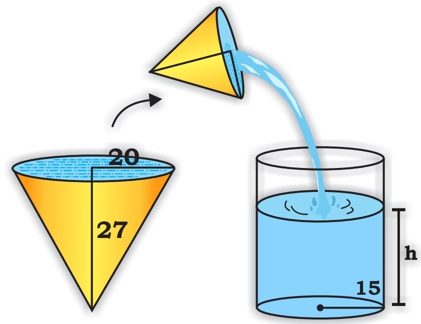
(a) 32 (b) 37 (c) 38 (d) 36

[सही उत्तर = (d)]

ऊंचाई में वृद्धि की अवधारणा

Ex. एक शंक्वाकार बर्तन, जिसकी आंतरिक त्रिज्या 20 सेमी और ऊंचाई 27 सेमी है, पानी से भरा है। यदि इस पानी को 15 सेमी आंतरिक त्रिज्या वाले बेलनाकार बर्तन में डाला जाए, तो पानी कितनी ऊंचाई तक ऊपर उठेगा?

HINTS

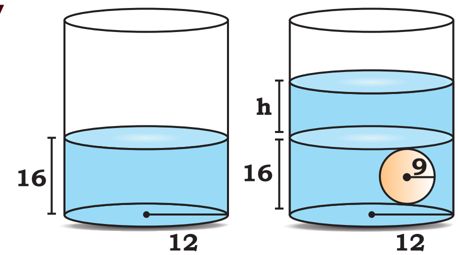


शंकु का आयतन = बेलन का आयतन $\Rightarrow \dfrac{1}{3} \times \pi r^2 h = \pi r_1^2 h_1$

$\Rightarrow \dfrac{1}{3} \times \pi \times (20)^2 \times 27 = \pi \times (15)^2 \times h_1 \Rightarrow h_1 = 16$ सेमी

Ex. एक बेलन में 16 सेमी की ऊंचाई तक थोड़ा पानी है। यदि इसमें 9 सेमी त्रिज्या का एक गोला डाला जाता है, तो पानी की ऊंचाई में वृद्धि ज्ञात कीजिए, यदि बेलन की त्रिज्या 12 सेमी है।

HINTS



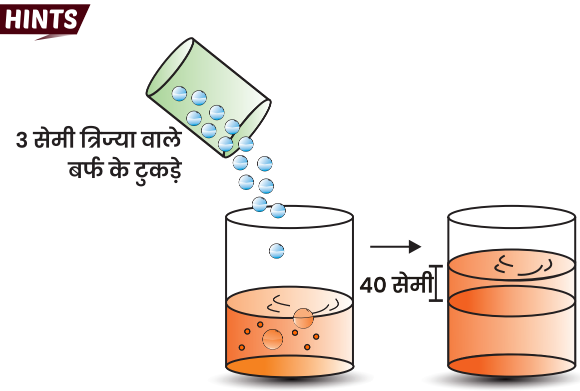
माना जल स्तर में वृद्धि h सेमी है।

तब, गोले का आयतन = वृद्धि हुए पानी का आयतन

$\Rightarrow \dfrac{4}{3}\pi(9)^3 = \pi \times (12)^2 \times h \Rightarrow h = \dfrac{4}{3} \times \dfrac{9 \times 9 \times 9}{12 \times 12} = \dfrac{27}{4} = 6.75$ सेमी

Ex. कुछ गोलाकार बर्फ के टुकड़े, जिनका व्यास 6 सेमी है, को जूस से भरे एक बेलनाकार कंटेनर में डाला जाता है और पूरी तरह से डूबा दिया जाता है। यदि कंटेनर का व्यास 18 सेमी है और जूस का स्तर 40 सेमी बढ़ जाता है, तो कंटेनर में कितने बर्फ के टुकड़े डाले गए हैं?

HINTS



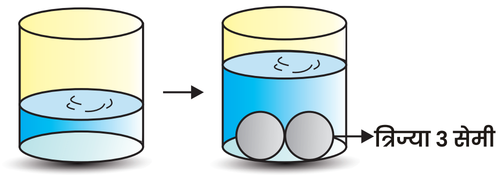
माना n बर्फ के टुकड़े डाले गए है।

बेलन का आयतन = n × गोलाकार बर्फ के टुकड़ों का आयतन

$\Rightarrow \pi \times 9 \times 9 \times 40 = \dfrac{4}{3} \times \pi \times (3)^3 \times n \Rightarrow n = \dfrac{9 \times 9 \times 40 \times 3}{3 \times 3 \times 3 \times 4} = 90$

Ex. 6 सेमी व्यास वाले दो लोहे के गोले 6 सेमी त्रिज्या वाले पानी से भरे एक बेलनाकार बर्तन में डूबे हुए हैं। बर्तन में पानी का स्तर कितना बढ़ जाएगा?

HINTS



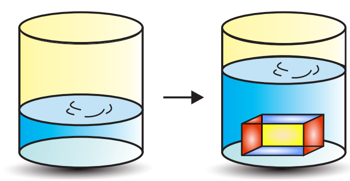
दो लोहे के गोले का आयतन = बेलन का आयतन

$\Rightarrow 2 \times \frac{4}{3} \times \pi \times 3^3 = \pi \times 6^2 \times h$

$\Rightarrow h = 2$ सेमी

Ex. 14 सेमी आधार त्रिज्या वाले एक बेलनाकार बर्तन को कुछ ऊंचाई तक पानी से भरा गया है। यदि 22 सेमी × 7 सेमी × 5 सेमी आयाम वाले एक आयताकार ठोस को इसमें डुबोया जाए तो पानी के स्तर में कितनी वृद्धि होगी?

HINTS



बेलन का आयतन = आयताकार ठोस का आयतन

$\Rightarrow \frac{22}{7} \times 14 \times 14 \times h = 22 \times 7 \times 5$

$\Rightarrow h = \frac{5}{4} = 1.25$ सेमी

Ex. 35 सेमी व्यास वाला एक बेलनाकार टैंक पानी से भरा है। यदि 11 लीटर पानी निकाला जाए तो टैंक में पानी का स्तर कितना गिर जाएगा?

$\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

HINTS बेलन का आयतन = $\pi r^2 h$

$\Rightarrow \pi r^2 h = 11 \times 1000$ सेमी^{3}

$\Rightarrow \frac{22}{7} \times \frac{35}{2} \times \frac{35}{2} \times h = 11 \times 1000$

$\Rightarrow h = \frac{80}{7} = 11\frac{3}{7}$ सेमी

Ex. एक आयताकार टैंक जिसकी लंबाई और चौड़ाई क्रमशः 2.5 मी और 1.5 मी है, पानी से आधा भरा हुआ है। यदि टैंक में 750 लीटर पानी और डाला जाता है, तो पानी का स्तर कितनी ऊंचाई तक ऊपर चला जाता है?

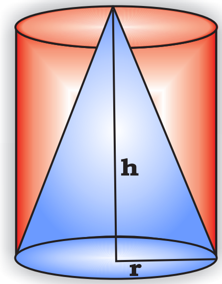
HINTS अतिरिक्त घनाभ का आयतन = पानी का आयतन

$\Rightarrow 2.5 \times 1.5 \times h = \frac{750}{1000}$

$\Rightarrow h = 0.2$ मी = 20 सेमी

त्रिविमीय आकृतियों का संयोजन

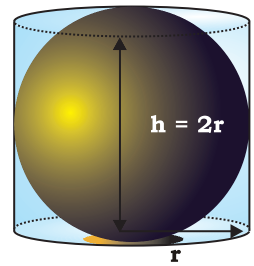
(i) बेलन के अन्दर अधिकतम आयतन का शंकु



बेलन का आयतन : शंकु का आयतन

$= \pi r^2 h : \frac{1}{3}\pi r^2 h = 3 : 1$

(ii) बेलन के अन्दर गोला

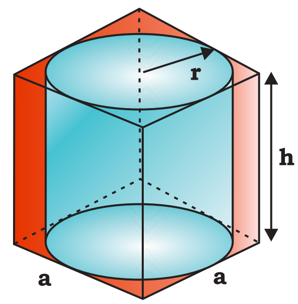


बेलन की ऊँचाई = गोले का व्यास = 2r

बेलन का आयतन : गोले का आयतन

$= \pi r^2(2r) : \frac{4}{3}\pi r^3 = 2 : \frac{4}{3} = 3 : 2$

(iii) घन के अन्दर अधिकतम आयतन का बेलन



बेलन की त्रिज्या

$= \frac{1}{2} \times$ घन का किनारा $= \frac{a}{2}$

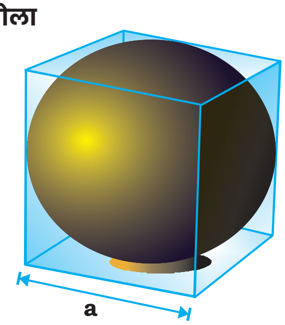
बेलन की ऊँचाई = घन का किनारा = a

घन का आयतन : बेलन का आयतन

$= a^3 : \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 a$

$= 1 : \frac{22}{7} \times \frac{1}{4} = 14 : 11$

(iv) घन के अन्दर अधिकतम आयतन का गोला



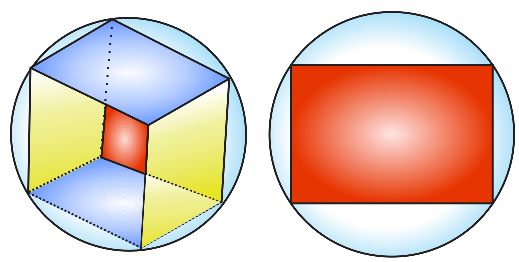
गोले का व्यास (2r) = घन की कोर = a

घन का आयतन : गोले का आयतन

$= a^3 : \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^3$

= 21: 11

(v) किसी गोले के अन्दर अधिकतम आयतन का घन



घन का विकर्ण = गोले का व्यास

$\Rightarrow \sqrt{3}a = 2r \Rightarrow a = \frac{2r}{\sqrt{3}}$

गोले का आयतन : घन का आयतन

$= \frac{4}{3}\pi r^3 : \left(\frac{2r}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} : \frac{8}{3\sqrt{3}} = 11\sqrt{3} : 7$

(vi) किसी शंकु के अन्दर अधिकतम आयतन का गोला

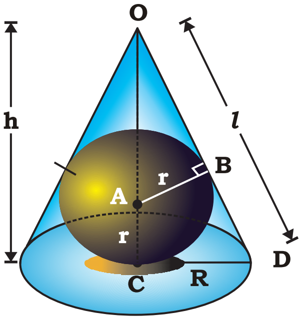
$\Delta OCD \sim \Delta OBA$

$\Rightarrow \dfrac{OD}{OA} = \dfrac{CD}{AB}$

$\Rightarrow \dfrac{l}{h-r} = \dfrac{R}{r}$

$\Rightarrow l \times r = hR - Rr$

$\Rightarrow r = \dfrac{hR}{l+R}$



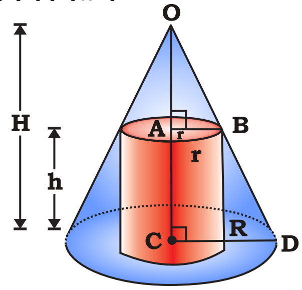
(vii) किसी शंकु के अन्दर अधिकतम आयतन का बेलन

$\Delta OCD \sim \Delta OAB$

($\angle A = \angle C = 90°$, $\angle O$ उभयनिष्ठ)

$\Rightarrow \dfrac{OC}{OA} = \dfrac{CD}{AB}$

$\Rightarrow \dfrac{H}{H-h} = \dfrac{R}{r}$



(viii) शंकु के अन्दर अधिकतम आयतन का घन

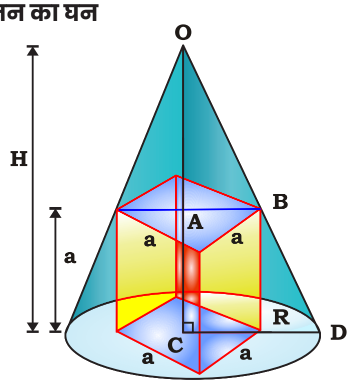
$\Delta OCD \sim \Delta OAB$

$\Rightarrow \dfrac{OC}{OA} = \dfrac{CD}{AB}$

$\Rightarrow \dfrac{H}{H-a} = \dfrac{R}{a/\sqrt{2}}$

$\left[\therefore AB = \dfrac{\sqrt{2}a}{2} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}\right]$

$\Rightarrow a = \dfrac{\sqrt{2}RH}{\sqrt{2}R + H}$

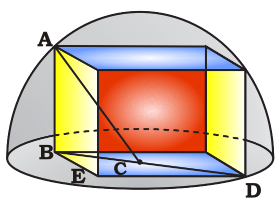


(ix) गोलार्द्ध के अंदर सबसे बड़ा घन

मान R अर्द्धगोले की त्रिज्या है और x घन की भुजा है। C गोलार्द्ध का केन्द्र है।

$BD = \sqrt{2}x$

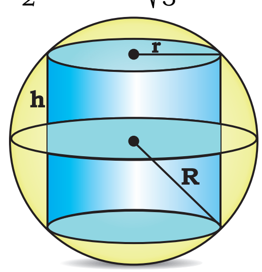
$\therefore BC = \dfrac{x}{\sqrt{2}}$



ΔABC में, $AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow R^2 = \dfrac{3x^2}{2} \Rightarrow x = \sqrt{\dfrac{2}{3}}R$

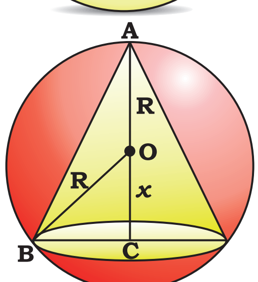
(x) एक गोले के अंदर बेलन

$\dfrac{\text{बेलन का आयतन}}{\text{गोले का आयतन}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$



(xi) एक गोले के अंदर शंकु

$\dfrac{\text{शंकु का आयतन}}{\text{गोले का आयतन}} = \dfrac{8}{27}$



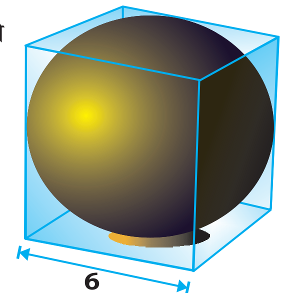
Ex. सबसे बड़ा संभावित गोला 6 सेमी भुजा वाले घन में बनाया गया है। गोले का आयतन क्या है?

HINTS सबसे बड़े सम्भावित गोले की

त्रिज्या $= \dfrac{6}{2} = 3$ सेमी

गोले का आयतन $= \dfrac{4}{3}\pi r^3$

$= \dfrac{4}{3} \times \dfrac{22}{7} \times 3 \times 3 \times 3 = \dfrac{792}{7}$ सेमी^{3}



वैकल्पिक विधि

घन का आयतन $= a^3 = 6^3 = 216$

घन का आयतन : गोले का आयतन = 21 : 11

$\downarrow$ 216 ; $\downarrow \dfrac{792}{7}$

Ex. एक गोला 14 सेमी भुजा वाले एक घन के आठ कोनों से होकर गुजरता है। गोले का आयतन (सेमी^{3} में) ज्ञात कीजिए। ($\pi = \dfrac{22}{7}$ का प्रयोग करें)

HINTS घन की भुजा = 14 सेमी

$\Rightarrow$ घन का विकर्ण $= 14\sqrt{3}$

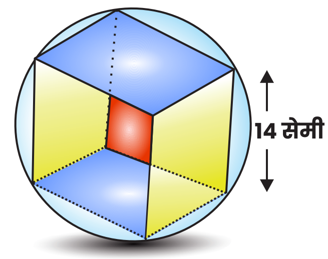
$\Rightarrow$ गोले की त्रिज्या $= \dfrac{14\sqrt{3}}{2} = 7\sqrt{3}$

$\therefore$ गोले का आयतन $= \dfrac{4}{3}\pi r^3$

$= \dfrac{4}{3} \times \dfrac{22}{7} \times 7\sqrt{3} \times 7\sqrt{3} \times 7\sqrt{3}$

$= 88 \times 49\sqrt{3}$

$= 4312\sqrt{3}$ सेमी^{3}

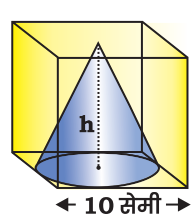


वैकल्पिक विधि

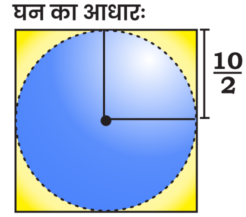
गोले का आयतन	:	**घन का आयतन**
$11\sqrt{3}$	:	7
$\downarrow \times 392$		$\downarrow \times 392$
$\boxed{4312\sqrt{3}}$		14^3 (दिया गया है)

Ex. उस सबसे बड़े लम्ब वृत्तीय शंकु का आयतन क्या है जिसे 10 सेमी भुजा वाले घन से काटा गया है?

HINTS



घन का आधारः



शंकु की ऊँचाई = घन की ऊँचाई

शंकु की त्रिज्या $= \dfrac{1}{2} \times$ घन की चौड़ाई

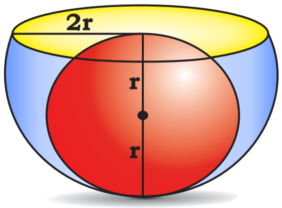
दिया है, किनारा = 10 सेमी

$\therefore$ शंकु का आयतन $= \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi \times 5 \times 5 \times 10$

$= \dfrac{250}{3}\pi$ सेमी^{3}

Ex. एक ठोस अर्धगोले में से अधिकतम आयतन वाला एक गोला काटा गया है। गोले के आयतन का शेष ठोस के आयतन से अनुपात क्या है?

HINTS



गोले का आयतन	:	शेष का आयतन
$\frac{4}{3}\pi \times r^3$	:	$\frac{2}{3}\pi(2r)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3$
$\frac{4}{3}\pi r^3$	:	$\frac{2}{3}\pi \times 8r^3 - \frac{4}{3}\pi r^3$
$\frac{4}{3}\pi r^3$	:	$\frac{12}{3}\pi r^3$
1	:	3

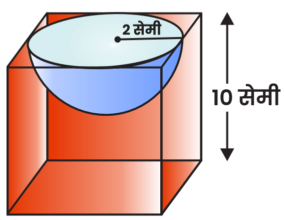
$\therefore$ आवश्यक अनुपात = 1 : 3

Ex. 10 सेमी भुजा वाले एक घनाकार ब्लॉक के प्रत्येक फलक से 4 सेमी व्यास का एक अर्धगोलाकार गड्ढा काटा जाता है। शेष ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल (सेमी² में) ज्ञात कीजिए। ($\pi = \frac{22}{7}$ का प्रयोग करें)

HINTS

अर्द्धगोले की त्रिज्या = $\frac{4}{2}$ = 2 सेमी

आवश्यक पृष्ठीय क्षेत्रफल = घन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल – 6 × घन के प्रत्येक फलक के शीर्ष पर बने वृत्त का क्षेत्रफल + 6 × घन के प्रत्येक फलक पर बने अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल



$= 6 \times 10^2 - 6\pi \times 2^2 + 6 \times 2\pi \times 2^2$

$= 600 + 24\pi$

$= 600 + 24 \times \frac{22}{7} = 600 + \frac{528}{7}$

$= 600 + 75\frac{3}{7} = 675\frac{3}{7}$ सेमी²

Ex. एक खिलौना बनाने के लिए, एक बेलन के एक सिरे पर एक अर्धगोला और दूसरे सिरे पर एक शंकु लगा हुआ है। बेलन, शंकु और अर्धगोले की समान त्रिज्या 4.2 सेमी है। बेलन और शंकु की ऊँचाई 7 सेमी है। खिलौने का आयतन (सेमी³ में) ज्ञात कीजिए। ($\pi = \frac{22}{7}$ का प्रयोग करें)

HINTS

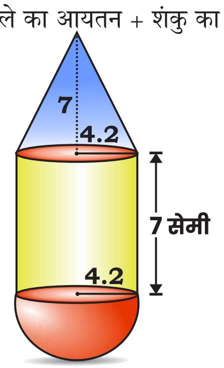
खिलौने का आयतन = बेलन का आयतन + अर्धगोले का आयतन + शंकु का आयतन

$= \pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3 + \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \pi r^2 \left(h + \frac{2}{3}r + \frac{h}{3}\right)$

$= \frac{22}{7} \times 4.2 \times 4.2 \times \left(7 + \frac{2}{3} \times 4.2 + \frac{7}{3}\right)$

$= 672.672$ सेमी³



ठोस को काटने की अवधारणा

(a) ठोस का आयतन नहीं बदलता है।

Ex. एक गोले को अर्धगोले में काटा जाता है। उनमें से एक का उपयोग कटोरे के रूप में किया जाता है। 12 सेमी ऊंचाई और 6 सेमी त्रिज्या वाले एक शंक्वाकार बर्तन को भरने में इसकी 8 कटोरियां लगती हैं। बेलन की त्रिज्या है:

HINTS 8 अर्द्धगोलों का आयतन = शंकु का आयतन

$\Rightarrow 8 \times \frac{2}{3} \times \pi \times r^3 = \frac{1}{3}\pi \times 6^2 \times 12$

$\Rightarrow r^3 = \frac{6^2 \times 12}{8 \times 2} = \frac{6^3}{8} = \frac{6^3}{2^3} \Rightarrow r = \frac{6}{2} = 3$ सेमी

(b) ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल बढ़ जाता है।

Ex. 50 सेमी × 40 सेमी × 30 सेमी आकार के एक घनाभ को 3 कट द्वारा 8 समान भागों में काटा जाता है। सभी 8 भागों का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल (वर्ग सेमी में) क्या है?

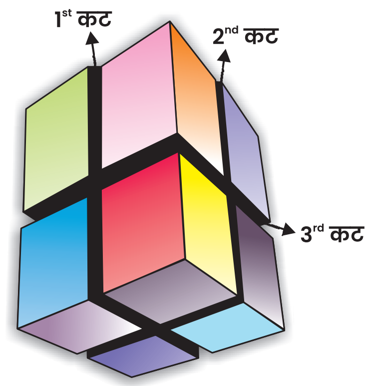
HINTS

काटने से पहले कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = 2(50 × 40 + 40 × 30 + 30 × 50)

= 9400 सेमी²

लंबाई-चौड़ाई, चौड़ाई-ऊँचाई और ऊँचाई-लंबाई के तीन कट होते हैं। इसलिए, प्रत्येक काट से अतिरिक्त लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई प्राप्त होती है।

आठ बराबर भागों में काटने के बाद पृष्ठीय क्षेत्रफल दोगुना हो जायेगा।



$\therefore$ काटने के बाद कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = 2 × 9400 = 18800 सेमी²

वैकल्पिक विधि

लंबाई-चौड़ाई, चौड़ाई-ऊँचाई और ऊँचाई-लंबाई के तीन कट होते हैं। इसलिए, प्रत्येक कट लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई को दो समान भागों में विभाजित करता है।

प्रत्येक भाग के लिए नया आयाम = 25 सेमी × 20 सेमी × 15 सेमी

प्रत्येक भाग का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = 2(25 × 20 + 20 × 15 + 15 × 25) = 2350 सेमी²

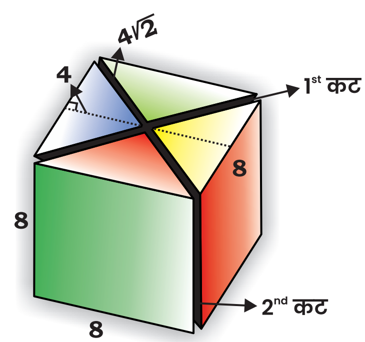
8 भागों का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = 2350 × 8 = 18800 सेमी²

Ex. एक ठोस घन की भुजा 8 सेमी है। इसे शीर्ष फलक के विकर्ण के समांतर काटकर 4 बराबर भाग प्राप्त किए गए हैं। प्रत्येक भाग का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल (सेमी² में) क्या है?

HINTS

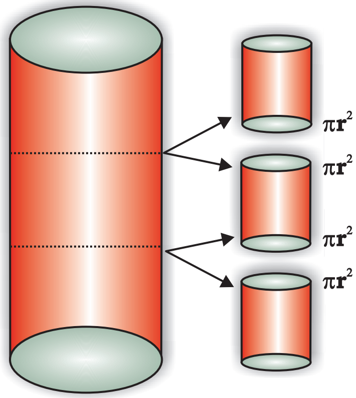
कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2 \times \frac{1}{2} \times 8 \times 4 + 8 \times 8 + 8 \times 4\sqrt{2} \times 2$

$= 96 + 64\sqrt{2}$



Ex. एक लम्ब वृत्तीय बेलन की ऊँचाई 18 सेमी और त्रिज्या 7 सेमी है। बेलन को तीन बराबर भागों में काटा जाता है (आधार के समानांतर 2 कटो से)। कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल में प्रतिशत वृद्धि क्या है?

HINTS



कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2\pi r(h + r) = 44 \times 25 = 1100$ सेमी²

पृष्ठीय क्षेत्रफल में वृद्धि = $4\pi r^2 = 4 \times 154 = 616$ सेमी²

% वृद्धि = $\frac{616}{1100} \times 100\% = 56\%$

Ex. 17.5 सेमी व्यास वाले एक ठोस गोले को दो बराबर भागों में काटा जाता है। कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल में कितनी वृद्धि (सेमी² में) होगी?

HINTS हम जानते है

ठोस गोले का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $4\pi r^2$

जब इसे दो गोलार्थों में आधा भागों में काटा जाता है।

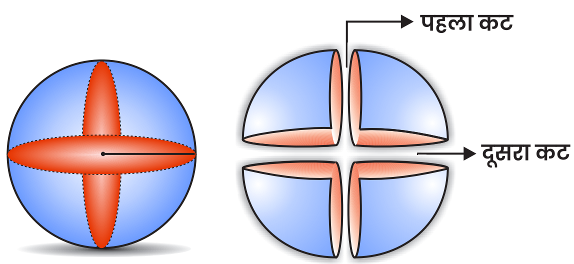
तब, कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $3\pi r^2 + 3\pi r^2 = 6\pi r^2$

अत:, क्षेत्रफल में वृद्धि = $6\pi r^2 - 4\pi r^2 = 2\pi r^2$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{17.5}{2} \times \frac{17.5}{2}$

= 481.25 सेमी²

☞



2 कट (4) भाग), 1 कट → 2 वृत्त का क्षेत्रफल (वृद्धि)

4 भाग का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $4\pi r^2 + 4\pi r^2 = 8\pi r^2$

प्रत्येक भाग का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल (चतुर्थांश गोला) = $\frac{8\pi r^2}{4} = 2\pi r^2$

Ex. एक गोलाकार गेंद को पहले पॉलिश किया जाता है और फिर उसे 4 बराबर टुकड़ों में काटा जाता है। पॉलिश किए गए क्षेत्रफल और बिना पॉलिश किए क्षेत्रफल का अनुपात क्या है?

HINTS पॉलिश किये हुए भाग का क्षेत्रफल = $4\pi r^2$

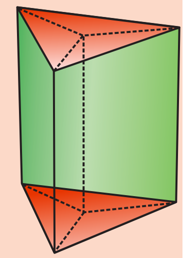
बिना पॉलिश किये हुए भाग का क्षेत्रफल

$= 4 \times \left(2 \times \frac{\pi r^2}{2}\right) = 4\pi r^2$

$\frac{\text{पॉलिश किये हुए भाग का क्षेत्रफल}}{\text{बिना पॉलिश किये हुए भाग का क्षेत्रफल}} = \frac{4\pi r^2}{4\pi r^2} = 1 : 1$

प्रिज्म

☞ प्रिज्म एक ठोस होता है जिसके दो फलक समानांतर और सर्वांगसम होते हैं और उनके फलक (बहुभुज) शीर्ष से जुड़ते हैं। प्रिज्म में आधार के रूप में एक बहुभुज होता है और ऊर्ध्वाधर भुजा आधार के लम्बवत होती है।



(i) प्रिज्म का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = आधार का परिमाप × ऊँचाई

(ii) प्रिज्म का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + 2 × आधार का क्षेत्रफल

(iii) प्रिज्म का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई

Ex. एक समकोण प्रिज्म का आधार एक त्रिभुज है जिसकी भुजाएँ 16 सेमी, 30 सेमी और 34 सेमी हैं। इसकी ऊँचाई 32 सेमी है। वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल (सेमी² में) और आयतन (सेमी³ में) क्रमशः हैं:

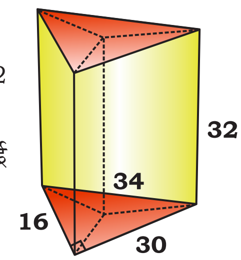
HINTS प्रिज्म का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

= परिमाप × ऊँचाई = (16 + 30 + 34) × 32

= 2560 सेमी²

प्रिज्म का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई

$= \frac{1}{2} \times 30 \times 16 \times 32 = 7680$ सेमी³



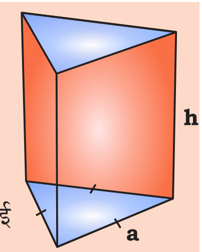
समबाहु त्रिभुजाकार प्रिज्म

(i) वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = 3ah

(ii) संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = $3ah + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

(iii) आयतन = $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2h$

जहाँ a = समबाहु त्रिभुज की भुजा, h = प्रिज्म की ऊँचाई



Ex. 6 सेमी ऊँचाई वाले एक त्रिभुजाकार प्रिज्म का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $162\sqrt{3}$ सेमी² है। यदि प्रिज्म का आधार समबाहु है तो इसका आयतन ज्ञात कीजिए ?

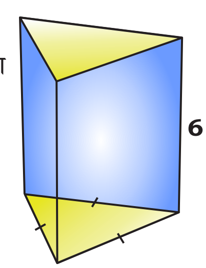
HINTS कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $162\sqrt{3}$

⇒ पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल (LSA) + 2 × आधार का क्षेत्रफल = $162\sqrt{3}$

$\Rightarrow 3a \times 6 + \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 = 162\sqrt{3} \Rightarrow a = 6\sqrt{3}$

आयतन = $\frac{\sqrt{3}}{4}\left(6\sqrt{3}\right)^2 \times h$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 6 \times 6 \times 6 \times 3 = 162\sqrt{3}$ सेमी³



वर्गाकार प्रिज्म

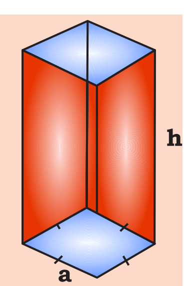
(i) वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = 4ah

(ii) संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = 4ah + 2a²

(iii) आयतन = a²h

जहाँ a = वर्ग की भुजा,

h = प्रिज्म की ऊँचाई



Ex. एक वर्गाकार आधार वाले लम्बवत प्रिज्म की ऊंचाई 15 सेमी है। यदि प्रिज्म का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल 608 सेमी² है, तो इसका आयतन है;

HINTS माना आधार की भुजा = x

कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $4ah + 2a^2$

$\Rightarrow 608 = 4x \times 15 + 2x^2 \Rightarrow 2x^2 + 60x - 608 = 0$

हल करने पर, $x = 8$

आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई = $8^2 \times 15 = 960$ सेमी³

Ex. एक ठोस प्रिज़्म का आधार एक वर्ग है और उसकी ऊँचाई 10 सेमी है। उसका आयतन 160 सेमी³ है। उस प्रिज़्म का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल (सेमी² में) ज्ञात कीजिए।

HINTS प्रिज्म का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई

$\Rightarrow 160 = a^2 \times 10 \Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$

वर्ग (a) की भुजा = 4 सेमी.

वर्ग का परिमाप = 4a = 4 × 4 = 16 सेमी

∴ प्रिज्म का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल

= वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + 2 × आधार का क्षेत्रफल

= 16 × 10 + 2 × 4 × 4 = 160 + 32 = 192 सेमी²

षट्कोणीय प्रिज्म

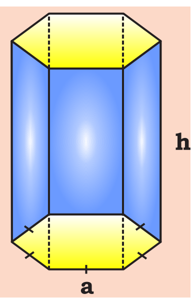
(i) वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = 6ah

(ii) संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = $6ah + 3\sqrt{3}\,a^2$

(iii) आयतन = $\dfrac{6 \times \sqrt{3}}{4} a^2h$

जहाँ a = षट्भुज की भुजा,

h = प्रिज्म की ऊँचाई



Ex. एक प्रिज्म का आधार सम षट्कोणीय है जिसकी भुजा 6 सेमी है। यदि प्रिज्म का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $216\sqrt{3}$ सेमी² है, तो प्रिज्म की ऊँचाई क्या है?

HINTS समबाहु Δ का क्षेत्रफल = $\dfrac{\sqrt{3}}{4} \times 6 \times 6 = 9\sqrt{3}$ सेमी²

षट्भुज का क्षेत्रफल = $6 \times 9\sqrt{3}$ सेमी²

दो षट्भुजों का क्षेत्रफल = $2 \times 6 \times 9\sqrt{3} = 108\sqrt{3}$ सेमी²

कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल (TSA) = $6ah + 3\sqrt{3}\,a^2$

$\Rightarrow 216 = 36 \times h + 108\sqrt{3}$

$\Rightarrow h = \dfrac{108\sqrt{3}}{36} = 3\sqrt{3}$ सेमी

Ex. एक समकोण प्रिज़्म का आधार भुजा 5 सेमी का एक सम षट्भुज है। यदि उसकी ऊँचाई $12\sqrt{3}$ सेमी है, तो उसका आयतन (सेमी³ में) कितना होगा?

HINTS h = $12\sqrt{3}$ सेमी,

a = 5 सेमी

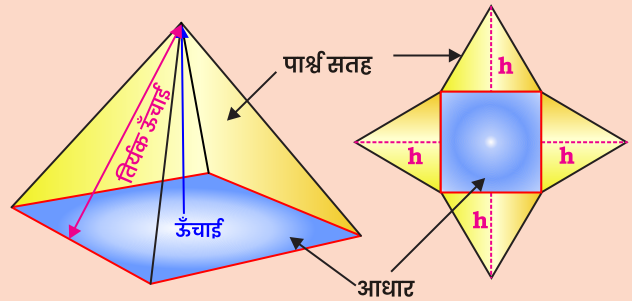
सम षट्भुज का क्षेत्रफल = $\dfrac{3\sqrt{3}a^2}{2} = \dfrac{3\sqrt{3} \times 5^2}{2} = \dfrac{75\sqrt{3}}{2}$ सेमी²

∴ आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई

= $\dfrac{75\sqrt{3}}{2} \times 12\sqrt{3} = 1350$ सेमी³

पिरामिड

पिरामिड एक त्रि-आयामी आकृति है। पिरामिड में एक बहुभुज आधार और सपाट त्रिकोणीय फलक होती हैं, जो एक उभयनिष्ठ बिंदु पर जुड़ते हैं जिसे शीर्ष कहा जाता है। आधारों को शीर्ष से जोड़कर पिरामिड का निर्माण किया जाता है। आधार का प्रत्येक किनारा शीर्ष से जुड़ा हुआ है, और त्रिकोणीय फलक बनाता है, जिसे पार्श्व फलक कहा जाता है। यदि किसी पिरामिड का आधार n - भुजा का है, तो इसमें n + 1 फलक, n + 1 शीर्ष और 2n किनारे होते हैं।



(i) पिरामिड का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = सभी पार्श्व त्रिभुजाकार फलकों के क्षेत्रफलों का योग

= $\dfrac{1}{2}$ × आधार का परिमाप × तिर्यक ऊँचाई

(ii) पिरामिड का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + आधार का क्षेत्रफल

= $\dfrac{1}{2}$ × आधार का परिमाप × तिर्यक ऊँचाई + आधार का क्षेत्रफल

(iii) पिरामिड का आयतन = $\dfrac{1}{3}$ × आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई

Ex. यदि E, F और V क्रमशः एक वर्ग पिरामिड के किनारों, फलकों और शीर्षों की संख्या है, तो (2E - F + 2V) का आयतन है:

HINTS पिरामिड में,

फलकों की संख्या = n + 1

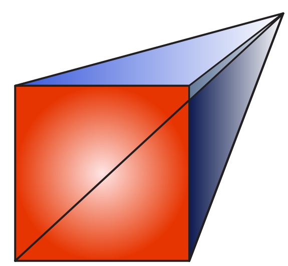
शीर्षों की संख्या = n + 1

किनारों की संख्या = 2n

F(फलक) = 4 + 1 = 5

V(शीर्ष) = 4 + 1 = 5

E (किनारे) = 2 × 4 = 8



∴ (2E – F + 2V) = (2 × 8 – 5 + 2 × 5)

= 16 – 5 + 10 = 21

Ex. एक प्रिज़्म और एक पिरामिड का आधार तथा ऊँचाई समान है। प्रिज़्म और पिरामिड के आयतनों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

HINTS पिरामिड का आयतन = $\dfrac{1}{3}$ × आधार का क्षेत्रफल × h

प्रिज्म का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × h

∴ आवश्यक अनुपात

$= \dfrac{Ar \times h}{\frac{1}{3} \times Ar \times h} = \dfrac{3}{1}$

= 3 : 1

समबाहु त्रिभुजाकार पिरामिड

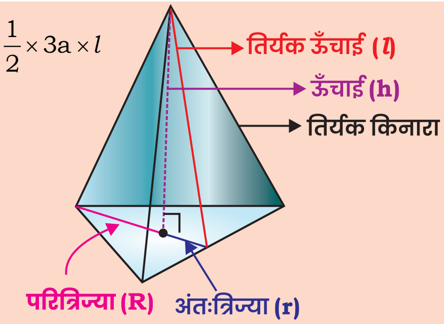
(i) वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}\times 3a\times l$

(ii) संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2}\times 3al + \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

(iii) आयतन

$= \frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\times h$



(iv) ऊँचाई (l)

$= \sqrt{h^2+r^2} = \sqrt{h^2+\left(\frac{a}{2\sqrt{3}}\right)^2}$

(v) तिर्यक किनारा $= \sqrt{h^2+R^2} = \sqrt{h^2+\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{l^2+\left(\frac{\text{भुजा}}{2}\right)^2}$

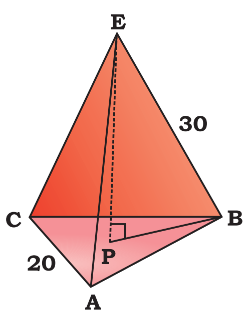
Ex. समकोण पिरामिड का आधार एक समबाहु त्रिभुज है, जिसकी प्रत्येक भुजा 20 सेमी है। प्रत्येक तिर्यक किनारा 30 सेमी है। पिरामिड की ऊर्ध्वाधर ऊंचाई (सेमी में) है:

HINTS माना, h ऊर्ध्वाधर ऊंचाई है।

समबाहु Δ की परित्रिज्या $= \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{20}{\sqrt{3}}$

$h = \sqrt{AE^2 - AP^2} = \sqrt{30^2 - \left(\frac{20}{\sqrt{3}}\right)^2}$

$= \sqrt{900 - \frac{400}{3}} = \sqrt{\frac{2300}{3}} = 10\sqrt{\frac{23}{3}}$ सेमी



वर्गाकार पिरामिड

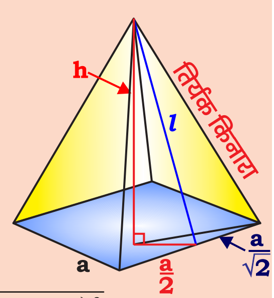
(i) वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}\times 4a\times l$

(ii) संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}\times 4al + a^2$

(iii) आयतन = $\frac{1}{3}\times a^2\times h$

(iv) तिर्यक ऊँचाई = $\sqrt{h^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}$

(v) तिर्यक किनारा = $\sqrt{h^2+\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{l^2+\left(\frac{\text{side}}{2}\right)^2}$



Ex. एक समकोण पिरामिड का आधार $8\sqrt{2}$ सेमी भुजा वाला एक वर्ग है और इसके प्रत्येक तिर्यक किनारे की लंबाई 10 सेमी है। पिरामिड का आयतन (सेमी³ में) क्या है?

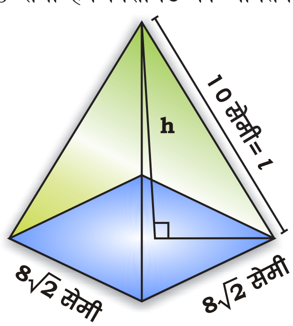
HINTS $h = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$ सेमी

$\therefore$ पिरामिड का आयतन

$= \frac{1}{3}\times$ आधार का क्षेत्रफल $\times$ ऊँचाई

$= \frac{1}{3}\times 8\sqrt{2}\times 8\sqrt{2}\times 6$

= 256 सेमी³



Ex. एक समकोण वर्गाकार पिरामिड जिसका पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल 624 सेमी² है। यदि वर्ग के विकर्ण की लंबाई $24\sqrt{2}$ सेमी है, तो पिरामिड का आयतन है:

HINTS $d = 24\sqrt{2}$

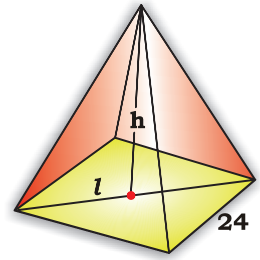
$\therefore$ वर्ग की भुजा (a) = 24

पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\times\frac{1}{2}\times 24\times l$

$\Rightarrow 624 = 48\times l \Rightarrow l = \frac{624}{48} = 13$

अब, h = 5 सेमी

[पाइथागोरस त्रिक 5, 12, 13 से]



$\therefore$ पिरामिड का आयतन $= \frac{1}{3}\times$ आधार का क्षेत्रफल $\times$ ऊँचाई

$= \frac{1}{3}\times a^2\times h = \frac{1}{3}\times 24\times 24\times 5 = 24\times 40 = 960$ सेमी³

Ex. एक समकोण पिरामिड का आधार 8 सेमी भुजा वाला वर्ग है। यदि उसका कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल 208 सेमी² है, तो पिरामिड की तिर्यक ऊँचाई (सेमी में) कितनी होगी?

HINTS दिया है, a = 8 सेमी

कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = 208 सेमी²

$\Rightarrow$ पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल + आधार का क्षेत्रफल = 208 वर्ग सेमी

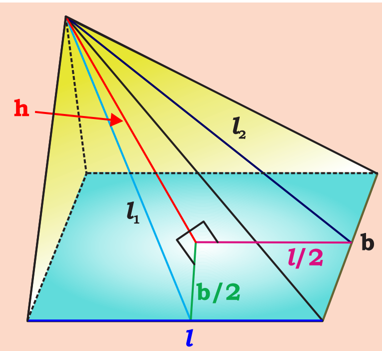
$\Rightarrow \left[\frac{1}{2}\times\text{आधार का परिमाप}\times l\right] + \text{आधार का क्षेत्रफल} = 208$

$\Rightarrow \left[\frac{1}{2}\times 4\times 8\times l\right] + (8\times 8) = 208$

$\Rightarrow 16\times l + 64 = 208$ सेमी²

$\Rightarrow l = 9$

आयताकार पिरामिड



दो तिर्यक ऊँचाई होती है।

- पहली तिर्यक ऊँचाई $(l_1) = \sqrt{h^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2}$
- दूसरी तिर्यक ऊँचाई $(l_2) = \sqrt{h^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2}$

(i) वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\times\frac{1}{2}l\times l_1 + 2\times\frac{1}{2}\times b\times l_2$

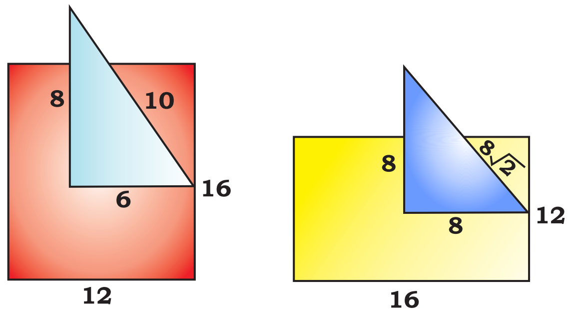
(ii) संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = C.S.A + lb

(iii) आयतन = $\frac{1}{3}\times lb\times h$

(iv) (तिर्यक किनारा)² $= h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2$

Ex. एक आयताकार आधार वाले पिरामिड का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी लंबाई 16 सेमी और चौड़ाई 12 सेमी है। यदि पिरामिड की ऊंचाई 8 सेमी है?

HINTS



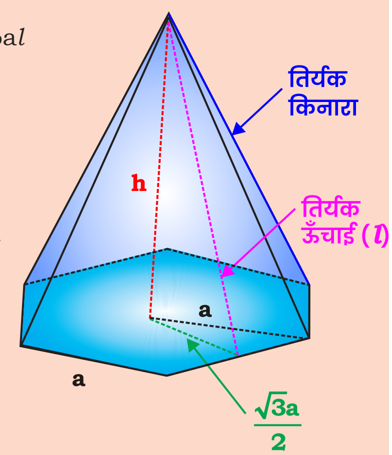
वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\times\frac{1}{2}l\times l_1 + 2\times\frac{1}{2}\times b\times l_2$

$= \frac{1}{2}\times 16\times 10\times 2 + \frac{1}{2}\times 12\times 8\sqrt{2}\times 2 = 160 + 96\sqrt{2}$

कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल (T.S.A) $= 160 + 96\sqrt{2} + 16\times 12$

$= 352 + 96\sqrt{2}$

षट्कोणीय पिरामिड



(i) वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\times 6al$

(ii) संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2}6al + 6\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

(iii) आयतन $= \frac{1}{3}\times\frac{6\sqrt{3}}{4}a^2\times h$

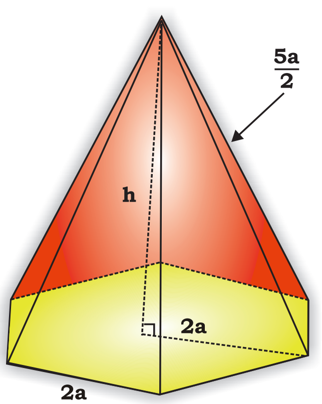
(iv) तिर्यक ऊँचाई

$(l) = \sqrt{h^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2}$

(v) तिर्यक किनारा $= \sqrt{h^2 + a^2}$

Ex. एक पिरामिड एक आधार पर बना है जो 2a सेमी भुजा वाला एक नियमित षट्भुज है। यदि इस पिरामिड का प्रत्येक तिर्यक किनारा $\frac{5a}{2}$ सेमी लम्बा है, तो इस पिरामिड का आयतन है:

HINTS नियमित षट्कोणीय पिरामिड की ऊंचाई (h)



$= \sqrt{(\text{तिर्यक किनारा})^2 - (\text{भुजा})^2}$

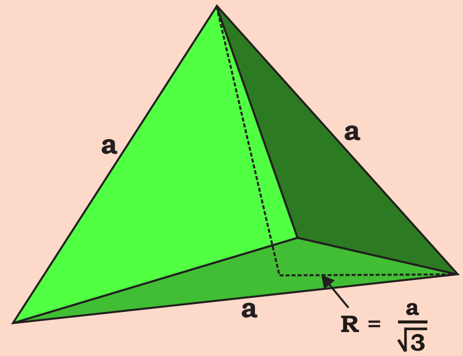
$= \sqrt{\left(\frac{5a}{2}\right)^2 - (2a)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}a^2}$

$= \frac{3}{2}a$

आयतन $= \frac{1}{3}\times$ आधार का क्षेत्रफल $\times h$

$= \frac{1}{3}\times 6\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times(2a)^2\times\frac{3}{2}a = 3\sqrt{3}a^3$ सेमी^{3}

समचतुष्फलक



त्रिकोणीय आधार पर पिरामिड एक चतुष्फलक है। जब कोई ठोस चार त्रिभुजाकार फलकों से घिरा होता है तो वह चतुष्फलक होता है। एक समकोण चतुष्ठफलक तब कहलाता है जब एक चतुष्फलक का आधार एक समबाहु त्रिभुज होता है और अन्य त्रिभुजाकार फलक समद्विबाहु त्रिभुज होते हैं। जब हम किसी ऐसे चतुष्फलक को देखते है जिसके चारों फलक समबाहु हों तो वह सम चतुष्फलक होता है।

(a) चार समबाहु फलक हैं।

(b) सभी किनारे लंबाई में बराबर है।

(c) तिर्यक ऊँचाई आधार की भुजा के बराबर है।

(i) वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = तीन समबाहु त्रिभुजों का क्षेत्रफल $= 3\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

(ii) कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = चार समबाहु त्रिभुजों का क्षेत्रफल

$= 4\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \sqrt{3}a^2$

(iii) ऊँचाई $(h) = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}a$

(iv) आयतन (V) $= \frac{1}{3}\times$ आधार का क्षेत्रफल $\times$ ऊँचाई

$= \frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\times\sqrt{\frac{2}{3}}a = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$

Ex. एक नियमित चतुष्फलक की भुजा की लंबाई 12 सेमी है। आयतन ज्ञात कीजिए।

HINTS नियमित चतुष्फलक का आयतन $= \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$

$= \frac{\sqrt{2}}{12}\times 12^3 = 144\sqrt{2}$ सेमी^{3}

Ex. एक समचतुष्फलक का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी भुजा $6\sqrt{3}$ सेमी है।

HINTS समचतुष्फलक का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 3\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

$= 3\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 108 = 81\sqrt{3}$ सेमी^{2}

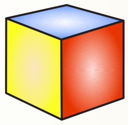
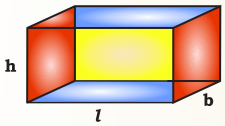
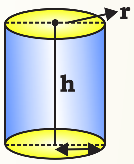
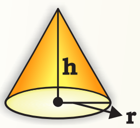
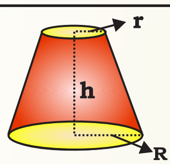
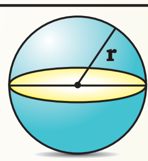
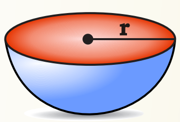
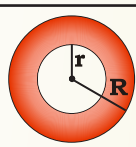
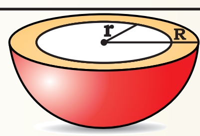
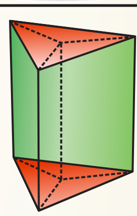
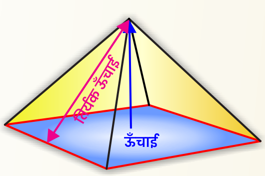
Ex. एक समचतुष्फलक का आयतन $144\sqrt{2}$ सेमी^{3} है। इसके किनारे की लंबाई ज्ञात कीजिए।

HINTS नियमित चतुष्फलक का आयतन $= \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{12}\times a^3 = 144\sqrt{2}$

$\Rightarrow a = 12$ सेमी

त्रिविमीय क्षेत्रमिति

ठोस आकृति		आयतन	पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल	कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल
घन		भुजा^{3}	$4 \times$ भुजा^{2}	$6 \times$ भुजा^{2}
घनाभ		$l \times b \times h$	$2(lh + bh)$	$2(lb + lh + bh)$
बेलन		$\pi r^2 h$	$2\pi rh$	$2\pi r(r + h)$
शंकु		$\left(\frac{1}{3}\right)\pi r^2 h$	$\pi r l$ (जहाँ $l = \sqrt{r^2 + h^2}$)	$\pi r(r + l)$
शंकु का छिन्नक		$\frac{1}{3}\pi[R^2 + r^2 + Rr]h$	$\pi(R + r)l$	$\pi(R + r)l + \pi(R^2 + r^2)$
गोला		$\left(\frac{4}{3}\right)\pi r^3$	$4\pi r^2$	$4\pi r^2$
अर्द्धगोला		$\left(\frac{2}{3}\right)\pi r^3$	$2\pi r^2$	$3\pi r^2$
गोलीय शेल		$\frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)$	$4\pi(R^2 - r^2)$	$4\pi(R^2 - r^2)$
अर्द्धगोलीय शेल		$\frac{2}{3}\pi(R^3 - r^3)$	$2\pi(R^2 + r^2)$	$3\pi R^2 + \pi r^2$
प्रिज्म		आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई	आधार का परिमाप × ऊँचाई	पार्श्व पृष्ठीय क्षे. + 2 × आधार क्षेत्रफल
पिरामिड		$\frac{1}{3}$ × आधार क्षेत्रफल × ऊँचाई	$\frac{1}{2}$ × आधार का परिमाप × तिर्यक ऊँचाई	पार्श्व पृष्ठीय क्षे. + आधार का क्षेत्रफल

अध्याय 04

संख्या पद्धति

संख्या पद्धति

- संख्याओं का वर्गीकरण
- इकाई अंक
- गुणनखंड
- विभाज्यता
- शेषफल प्रमेय
- शून्यों की संख्या
- संख्या की गिनती
- बाइनरी संख्या

संख्याओं का वर्गीकरण

वास्तविक संख्या → **सम्मिश्र संख्या** ← **काल्पनिक संख्या**

वास्तविक संख्या
वे संख्याएँ जो संख्या रेखा पर दर्शायी जा सकती है
Ex. $+3, -7, 5, \frac{17}{14}, \frac{5}{8}, \sqrt{7}, \sqrt{5}$

काल्पनिक संख्या
वे संख्याएँ जो संख्या रेखा पर नहीं दर्शायी जा सकती है
Ex. $\sqrt{-7}, \sqrt{-3}, \sqrt{-1} = i$ (आयोटा)

परिमेय
संख्या को $\frac{P}{Q}$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है $(Q \neq 0)$ $P, Q \rightarrow$ पूर्णांक
Ex. $\frac{5}{3}, \frac{-8}{1}, 555, \frac{22}{7}, 4, -3$

अपरिमेय
संख्या को $\frac{P}{Q}$ के रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता
Ex. $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, ……., 0.1432507……., $\pi = 3.141592$ ……

पूर्णांक

ऋणात्मक पूर्णांक
Ex. –1, –2, –3, –4, ……

पूर्ण संख्या
Ex. 0, 1, 2, 3, 4

शून्य

प्राकृतिक संख्या
Ex. 1, 2, 3, 4 ….

भिन्न
Ex. $\frac{7}{9}, \frac{2}{5}, \frac{5}{3}$

दशमलव संख्याएँ

सांत दशमलव
Ex. $0.5 = \frac{1}{2}, 0.73 = \frac{73}{100}$

असांत आवर्ती दशमलव
Ex. $0.3333..... = \frac{1}{3}, 0.565656..... = \frac{56}{99}$

असांत अनावर्ती दशमलव
Ex. $\sqrt{2} = 1.414$ …..
↓
अपरिमेय संख्या

विषम संख्या
संख्या जो 2 से विभाज्य नहीं है, (2k ± 1) के रूप में
Ex. 1, 3, 5, 7

सम संख्या
संख्या जो 2 से विभाज्य है, (2k के रूप में)
Ex. 0, 2, 4, 6

भाज्य संख्या
दो से अधिक गुणनखंड
Ex. 4, 6, 8, 9
4 – सबसे छोटी भाज्य संख्या
9 – सबसे छोटी विषम भाज्य संख्या

अभाज्य संख्या
केवल दो गुणनखंड 1 और स्वयं
Ex. 2, 3, 5, 7, 11 …… इत्यादि।
- प्रत्येक अभाज्य संख्या को (6k ± 1) रूप में लिखा जा सकता है। लेकिन प्रत्येक (6k ± 1) रूप आवश्यक रूप से अभाज्य संख्या नहीं हो सकती।

Ex. $13 \rightarrow 6 \times 2 + 1$ (अभाज्य)
$25 \rightarrow 6 \times 4 + 1$ (अभाज्य संख्या नहीं है)

सह-अभाज्य संख्याएँ
यदि दो संख्याओं का म.स.प. 1 है।
Ex. (2, 3), (11, 13), (16, 9), (25, 19) इत्यादि।

युग्म -अभाज्य संख्या
जब दो क्रमागत अभाज्य संख्याएँ 2 के अंतराल पर हों, तो उन्हें युग्म अभाज्य संख्याएँ कहते हैं।
Ex. (3, 5), (5, 7), (11, 13)

पूर्ण संख्या
यदि किसी संख्या के सभी गुणनखंडों का योग (उस संख्या को छोड़कर) दी गई संख्या के बराबर हो, तो उस संख्या को पूर्ण संख्या कहा जाता है।
Ex. 6, 28, 496, 8128 इत्यादि।
28 के गुणनखंड → 1, 2, 4, 7, 14
$\therefore 1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$
इस प्रकार, 28 एक पूर्ण संख्या है

नोट : 6 सबसे छोटी पूर्ण संख्या है।

- 2 – एकमात्र सम अभाज्य संख्या और सबसे छोटी अभाज्य संख्या है
- 3, 5, 7 – क्रमागत विषम अभाज्य संख्याओं का एकमात्र युग्म
- 101 – सबसे छोटी 3 अंकों की अभाज्य संख्या है।
- 997 – सबसे बड़ी 3 अंकों की अभाज्य संख्या है।
- 1 न तो अभाज्य संख्या है और न ही भाज्य

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83,89, 97

$0 \xrightarrow[15]{} 50 \xrightarrow[10]{} 100$

अभाज्य संख्या   अभाज्य संख्या

$(1 - 100) \rightarrow 25$ अभाज्य संख्या

$1 \longrightarrow 200 = 46$

$1 \longrightarrow 500 = 95$

$1 \longrightarrow 1000 = 168$

☞ कैसे जांचें कि दी गई संख्या अभाज्य है या नहीं?

यह जाँचने के लिए कि कोई संख्या अभाज्य संख्या है या नहीं, सबसे पहले संख्या का वर्गमूल निकालें। वर्गमूल को उसके ठीक नीचे वाले पूर्णांक तक पूर्णांकित करें। फिर संख्या की उसके नीचे की सभी अभाज्य संख्याओं से विभाज्यता की जाँच करें। यदि संख्या किसी भी अभाज्य संख्या से विभाज्य नहीं है, तो वह संख्या अभाज्य संख्या है।

Ex. 137 अभाज्य संख्या है या नहीं?

HINTS $\sqrt{137} \approx 11 \Rightarrow$ 11 से छोटी या बराबर अभाज्य संख्याएँ 2, 3, 5, 7 और 11 हैं। 137 इनमें से किसी से भी विभाज्य नहीं है। इसलिए यह एक अभाज्य संख्या है।

Ex. 80 से 100 तक अभाज्य संख्याओं का औसत क्या है?

HINTS $\sqrt{100} = 10 \Rightarrow$ 10 से छोटी अभाज्य संख्याएँ 2, 3, 5, 7 हैं।

अतः सम संख्याएँ और 5 पर समाप्त होने वाली संख्याएँ अभाज्य संख्याएँ नहीं होंगी, इसलिए केवल 3 और 7 की विभाज्यता की जाँच करें।

80 से 100 के बीच अभाज्य संख्याएँ 83, 89 और 97 हैं।

आवश्यक औसत = $\frac{83+89+97}{3} = \frac{269}{3} = 89.67$

Ex. x, y और z भिन्न अभाज्य संख्याएँ हैं जहाँ $x < y < z$ है। यदि $x + y + z = 70$ है, तो z का मान क्या है?

HINTS योग 70 है, इसका मतलब है कि कम से कम एक संख्या सम है, क्योंकि विषम + विषम + विषम = विषम

जैसा कि हम जानते हैं, केवल एक ही सम अभाज्य संख्या होती है, और वह 2 है।

2 सबसे छोटी अभाज्य संख्या भी है। अतः, $x = 2$

अब, $70 - 2 = 68 = y + z$

अब, विकल्पों का उपयोग करें

विकल्प (a): $z = 29 \Rightarrow y = 68 - 29 = 39$ (y भाज्य है)

विकल्प (b): $z = 43 \Rightarrow y = 68 - 43 = 25$ (y भाज्य है)

विकल्प (c): $z = 31 \Rightarrow y = 68 - 31 = 37$ $(z < y)$

विकल्प (d): $z = 37$

$\Rightarrow y = 68 - 37 = 31$ $(y < z$, दी गई शर्त को संतुष्ट करता है)

अतः, $z = 37$

Ex. x, y और z अभाज्य संख्याएँ हैं जिससे $x + y + z = 38$ है। x का अधिकतम मान क्या है?

HINTS यदि सभी संख्याएँ सम हैं, तो, $\Rightarrow x + y + z = 6$

तो, उनमें से दो विषम हैं और उनमें से एक 2 है

मान लीजिए, $z = 2$ है तो $\Rightarrow x + y = 36$

36 के सबसे निकट की अभाज्य संख्या 31 है। यदि $x = 31$ है तो हमें $y = 5$ प्राप्त होता है, जो एक विषम अभाज्य संख्या है।

$\therefore$ 31, x का अधिकतम मान है।

इकाई अंक

किसी दिए गए व्यंजक का इकाई अंक ज्ञात करने के लिए हमें संपूर्ण व्यंजक को हल करना आवश्यक नहीं है, बल्कि सभी संख्याओं के इकाई अंक पर कार्य करके परिणामी व्यंजक का इकाई अंक ज्ञात किया जाता है।

मान लीजिए $N = a \times b$, $N = a + b$, $N = a - b$, N के इकाई अंक की गणना करने के लिए, हम केवल संख्या a और b के इकाई अंक पर विचार करते हैं।

चक्रीयता

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

चक्रीयता 1	चक्रीयता 2		चक्रीयता 4			
0, 1, 5, 6	4, 9		2	3	7	8
	विषम	सम				
$(0)^n = 0$			$2^1 = 2$	$3^1 = 3$	$7^1 = 7$	$8^1 = 8$
$(1)^n = 1$			$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$7^2 = 49$	$8^2 = 64$
$(5)^n = 5$	(4) = 4	(4) = 6	$2^3 = 8$	$3^3 = 27$	$7^3 = 343$	$8^3 = 512$
$(6)^n = 6$	(9) = 9	(9) = 1	$2^4 = 16$	$3^4 = 81$	$7^4 = 2401$	$8^4 = 4096$

Ex. 232 × 235 का इकाई अंक ज्ञात कीजिए।

HINTS 232 × 235 = इकाई अंक (0)

Ex. 628 + 493 + 589 का इकाई अंक ज्ञात कीजिए।

HINTS 628 + 493 + 589 = 8 + 3 + 9 = इकाई अंक (0)

Ex. 2383 – 1689 का इकाई अंक ज्ञात कीजिए।

HINTS 2383 – 1689 = – 6 + 10 = 4

$N = x^y$ पर विचार करें

N के इकाई अंक की गणना करने के लिए, हम केवल संख्या x के इकाई अंक पर विचार करते हैं।

किसी व्यंजक के इकाई अंक की गणना व्यंजक की घात को 4 से भाग देने पर शेषफल प्राप्त करके की जा सकती है।

Ex. $(382)^{575}$ का इकाई अंक क्या होगा?

HINTS चरण-1: घात के अंतिम 2 अंकों को 4 से भाग दें और शेष ज्ञात करें।

शेष = 75/4 = 3

चरण-2: शेष को इकाई अंक की घात के रूप में रखें और उत्तर ज्ञात करें। $[2^3 = 8]$

चरण 1 में, यदि शेषफल 0 है तो घात 4 के बराबर रखें।

Ex. निम्नलिखित प्रत्येक स्थिति में इकाई का अंक ज्ञात कीजिए।

(i) $(187)^{282} \times (529)^{321} \times (343)^{236}$

(ii) $(789)^{315} + (232)^{644} + (528)^{253}$

(iii) $(982)^{481} - (219)^{241}$

HINTS (i) घात के अंतिम 2 अंकों को 4 से भाग दें तथा शेष को इकाई स्थान अंक की घात के रूप में लिखें।

$7^2 \times 9^1 \times 3^4 \Rightarrow 9 \times 9 \times 1 = 1$

(ii) $9^3 + 2^4 + 8^1 \Rightarrow 9 + 6 + 8 = 3$

(iii) $2^1 - 9^1 \Rightarrow 12 - 9 = 3$

[यदि पहली संख्या कम है तो उसमें 10 जोड़ें]

Ex. व्यंजक का इकाई अंक ज्ञात कीजिए।

1! + 2! + 3! + 4! + …….. + 100!

HINTS 1 + 1 × 2 + 1 × 2 × 3 + 1 × 2 × 3 × 4 + 1 × 2 × 3 × 4 × 5 + … + 100! = 1 + 2 + 6 + 4 + 0 + 0 + 0 ….. + 0 = 13

अतः व्यंजक का इकाई अंक 3 है।

गुणनखंड:- कोई भी संख्या N को $a^p \times b^q \times c^r \times d^s \times$ ..... के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जहाँ, a, b, c, और d अभाज्य संख्याएँ हैं।

Ex. $15 = 3 \times 5$, $45 = 3^2 \times 5$, $100 = 2^2 \times 5^2$ और इसी तरह आगे भी

गुणनखंड

गुणनखंडों की कुल संख्या

यदि $N = a^p \times b^q \times c^r \times d^s \times ....$, तो

गुणनखंडों की कुल संख्या

$= (p + 1) \times (q + 1) \times (r + 1) \times (s + 1)$ ....

Ex. 360 के गुणनखंडों की कुल संख्या ज्ञात कीजिए।

HINTS 360 के अभाज्य गुणनखंडन

$= 2^3 \times 3^2 \times 5^1$

गुणनखंडों की कुल संख्या

$= (3 + 1) \times (2 + 1) \times (1 + 1) = 24$

Ex. 480 के गुणनखंडों की कुल संख्या ज्ञात कीजिए।

HINTS 480 के अभाज्य गुणनखंडन

$= 2^5 \times 3^1 \times 5^1$

गुणनखंडों की कुल संख्या

$= (5 + 1) \times (1 + 1) \times (1 + 1) = 24$

सम गुणनखंडों की कुल संख्या

यदि $N = a^p \times b^q \times c^r \times d^s \times ....$, तो

सम गुणनखंडों की कुल संख्या

$= p \times (q + 1) \times (r + 1) \times (s + 1)$.......

Ex. 360 के सभी सम गुणनखंडों की संख्या ज्ञात कीजिए।

HINTS 360 के अभाज्य गुणनखंडन

$= 2^3 \times 3^2 \times 5^1$

सम गुणनखंडों की कुल संख्या

$= 3 \times (2 + 1) \times (1 + 1) = 3 \times 3 \times 2 = 18$

वैकल्पिक विधि

सम गुणनखंड = (कुल – विषम) गुणनखंड

सम गुणनखंडों की कुल संख्या

$= 4 \times 3 \times 2 - 3 \times 2 = 18$

विषम गुणनखंडों की कुल संख्या

यदि $N = a^p \times b^q \times c^r \times d^s \times ....$, तो

विषम गुणनखंडों की कुल संख्या

$= (q + 1) \times (r + 1) \times (s + 1)$ ....

नोट जब हम विषम गुणनखंडों की संख्या ज्ञात करते हैं, तो हम a के घातांक को अनदेखा कर देते हैं, जहाँ (a = 2)

Ex. 360 के विषम गुणनखंडों की कुल संख्या ज्ञात कीजिए।

HINTS 360 के अभाज्य गुणनखंडन

$= 2^3 \times 3^2 \times 5^1$

विषम गुणनखंडों की कुल संख्या

$= (2 + 1) \times (1 + 1) = 3 \times 2 = 6$

सभी गुणनखंडों का योग

यदि $N = a^p \times b^q \times c^r \times d^s \times ....$, तो

सभी गुणनखंडों का योग

$= (a^0 + a^1 + ... + a^p)(b^0 + b^1 + ... + b^q)(c^0 + c^1 + ... + c^r)$ .....

'या'

सभी गुणनखंडों का योग

$$= \frac{a^{p+1} - 1}{a - 1} \times \frac{b^{q+1} - 1}{b - 1} \times \frac{c^{r+1} - 1}{c - 1}$$

Ex. 360 के सभी गुणनखंडों का योग ज्ञात कीजिए।

HINTS 360 के अभाज्य गुणनखंडन

$= 2^3 \times 3^2 \times 5^1$

सभी गुणनखंडों का योग

$= (2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3)(3^0 + 3^1 + 3^2)(5^0 + 5^1)$

$= (1 + 2 + 4 + 8)(1 + 3 + 9)(1 + 5)$

$= 15 \times 13 \times 6 = 1170$

वैकल्पिक विधि

सभी गुणनखंडों का योग

$$= \frac{a^{p+1} - 1}{a - 1} \times \frac{b^{q+1} - 1}{b - 1} \times \frac{c^{r+1} - 1}{c - 1}$$

$$= \frac{2^{3+1} - 1}{2 - 1} \times \frac{3^{2+1} - 1}{3 - 1} \times \frac{5^{1+1} - 1}{5 - 1}$$

$= 15 \times 13 \times 6 = 1170$

सम गुणनखंडों का योग

यदि $N = a^p \times b^q \times c^r \times d^s \times ....$, तो

सभी सम गुणनखंडों का योग

$= (a^1 + a^2 + ... + a^p)(b^0 + b^1 + ..b^q)(c^0 + c^1 + ... + c^r)$

$$= \left(\frac{a^{p+1} - 1}{a - 1} - 1\right) \times \frac{b^{q+1} - 1}{b - 1} \times \frac{c^{r+1} - 1}{c - 1}$$

'या'

सभी सम गुणनखंडों का योग

$$= \frac{a^{p+1} - a}{a - 1} \times \frac{b^{q+1} - 1}{b - 1} \times \frac{c^{r+1} - 1}{c - 1}$$

Ex. 360 के सभी सम गुणनखंडों का योग ज्ञात कीजिए।

HINTS 360 के अभाज्य गुणनखंडन

$= 2^3 \times 3^2 \times 5^1$

सभी सम गुणनखंडों का योग

$= (2^1 + 2^2 + 2^3) \times (3^0 + 3^1 + 3^2) \times (5^0 + 5^1)$

$= 14 \times 13 \times 6 = 1092$

वैकल्पिक विधि

सभी सम गुणनखंडों का योग

$$= \left(\frac{2^{3+1} - 2}{2 - 1}\right)\left(\frac{3^{2+1} - 1}{3 - 1}\right)\left(\frac{5^{1+1} - 1}{5 - 1}\right)$$

$= 14 \times 13 \times 6 = 1092$

स्वयं करें

Ex. 720 के सभी सम गुणनखंडों का योग ज्ञात कीजिए।

[Ans. 2340]

विषम गुणनखंडों का योग

यदि $N = a^p \times b^q \times c^r \times d^s \times ....$, तो

सभी विषम गुणनखंडों का योग

$= a^0 (b^0 + b^1 + ... + b^q)(c^0 + c^1 + ... + c^r)$, जहां a = 2

'या'

सभी विषम गुणनखंडों का योग

$$= \frac{b^{q+1}}{b - 1} \times \frac{c^{r+1} - 1}{c - 1}$$

Ex. 360 के सभी विषम गुणनखंडों का योग ज्ञात कीजिए।

HINTS 360 के अभाज्य गुणनखंडन

$= 2^3 \times 3^2 \times 5^1$

सभी विषम गुणनखंडों का योग

$= 2^0 (3^0 + 3^1 + 3^2)(5^0 + 5^1)$

$= 1 \times 13 \times 6 = 78$

वैकल्पिक विधि

सभी विषम गुणनखंडों का योग

$$= \frac{3^{2+1} - 1}{3 - 1} \times \frac{5^{1+1} - 1}{5 - 1} = \frac{26}{2} \times \frac{24}{4} = 78$$

स्वयं करें

Ex. 720 के सभी विषम गुणनखंडों का योग ज्ञात कीजिए।

[Ans. 78]

एक प्राकृतिक संख्या का अभाज्य और संयुक्त गुणनखंड

हम जानते हैं,
किसी भी प्राकृतिक संख्या के गुणनखंडों की कुल संख्या
= 1 + अभाज्य गुणनखंड + संयुक्त गुणनखंड।

नोटः 1 सभी प्राकृतिक संख्याओं का एक गुणनखंड है।
जब हम अभाज्य गुणनखंडन करते हैं, तो इसमें उपस्थित अभाज्य गुणनखंडों की संख्या की गणना करके अभाज्य गुणनखंडों की संख्या दी जा सकती है।
इसलिए, यौगिक/संयुक्त गुणनखंडों की कुल संख्या
= गुणनखंडों की कुल संख्या – अभाज्य गुणनखंड –1

महत्वपूर्ण नोटः माना $N = 56 = 2^3 \times 7^1$
भिन्न अभाज्य गुणनखंडों की संख्या = 2 (अर्थात् 2 और 7)
अभाज्य गुणनखंडों की कुल संख्या (पुनरावृत्ति अनुमति)= 3 + 1 = 4 (घातों का योग)

Ex. $N = 56 = 2^3 \times 7^1$, संयुक्त गुणनखंडों की कुल संख्या ज्ञात कीजिए।

HINTS यहाँ, अभाज्य गुणनखंडों की कुल संख्या = 2 (अर्थात् 2 और 7)
संयुक्त गुणनखंडों की कुल संख्या
$= [(3 + 1)(1 + 1)] - 2 - 1 = 8 - 3 = 5$

Ex. यदि N = 720 है तो N के अभाज्य गुणनखंडों की कुल संख्या ज्ञात कीजिए।

HINTS दिया है, $N = 720 = 2^4 \times 3^2 \times 5^1$
स्पष्टतः, तीन अभाज्य गुणनखंडों हैं अर्थात् 2, 3 और 5।

Ex. N = 720, N के समग्र गुणनखंडों की कुल संख्या ज्ञात कीजिए।

HINTS दिया है, $N = 720 = 2^4 \times 3^2 \times 5^1$
संयुक्त गुणनखंडों की कुल संख्या = गुणनखंडों की कुल संख्या – अभाज्य गुणनखंडों की संख्या – 1 = 30 – 3 – 1 = 26

ऐसे गुणनखंड ज्ञात करना जो एक दूसरे के सह-अभाज्य हों

यदि $N = a^p \times b^q$ [a, b, N के अभाज्य गुणनखंड हैं] तो सह-अभाज्य गुणनखंडों की संख्या = [(p + 1)(q + 1) + pq] होगी

- यदि $N = a^p \times b^q \times c^r$
तो सह-अभाज्य गुणनखंडों की संख्या होगी
= [(p + 1)(q + 1)(r + 1) + pq + qr + rp + 3pqr]
या एक बार में दो लें और फिर गणना करें।

Ex. N = 56 के दो गुणनखंडों के कितने समुच्चय एक दूसरे के सह-अभाज्य होंगे?

HINTS $N = 56 = 2^3 \times 7^1$
∴ सह-अभाज्य गुणनखंडों की संख्या
$= [(3 + 1)(1 + 1) + 3 \times 1] = 11$

Ex. दिया गया है कि $N = 720 = 2^4 \times 3^2 \times 5^1$, उन गुणनखंडों के समुच्चयों की संख्या ज्ञात कीजिए जो एक दूसरे के सह-अभाज्य हैं।

HINTS
दिया है,
$N = 720 = 2^4 \times 3^2 \times 5^1$
एक दूसरे के सह-अभाज्य गुणनखंडों के समुच्चयों की संख्या
= (p + 1) (q + 1) (r + 1) + pq + qr + rp + 3pqr
= (4 + 1) (2 + 1) (1 + 1) + 8 + 2 + 4 + 3 × 8
= 5 × 3 × 2 + 38 = 30 + 38 = 68

पूर्ण वर्ग के गुणनखंडों की संख्या

Ex. दिया गया है, $N = 720 = 2^4 \times 3^2 \times 5^1$, उन गुणनखंड की कुल संख्या ज्ञात कीजिए जो पूर्ण वर्ग हैं।

HINTS
$N = 720 = 2^4 \times 3^2 \times 5^1$

2 की घात	3 की घात	5 की घात
2^0	3^0	5^0
2^2	3^2	
2^4		

∴ N = 720 के कुल गुणनखंडों की संख्या जो पूर्ण वर्ग हैं = 3 × 2 × 1 = 6

वैकल्पिक विधि

$$a^{2n} = \frac{\text{घात}}{2} = \text{पूर्णांक} + 1$$

$$= \left(\frac{4}{2}+1\right) \times \left(\frac{2}{2}+1\right) \times \left(\frac{1}{2}+1\right)$$

= (2 + 1) × (1 + 1) × 1 = 3 × 2 × 1= 6

पूर्ण घन के गुणनखंडों की संख्या

Ex. दिया गया है कि $N = 720 = 2^4 \times 3^2 \times 5^1$, उन गुणनखंड की कुल संख्या ज्ञात कीजिए जो पूर्ण घन हैं।

HINTS
$N = 720 = 2^4 \times 3^2 \times 5^1$

2 की घात	3 की घात	5 की घात
2^0	3^0	5^0
2^3		

∴ N = 720 के कुल गुणनखंडों की संख्या जो पूर्ण घन हैं = 2 × 1 × 1 = 2

वैकल्पिक विधि

$$a^{3n} = \frac{\text{घात}}{3} = \text{पूर्णांक} + 1$$

$$= \left(\frac{4}{3}+1\right) \times \left(\frac{2}{3}+1\right) \times \left(\frac{1}{3}+1\right)$$

= 1 + 1 × 1 × 1 = 2 × 1 × 1 = 2

पूर्ण वर्ग और घन के गुणनखंडों की संख्या

Ex. दिया गया है कि $N = 720 = 2^4 \times 3^2 \times 5^1$, उन गुणनखंड की कुल संख्या ज्ञात कीजिए जो पूर्ण वर्ग और पूर्ण घन दोनों हैं

HINTS
$N = 720 = 2^4 \times 3^2 \times 5^1$

2 की घात	3 की घात	5 की घात
2^0	3^0	5^0

∴ N = 720 के कुल गुणनखंडों की संख्या जिसके गुणनखंड पूर्ण वर्ग और पूर्ण घन एक साथ हैं
= 1 × 1 × 1 = 1

वैकल्पिक विधि

$$a^{6n} = \frac{\text{घात}}{6} = \text{पूर्णांक} + 1$$

$$= \left(\frac{4}{6}+1\right) \times \left(\frac{2}{6}+1\right) \times \left(\frac{1}{6}+1\right)$$

= 1 × 1 × 1 = 1

Ex. 720 के कितने गुणनखंड 10 से विभाज्य हैं?

HINTS $N = 720 = 2^4 \times 3^2 \times 5^1$
10 से विभाज्य होने वाले गुणनखंड के लिए, 2 की न्यूनतम घात = 1 का उपयोग किया जाना चाहिए, तथा 5 की न्यूनतम घात 1 का उपयोग किया जाना चाहिए।
अतः 720 के सभी गुणनखंड जो 10 से विभाज्य हैं, इस प्रारूप के होंगे = $2^1 \times 5^1 (2^3 \times 3^2)$

∴ गुणनखंड की संख्या = 4 × 3 × 1 = 12

Ex. 14,400 के कितने गुणनखंड 18 से विभाज्य हैं लेकिन 36 से नहीं?

HINTS 14400 के गुणनखंड = $2^6 \times 3^2 \times 5^2$
18 के गुणनखंड = 2×3^2, 36 के गुणनखंड = $2^2 \times 3^2$

18 से विभाज्य गुणनखंड = $\frac{2^6 \times 3^2 \times 5^2}{2 \times 3^2} = 2^5 \times 5^2$

18 से विभाज्य गुणनखंड की कुल संख्या = (5 + 1)(2 + 1) = 18

36 से विभाज्य गुणनखंड = $\frac{2^6 \times 3^2 \times 5^2}{2^2 \times 3^2} = 2^4 \times 5^2$

36 से विभाज्य गुणनखंड की कुल संख्या
= (4 + 1)(2 + 1) = 15
∴ आवश्यक गुणनखंड = 18 – 15 = 3

Ex. जब 732 को एक धनात्मक पूर्णांक x से विभाजित किया जाता है, तो शेषफल 12 बचता है। x के कितने मान हैं?

HINTS शेषफल 12 है, इसका अर्थ है कि भाजक 12 से बड़ा होना चाहिए।

732 = 720 + 12

∵ 720 को x से विभाजित होना चाहिए।

$720 = 2^4 \times 3^2 \times 5^1$

720 के कुल गुणनखंड

$= (4 + 1) \times (2 + 1) \times (1 + 1) = 30$

12 तक के गुणनखंड

= 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12 = 10

∴ अभीष्ट गुणनखंड = 30 – 10 = 20

- **गुणनखंड के व्युत्क्रम का योग** = $\dfrac{\text{गुणनखंडो का योग}}{\text{दी गई संख्या}}$

Ex. 16 के गुणनखंड के व्युत्क्रम का योग ज्ञात कीजिए।

HINTS 16 के गुणनखंड = 1, 2, 4, 8, 16

गुणनखंडो के व्युत्क्रम का योग = $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{31}{16}$

वैकल्पिक विधि

16 का अभाज्य गुणनखंड = 2^4

16 के गुणनखंडों का योग = $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4$

= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31

गुणनखंडो के व्युत्क्रम का योग = $\frac{31}{16}$

- **गुणनखंडो का गुणनफल** = $(N)^{\frac{n}{2}}$

जहाँ N = दी गई संख्या

n = गुणनखंडो की कुल संख्या

Ex. 360 के सभी गुणनखंडों का गुणनफल क्या है?

HINTS

360 के गुणनखंड = $2^3 \times 3^2 \times 5^1$

गुणनखंडों की संख्या = 4 × 3 × 2 = 24

गुणनखंडों का गुणनफल = $(N)^{\frac{n}{2}} = (360)^{\frac{24}{2}} = 360^{12}$

विभाज्यता

संख्या	विभाज्यता की स्थिति	उदाहरण
2^n: 2	एक संख्या 2 से विभाज्य होती है जब अंतिम अंक सम हो (0, 2, 4, 6, 8)	**Ex.** 224, 112, 264
4	एक संख्या 4 से विभाज्य होती है जब अंतिम 2 अंक 4 से विभाज्य हों	**Ex.** 144, 156
8	एक संख्या 8 से विभाज्य होती है जब उसके अंतिम 3 अंक 8 से विभाज्य हों	**Ex.** 48512, 35480
16	एक संख्या 16 से विभाज्य होती है जब अंतिम 4 अंक 16 से विभाज्य हों और इसी प्रकार आगे भी।	**Ex.** 324096, 153248
3, 9	एक संख्या 3 या 9 से विभाज्य होती है जब उसके अंकों का योगसंख्या 9 या 3 से विभाज्य होती है	523872 = अंकों का योग = 5 + 2 + 3 + 8 + 7 + 2 = 27
6	एक संख्या 'N' 6 से तभी विभाज्य होती है जब 'N' 2 और 3 दोनों से विभाज्य हो	**Ex.** 56934, 2 और 3 दोनों से विभाज्य है। इसलिए, यह 6 से विभाज्य है।
7	एक संख्या 7 से विभाज्य होती है यदि विषम स्थानों पर त्रिक के योग और सम स्थानों पर त्रिक के योग के बीच का अंतर 7 से विभाज्य हो।	**Ex.** 12348 = $\underline{012}\ \underline{348}$ = 348 – 012 = 336/7 = 48
5^n: 5	कोई संख्या 5^1 से विभाज्य होती है जब उसका अंतिम अंक 0 या 5 हो।	**Ex.** 10, 45, 105, 300 ....
25	एक संख्या 5^2 से विभाज्य होती है जब उसके अंतिम दो अंक 00 हों या 25 से विभाज्य हो।	**Ex.** 75, 150, 300, 425 ....
125	इसी प्रकार, एक संख्या 5^3 से विभाज्य होती है जब उसके अंतिम तीन अंक 000 हों या 125 से विभाज्य हों इत्यादि।	**Ex.** 125, 250, 375, 1000 ....
11	सम स्थान पर अंक का योग विषम स्थान पर अंक का योग] अंतर → यदि अंतर 0 या 11 का गुणज है तो संख्या 11 से विभाज्य होगी	**Ex.** 166452 = 1 + 6 + 5 = 12 = 6 + 4 + 2 = 12 अंतर = 12 – 12 = 0, 11 से विभाज्य है
13	अंतिम अंक का 4 गुना शेष में जोड़ने पर, यदि परिणामी संख्या 13 से विभाज्य है तो 'N' भी 13 से विभाज्य होगा।	**Ex.** 169 → 16 + 9 × 4 = 52 अतः 169, 13 से विभाज्य है।
17	अंतिम अंक का 5 गुना शेष में घटाने पर, यदि परिणामी संख्या 17 से विभाज्य है तो 'N' भी 17 से विभाज्य होगा।	**Ex.** 391 → 39 – 1 × 5 = 34 अतः 391, 17 से विभाज्य है।
7, 11, 13	जब किसी 3 अंकीय संख्या को 1001 से गुणा किया जाता है तो वह स्वयं को दोहराती है तथा सदैव 7, 11 और 13 से पूर्णतः विभाज्य होती है।	**Ex.** 123123, 147147, 164164, 574574
3, 7, 13, 37	जब किसी संख्या को 10101 से गुणा किया जाता है तो वह सदैव 3, 7, 13 और 37 से पूर्णतः विभाज्य होती है। 3 × 7 × 13 × 37 = 10101 xy × 10101 = $xyxyxy$ i.e. 73 × 10101 = 737373	**Ex.** 353535, 414141
101	• xyxy के रूप की कोई भी संख्या 101 से विभाज्य है। i.e. xy × 101 = 2525 • और xyz × 101 = (xyz + x)yz	**Ex.** 25 × 101 = 2525 **Ex.** 234 × 101 = (234 + 2) 34 = 23634

Ex. यदि छह अंकों की संख्या 479xyz, 7,11 और 13 से पूर्णतः विभाज्य है तो {(y + z) × x} बराबर है:

HINTS 7, 11, 13 का लघुत्तम समापवर्त्य = 1001

जब किसी संख्या के 3 अंक दो बार दोहराए जाएं तो वह संख्या 7, 11 और 13 से विभाज्य होगी।

479479, 7, 11 और 13 से विभाज्य है

$\Rightarrow x = 4, y = 7, z = 9$

$\therefore (y + z) \times x = (7 + 9) \times 4 = 64$

Ex. यदि सात अंकों की संख्या 35345*xy*, 40 से विभाज्य है, तो $(4x + 5y)$ का न्यूनतम मान क्या है?

HINTS हम जानते हैं, 40 = 5 × 8.

दी गई संख्या = 35345*xy*

प्रश्नानुसार, 35345*xy*, 40 से विभाज्य है, तो अंतिम अंक 0 होना चाहिए। अतः y = 0.

जैसा कि हम जानते हैं, यदि कोई संख्या 8 से विभाज्य है, तो अंतिम 3 अंक 8 से विभाज्य होने चाहिए। दूसरे शब्दों में, 5*x*0 8 से विभाज्य होना चाहिए।

इस प्रकार, x का न्यूनतम मान = 2

$\therefore 4x + 5y = 4 \times 2 + 0 = 8$

Ex. यदि 8 अंकों की संख्या 7y9745*x*2, 72 से विभाज्य है, तो x के सबसे बड़े मान के लिए $(2x - y)$ का मान क्या है?

HINTS संख्या 7y9745x2, 72 से विभाज्य है

8 से विभाज्यता - अंतिम 3 अंक जांचें

9 से विभाज्यता - अंकों का योग जांचें

5*x*2, 8 से विभाज्य है → यदि x = 1,5, 9

x का अधिकतम मान 9 है

संख्या 7y9745*x*2, 9 से विभाज्य है यदि y = 2

इस प्रकार $x = 9, y = 2$

$\therefore (2x - y) = 2 \times 9 - 2 = 16$

Ex. यदि 5 अंकों की संख्या 535ab, 3, 7 और 11 से विभाज्य है, तो $(a^2 - b^2 + ab)$ का मान क्या है?

HINTS 3, 7, 11 का लघुत्तम समापवर्त्य = 231

53599 (a और b के अधिकतम संभव मान लें) को 231 से विभाजित करें। हमें शेषफल 7 प्राप्त होता है

अब, 53599 में से 7 घटाएँ और सही संख्या = 53592 प्राप्त करें

$\Rightarrow a = 9, b = 2$

$\therefore a^2 - b^2 + ab = 81 - 4 + 18 = 95$

Ex. $2^{25} + 2^{26} + 2^{27}$ किससे विभाज्य है?

HINTS $2^{25}(2^0 + 2^1 + 2^2) = 2^{25}(1 + 2 + 4) = 2^{25} \times 7$

$\therefore 2^{25} + 2^{26} + 2^{27}$ 7 से विभाज्य है

Ex. 300 और 700 के बीच कितनी संख्याएँ 5, 6 और 8 से विभाज्य हैं?

HINTS 5, 6 और 8 का लघुत्तम समापवर्त्य = 120

300 और 700 के बीच की वे संख्याएँ जो 120 से विभाज्य हैं = 360, 480, 600

अभीष्ट संख्या = 3.

Ex. 1 से 100 तक ऐसी कितनी संख्याएँ हैं जो न तो 3 से और न ही 5 से विभाज्य हैं?

HINTS $100 \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$ (चूँकि 100, 3 × 5 = 15 से विभाज्य नहीं है, इसलिए 100 के बजाय 90 लें) = $90 \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = 48$

91 और 100 के बीच संख्याएँ 95 और 100,5 से विभाज्य हैं जबकि 93, 96 और 99,3 से विभाज्य हैं। इसलिए 5 संख्याएँ ऐसी हैं जो न तो 3 से और न ही 5 से विभाज्य हैं।

कुल संख्या = 48 + 5 = 53

वैकल्पिक विधि

न तो 3 से विभाज्य और न ही 5 से = कुल - (3 या 5 से विभाज्य) = कुल - [N(3) + N(5) - N(15)]

1 से 100 तक कुल संख्या = 100

3 से विभाज्य = $\frac{100}{3} \sim 33$

5 से विभाज्य = $\frac{100}{5} = 20$

15 से विभाज्य = $\frac{100}{15} \sim 6$

अभीष्ट संख्या = 100 – (33 + 20 – 6) = 53

Ex. 700 से 950 तक ऐसी कितनी संख्याएँ हैं जो न तो 3 से और न ही 7 से विभाज्य हैं?

HINTS 1 से 950 तक की संख्याएँ जो न तो 3 से विभाज्य हैं और न ही 7 से = $950 \times \frac{2}{3} \times \frac{6}{7}$ (चूँकि 950, 3 × 7 = 21 से विभाज्य नहीं है, इसलिए 950 के बजाय 945 लें) = $945 \times \frac{2}{3} \times \frac{6}{7} = 540$

946 और 950 के बीच की संख्या 948, 3 से विभाज्य है जबकि कोई भी संख्या 7 से विभाज्य नहीं है। अतः 4 संख्याएँ ऐसी हैं जो न तो 3 से और न ही 7 से विभाज्य हैं।

कुल संख्याएँ = 540 + 4 = 544

1 से 699 तक की संख्याएँ जो न तो 3 से विभाज्य हैं और न ही 7 से = $699 \times \frac{2}{3} \times \frac{6}{7}$ (चूँकि 699, 3 × 7 = 21 से विभाज्य नहीं है, इसलिए 699 के बजाय 693 लें)

$693 \times \frac{2}{3} \times \frac{6}{7} = 396$

694 और 699 के बीच संख्याएँ 696 और 699 3 से विभाज्य हैं जबकि कोई भी संख्या 7 से विभाज्य नहीं है। इसलिए 4 संख्याएँ ऐसी हैं जो न तो 3 से और न ही 7 से विभाज्य हैं।

कुल संख्याएँ = 396 + 4 = 400

700 और 950 के बीच की संख्याएँ जो न तो 3 से और न ही 7 से विभाज्य हैं

= 1 और 950 के बीच की संख्याएँ जो न तो 3 से और न ही 7 से विभाज्य हैं - 1 और 699 के बीच की संख्याएँ जो न तो 3 से और न ही 7 से विभाज्य हैं

= 544 – 400 = 144

वैकल्पिक विधि

न तो 3 से विभाज्य और न ही 7 से = कुल - (3 या 7 से विभाज्य) = कुल - [N(3) + N(7) - N(21)]

700 से 950 तक की कुल संख्या = 251

3 से विभाज्य = 251/3 ~ 83

7 से विभाज्य = 251/7 ~ 35

21 से विभाज्य = 251/21 ~ 11

अभीष्ट संख्या = 251 – (83 + 35 – 11) = 251 – 107

= 144

शेषफल

शेषफल वह राशि है जो भाग देने के बाद बचती है, जब एक भाजक लाभांश को ठीक से विभाजित नहीं करता है।

मान लीजिए संख्या N को भाजक D से विभाजित करने पर शेषफल R तथा भागफल Q बचता है।

Q → भागफल

विभाजक → D)N → भाज्य

R → शेष

संख्या "N" को नीचे दिए गए रूप में भी व्यक्त किया जा सकता है:

$$\boxed{N = DQ + R}$$

Ex. किसी संख्या को 38 से भाग देने पर भागफल 24 तथा शेषफल 13 हो, तो संख्या है:

HINTS

हम जानते हैं कि,

भागफल = भाजक × भागफल + शेषफल

यहाँ, भाजक = 38, भागफल = 24 और शेषफल = 13

∴ अभीष्ट संख्या (भाज्य) = 38 × 24 + 13 = 925

शेषफल

शेषफल योगात्मक होते हैं

मान लीजिए, N_1, N_2, N_3, ...उभयनिष्ठ भाजक D से विभाजित करने पर क्रमशः, भागफल Q_1, Q_2, Q_3, ... देता है। शेषफल R_1, R_2, R_3, ... देता है।

इसलिए,

$N_1 = D \times Q_1 + R_1$, $N_2 = D \times Q_2 + R_2$

$N_3 = D \times Q_3 + R_3$, ... और इसी तरह।

मान लीजिए S, N_1, N_2, N_3, ... का योग है, तो $S = (D \times Q_1 + R_1) + (D \times Q_2 + R_2) + (D \times Q_3 + R_3) + ...$

$= D \times (Q_1 + Q_2 + Q_3 + ...) + (R_1 + R_2 + R_3 + ...)$

$= D \times K + R_1 + R_2 + R_3 ......$

जहाँ K कोई संख्या है।

इसलिए, जब S को D से विभाजित किया जाता है तो शेषफल वही होता है जो $R_1 + R_2 + R_3 + ...$ को D से विभाजित करने पर शेषफल होता है।

उदाहरण के लिए:

$$\left.\frac{\overset{\overset{1}{\uparrow}}{6}}{5}\right|_R = \left.\frac{\overset{\overset{1}{\uparrow}}{36}}{5}\right|_R = \left.\frac{\overset{\overset{0}{\uparrow}}{30} + \overset{\overset{1}{\uparrow}}{6}}{5}\right|_R = \left.\frac{\overset{\overset{1}{\uparrow}}{21} + \overset{\overset{4}{\uparrow}}{9} + \overset{\overset{1}{\uparrow}}{6}}{5}\right|_R = ...$$

शेषफल गुणनात्मक होते हैं

मान लीजिए, N_1, N_2, N_3, ...उभयनिष्ठ भाजक D से विभाजित करने पर क्रमशः, भागफल Q_1, Q_2, Q_3, ... देता है। शेषफल R_1, R_2, R_3, ... देता है।

अतः,

$N_1 = D \times Q_1 + R_1$, $N_2 = D \times Q_2 + R_2$

$N_3 = D \times Q_3 + R_3$, ... इत्यादि।

माना **P**, N_1, N_2, N_3, ... का योग है।

तो, $P = N_1\ N_2\ N_3$ ....

$= (D \times Q_1 + R_1) + (D \times Q_2 + R_2) + (D \times Q_3 + R_3) + ...$

$= D \times K + R_1\ R_2\ R_3 ......$

जहाँ **K** कोई संख्या है।

स्पष्टतः, R_1, R_2, R_3,... का गुणनफल **D** से मुक्त है, इसलिए **P** को **D** से विभाजित करने पर प्राप्त शेषफल, गुणनफल R_1, R_2, R_3,... को **D** से विभाजित करने पर प्राप्त शेषफल होता है।

उदाहरण के लिए:

$$\left.\frac{\overset{\overset{1}{\uparrow}}{361} \times \overset{\overset{3}{\uparrow}}{363}}{12}\right|_R = \left.\frac{1 \times 3}{12}\right|_R = 3$$

ऋणात्मक शेषफल की अवधारणा

परिभाषा के अनुसार, शेषफल ऋणात्मक नहीं होते।

इसलिए, जब हम **-26** को **6** से भाग देते हैं, तब भी हम शेषफल **4** ही कहते हैं (न कि **-2**)। लेकिन, कभी-कभी गणना को आसान बनाने के लिए हम शेषफल का ऋणात्मक मान भी देखते हैं।

उपरोक्त अवधारणा को और स्पष्ट रूप से समझाने के लिए आइए एक उदाहरण लेते हैं। आइए **109** को दो संख्याओं का अंतर लिखें और फिर उसे **11** से भाग दें।

उदाहरण के लिए।

$$\frac{109}{11} = \frac{118 - 9}{11} = \frac{\overset{\downarrow +8}{118}}{11} - \frac{\overset{\downarrow -9}{9}}{11}$$

इसलिए, शेषफल = 8 – 9

= –1 + 11 = 10

Ex. $\frac{89}{9}$ का शेषफल क्या है?

HINTS

$$\frac{89}{9} = \frac{93 - 4}{9} = \frac{93}{9} - \frac{4}{9} = \frac{3 - 4}{9} = \frac{-1}{9}$$

∴ **शेषफल = – 1 + 9 = 8**

Ex. 335, 608 और 853 के योग को 13 से भाग देने पर शेषफल क्या होगा?

HINTS

$$\frac{\overset{\overset{10}{\uparrow}}{335} + \overset{\overset{10}{\uparrow}}{608} + \overset{\overset{8}{\uparrow}}{853}}{13} = \frac{10 + 10 + 8}{13}$$

$= \frac{28}{13}$ R = 2 शेषफल

स्वयं करें

Ex. 47, 69 और 85 के योग को 9 से विभाजित करने पर शेषफल क्या होगा?

[Ans. 3]

Ex. जब धनात्मक संख्या x, y और z को 31 से विभाजित किया जाता है, तो शेषफल क्रमशः 17, 24 और 27 होता है। जब $(4x - 2y + 3z)$ को 31 से विभाजित किया जाता है, तो शेषफल होगा:

HINTS

$x = 31 \times 1 + 17 = 48$

$y = 31 \times 1 + 24 = 55$

$z = 31 \times 1 + 27 = 58$

अब $(4x - 2y + 3z)$

$= 4 \times 48 - 2 \times 55 + 3 \times 58 = 256$

∴ शेषफल = 256 ÷ 31 = 8

स्वयं करें

Ex. 179 × 172 × 173 को 17 से विभाजित करने पर शेषफल ज्ञात कीजिए।

[Ans. 3]

Ex. $\frac{111}{12}$ का शेषफल क्या है?

HINTS

$$\frac{111}{12} = \frac{120 - 9}{12} = \frac{120}{12} - \frac{9}{12}$$

$$= \frac{0 - 9}{12} = \frac{-9}{12} = -9 + 12 = 3$$

∴ कुल शेषफल = 3

स्वयं करें

Ex. $\frac{116}{8}$ का शेषफल क्या है?

[Ans. 4]

शेषफल की कुछ महत्वपूर्ण अवधारणाएँ

• शेषफल $\left\{\frac{(a^n + b^n)}{(a+b)}\right\} \to 0$; जहाँ n विषम संख्या है।

Ex. $\left(\frac{8^{371} + 5^{371}}{13}\right)$ का शेषफल ज्ञात करें।

HINTS

यहाँ, 8 + 5 = 13.

इस प्रकार, व्यंजक का शेषफल 0 है।

• शेषफल $\left\{\frac{(a^n + b^n + c^n)}{(a+b+c)}\right\} \to 0$; जहाँ n विषम संख्या है।

Ex. $\left(\frac{3^{61} + 2^{61} + 4^{61}}{9}\right)$ का शेषफल ज्ञात करें।

HINTS

यहाँ, 3 + 2 + 4 = 9.

इस प्रकार, व्यंजक का शेषफल 0 है।

शेषफल $\left\{\frac{a^n + b^n + c^n + ...}{(a+b+c)}\right\} \to 0$; जहाँ, a + b + c + ... और इसी प्रकार सामान्तर श्रेणी में और n विषम संख्या है।

Ex. निम्नलिखित व्यंजक का शेषफल ज्ञात कीजिए $\left(\frac{16^{73} + 17^{73} + 18^{73} + 19^{73}}{70}\right)$

HINTS

यहाँ, 16 + 17 + 18 + 19 समांतर श्रेणी में हैं और 73 विषम संख्या है। अतः व्यंजक का शेषफल 0 है।

• शेषफल $\left\{\frac{a^n - b^n}{(a-b)}\right\} \to 0$; n के सभी मानों के लिए

Ex. $\left(\frac{8^{36} - 2^{36}}{6}\right)$ का शेषफल ज्ञात करें।

HINTS ऊपर परिभाषित अवधारणा का उपयोग करते हुए, व्यंजक का शेषफल 0 है।

• शेषफल $\left\{\frac{a^n - b^n}{(a+b)}\right\} \to 0$; जहाँ n सम संख्या है।

Ex. $\left(\frac{7^{24} - 4^{24}}{11}\right)$ का शेषफल ज्ञात करें।

HINTS ऊपर परिभाषित अवधारणा का उपयोग करते हुए, व्यंजक का शेषफल 0 है।

• $(a^n + b^n)$ जहाँ n = सम

∴ $(a^n + b^n)$, (a + b) और (a – b) दोनों से विभाज्य नहीं

• शेषफल $\left\{\frac{(a+1)^n}{a}\right\} \to 1$; n के सभी मानों के लिए

Ex. $\frac{16^{13}}{15}$ का शेषफल ज्ञात करें।

HINTS $= \frac{(15+1)^{13}}{15} = \frac{15^{13}}{15} + \frac{1^{13}}{15}$

शेषफल $= \frac{1^{13}}{15} = 1$

• शेषफल $\left\{\frac{(a-1)^n}{a}\right\} \to 1$; जहाँ n सम संख्या है।

Ex. $\frac{72^{282}}{73}$ व्यंजक का शेषफल ज्ञात कीजिए

HINTS

$\frac{72^{282}}{73} = \frac{(73-1)^{282}}{73} = 1$

• शेषफल $\left\{\frac{(a-1)^n}{a}\right\} \to$ (a–1) या – 1 जब n विषम संख्या है।

Ex. व्यंजक $\frac{72^{281}}{73}$ का शेषफल ज्ञात कीजिए।

HINTS

$\frac{72^{281}}{73} = \frac{(73-1)^{281}}{73}$ = – 1 या 73 – 1 = 72

फ़र्मेट (Fermat's) का शेषफल प्रमेय:

यदि $\frac{a^{P-1}}{P}$ तब शेषफल = 1

P = अभाज्य संख्या

a, P → सह-अभाज्य संख्या

Ex. $\frac{82^{54}}{19}$ का शेषफल ज्ञात करें।

HINTS

$\frac{82^{54}}{19} = \frac{(82^{18})^3}{19} = 1^3 = 1$

Ex. $\frac{93^{51}}{11}$ का शेषफल ज्ञात करें।

HINTS

$\frac{93^{51}}{11} = \frac{(93^{10})^5 \times 93}{11} = 1 \times 5 = 5$

स्वयं करें

Ex. $\frac{9^{111}}{13}$ का शेषफल ज्ञात करें। *[Ans. 1]*

यूलर (Euler's) का शेषफल प्रमेय:

$\frac{a^{\phi(N)}}{N} = 1$ (शेषफल)

N = कोई भी प्राकृत संख्या

ϕ (N) = N का टोसेन्ट व्यंजक

a, N → सह-अभाज्य

ϕ (N) कैसे ज्ञात करें:

$\phi(72) \Rightarrow 72 = 2^3 \times 3^2$

$= 72 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right)$

$= 72 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = 24$

नोट सभी अभाज्य संख्याओं के लिए, यूलर संख्या दी गई अभाज्य संख्या से एक कम संख्या होगी।

$E_2 = 2 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1$, $E_3 = 3 \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 2$

स्वयं करें

Ex. 100 का टोसेन्ट ज्ञात कीजिए। *[Ans. 40]*

विल्सन (Wilson's) का शेषफल प्रमेय:

यदि P एक अभाज्य संख्या है तो (P – 1)! + 1, P से विभाज्य है। दूसरे शब्दों में, जब (P – 1)! को P से विभाजित किया जाता है तो शेषफल –1 प्राप्त होता है।

Ex. 40! को 41 से विभाजित करने पर शेषफल ज्ञात कीजिए

HINTS

विल्सन के प्रमेय का उपयोग करते हुए,

शेषफल $= \left[\frac{(41-1)!}{41}\right] = -1$

= 41 + (– 1) = 40

स्वयं करें

Ex. $\frac{96^{132}}{97}$ का शेषफल ज्ञात कीजिए। *[Ans. 1]*

क्रमिक विभाजन की अवधारणा

आइए क्रमिक विभाजन की अवधारणा को समझाने के लिए एक उदाहरण लेते हैं।

मान लीजिए कि एक संख्या 'N' को क्रमिक रूप से 3, 4 और 7 से विभाजित किया जाता है, तो शेषफल क्रमशः 2, 1 और 4 प्राप्त होते हैं।

यदि हमें N का मान ज्ञात करना है, तो हमें नीचे दिए गए चरणों का पालन करना होगा।

विभाजक	53	शेषफल
3	17	2
4	4	1
7	0	4

$1 \rightarrow 7 \times 0 + 4 = 4$
$2 \rightarrow 4 \times 4 + 1 = 17$
$3 \rightarrow 17 \times 3 + 2 = 53$

इस प्रकार, N का मान = 53

अब, आइए देखें कि क्रमिक विभाजन कैसे काम करता है।

भागफल	$\frac{53}{3} = 17$	$\frac{17}{4} = 4$	$\frac{4}{7} = 0$
शेषफल	2	1	4

उपरोक्त उदाहरण क्रमिक विभाजन की अवधारणा को स्पष्ट रूप से समझाता है।

Ex. जब किसी संख्या (N) को क्रमिक रूप से 3, 4 और 7 से विभाजित किया जाता है, तो शेषफल क्रमशः 2, 3 और 5 प्राप्त होते हैं। संख्या (N) क्या होगी?

HINTS

विभाजक	71	शेषफल
3	23	2
4	5	3
7	0	5

$1 \rightarrow 7 \times 0 + 5 = 5$
$2 \rightarrow 4 \times 5 + 3 = 23$
$3 \rightarrow 23 \times 3 + 2 = 71$

अतः N का मान = 71

भागफल	$\frac{71}{3} = 23$	$\frac{23}{4} = 5$	$\frac{5}{7} = 0$
शेषफल	2	3	5

दी गई संख्या में जोड़ी या घटाई जाने वाली सबसे छोटी संख्या ताकि वह भाजक से विभाज्य हो जाए।

Ex. 42072 में वह सबसे छोटी संख्या क्या जोड़नी होगी जिससे वह संख्या 93 से विभाज्य हो जाए?

HINTS 42072 ÷ 93

हमें भागफल = 452 और शेषफल = 36 प्राप्त होता है।

अतः जोड़ने वाली सबसे छोटी संख्या = 93 – 36 = 57

Ex. 25809 में से वह सबसे छोटी संख्या क्या घटाई जाए जिससे 139 से पूर्णतः विभाज्य संख्या प्राप्त हो जाए?

HINTS 25809 ÷ 139

हमें भागफल = 185 और शेषफल = 94 प्राप्त होता है।

अतः, यदि हम दी गई संख्या 25809 में से 94 घटा दें अर्थात्
= 25809 – 94 = 25715, 139 से पूर्णतः विभाज्य है।

स्वयं करें

Ex. किसी संख्या को क्रमशः 2, 3 और 5 से भाग देने पर शेषफल क्रमशः 1, 2 और 3 बचते हैं। यदि उसी संख्या को 13 से भाग दिया जाए (यदि अंतिम भागफल 1 हो) तो शेषफल क्या होगा? ***[Ans. 1]***

शून्यों की संख्या

☞ किसी व्यंजक में शून्यों की संख्या

मान लीजिए हमें गुणनफल 24 × 13 × 52 × 27 में शून्यों की संख्या ज्ञात करनी है, जिसे $2^5 \times 3^4 \times 13^2$ भी लिखा जा सकता है। स्पष्टतः, इस गुणनफल में कोई शून्य नहीं होगा, क्योंकि इसमें 5 नहीं है।

- हालाँकि, यदि हमारे पास इस प्रकार की अभिव्यक्ति है:

8 × 15 × 24 × 13

अभिव्यक्ति को इस प्रकार पुनः लिखा जा सकता है

$2^6 \times 3^2 \times 5 \times 13$

हम जानते हैं कि शून्य 2 और 5 के संयोजन से बन सकते हैं अर्थात (2 × 5)।

उपरोक्त अभिव्यक्ति में 6 दो और एक पांच है।

अतः हम केवल (2 × 5) का एक युग्म बना सकते हैं।

अतः गुणनफल में 1 शून्य होगा।

☞ किसी फैक्टोरियल (Factorial) में शून्यों की संख्या ज्ञात करना

माना हमें 7! में शून्यों की संख्या ज्ञात करनी है।

$7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$= 7 \times (3 \times 2) \times 5 \times 2 \times 2 \times 3 \times 2 \times 1$

$= 7 \times 5 \times 3^2 \times 2^4 \times 1$

उपरोक्त व्यंजक में 5 × 2 का एक युग्म है। स्पष्टतः, केवल एक 5 है तथा 2 की अधिकता है।

यह स्पष्ट है कि किसी भी फैक्टोरियल मान में, 5 की संख्या हमेशा 2 की संख्या से कम होगी। इसलिए, किसी फैक्टोरियल में 5 की गिनती शून्यों की कुल संख्या बताएगी।

किसी फैक्टोरियल (Factorial) में निहित संख्या की घात

n! में निहित अभाज्य संख्या p की उच्चतम घात को निम्निलिखित द्वारा दिया गया है

$$\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \ldots$$

जहाँ $[x]$ x से छोटा या उसके बराबर सबसे बड़ा पूर्णांक दर्शाता है।

Ex. 47! में शून्यों की संख्या ज्ञात कीजिये?

HINTS 47! में शून्यों की संख्या ज्ञात करने के लिए, हमें 47! में 5 की अधिकतम घात ज्ञात करनी होगी।

इस प्रकार, 47! में 5 की उच्चतम घात

$$= \left[\frac{47}{5}\right] + \left[\frac{47}{25}\right] + \left[\frac{47}{125}\right] + \ldots.$$

= 9 + 1 + 0 + 0 ... = 10

अतः, 47! में शून्यों की संख्या 10 होगी।

Ex. 300! में शून्यों की संख्या ज्ञात कीजिये?

HINTS 300! में शून्यों की संख्या ज्ञात करने के लिए, हमें 300! में 5 की अधिकतम घात ज्ञात करनी होगी।

इस प्रकार, 300! में 5 की उच्चतम घात

$$= \left[\frac{300}{5}\right] + \left[\frac{300}{25}\right] + \left[\frac{300}{125}\right] + \left[\frac{300}{625}\right] + \ldots.$$

= 60 + 12 + 2 + ... = 74

अतः, 300! में शून्यों की संख्या 74 होगी।

संख्याओं की गिनती

☞ एक अंक गिनना

Ex. 350 से 600 तक 5 कितनी बार आएगा?

HINTS

5	600	5	350
5	120	5	70
5	24	5	14
	4		2

5 की आवृत्ति = 120 + 24 + 4 = 148

5 की आवृत्ति = 70 + 14 + 2 = 86

350 से 600 तक 5 की आवृत्ति = 148 – 86 = 62

Ex. 400 से 700 तक ऐसी कितनी संख्याएँ हैं जिनमें अंक 6 ठीक दो बार आता है?

HINTS

श्रेणी	नंबर	गिनती करना
400 – 499	466	1
500 – 599	566	1
660 – 669	660-669 (666 छोड़कर)	9
606 – 696	Every 10^{th}, 606, 616, ... 696 (666 छोड़कर)	9
	कुल = 1+ 1 + 9 + 9	= 20

☞ पृष्ठ गणना और कुंजी स्ट्रोक

1 से 9 → 9 की-स्ट्रोक

1 से 99 → 189 की-स्ट्रोक

1 से 999 → 2889 की-स्ट्रोक

1 से 9999 → 38889 की-स्ट्रोक

अंकों की कुल संख्या = $n(N + 1) - 1_n$

जहाँ n = दी गई संख्या में अंकों की संख्या

N = बड़ी संख्या

1_n = दी गई संख्या में अंकों की संख्या 1 के रूप में गिनी जाएगी।

Ex. 428 पृष्ठों वाली पुस्तक को क्रमांकित करने के लिए कितने अंकों की आवश्यकता होगी?

HINTS

अंक	संख्या	कुल अंक
एकल	1 से 9	1 × 9
दो	10 से 99	2 × 90 = 180
तीन	100 से 428	3 × 329 = 987

आवश्यक अंकों की संख्या = 9 +180 + 987 = 1176

वैकल्पिक विधि

अंकों की कुल संख्या = $n (N + 1) - 1_n$

= 3 (428 + 1) – 111 = 1287 – 111 = 1176

Ex. एक मुद्रक एक पुस्तक के पृष्ठ को 1 से शुरू करते हुए 3189 अंकों का उपयोग करता है। पुस्तक में कितने पृष्ठ हैं?

HINTS अंकों की कुल संख्या = $n (N + 1) - 1_n$

⇒ 3189 = 4 (N + 1) – 1111

⇒ 4300 = 4 (N + 1) ⇒ N + 1 = 1075 ⇒ N = 1074

☞ अंकों का योग

Ex. 1 से 100 तक सभी अंकों का योग ज्ञात करें।

HINTS

एकल अंक संख्या (1 – 9):-

योग = 1 + 2 ..... + 9 = 45

दो अंकीय संख्या (10 – 99):-

(प्रत्येक अंक 1 – 9, 10 बार आता है)

दहाई का स्थान :- (1 + 2 +..... + 9) × 10 = 45 × 10 = 450

(प्रत्येक अंक 0 – 9, 9 बार आता है)

इकाई अंक:- (0 + 1 + 2 +..... + 9) × 9 = 45 × 9 = 405

तीन अंक (100):- (1 सैकड़ा स्थान)

कुल योग = 45 + 450 + 405 + 1 = 901

वर्गों के अंतर के रूप में संख्या की अवधारणा

यदि एक संख्या N को दो संख्याओं (a × b) के गुणनफल के रूप में लिखा जा सकता है तो $N = ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$ इस प्रकार, $\boxed{N = x^2 - y^2}$	$a + b$ = विषम $a - b$ = विषम $a = \frac{\text{विषम} + \text{विषम}}{2}$ = सम प्राकृतिक संख्या	$a + b$ = सम $a - b$ = सम $a = \frac{\text{सम} + \text{सम}}{2}$ = सम प्राकृतिक संख्या.	$a + b$ = सम $a - b$ = विषम $a = \frac{\text{सम} + \text{विषम}}{2} = \frac{\text{विषम}}{2}$ 1 प्राकृतिक संख्या

Ex. प्राकृतिक संख्याओं के ऐसे कितने युग्म हैं जिनके वर्ग का अंतर 35 है?

HINTS मान लीजिए, संख्याएँ x और y हैं।

$x^2 - y^2 = N$

$x^2 - y^2 = 35$

$(x + y)$ $(x - y)$

7 × 5 = 35

35 × 1 = 35

अतः, 2 जोड़ी संभव है।

∴ x और y प्राकृतिक संख्याएँ हैं, $(x - y)$ और $(x + y)$ भी पूर्णांक होना चाहिए। साथ ही $x^2 - y^2 = 35 > 0$ इसलिए $(x - y)$ और $(x + y)$ एक धनात्मक पूर्णांक होना चाहिए।

Ex. प्राकृतिक संख्याओं के ऐसे कितने युग्म हैं जिनके वर्ग का अंतर 36 है?

HINTS मान लीजिए, संख्याएँ x और y हैं।

$x^2 - y^2 = 36$

$(x + y)$		$(x - y)$ = 36
1	×	36 = × ⟶ $x = \frac{1+36}{2}$ ≠ प्राकृतिक संख्या
2	×	18 = ✓ ⟶ $\frac{x+y}{2} = \frac{2+18}{2} = 10$
3	×	12 = ×
4	×	9 = × $\frac{x-y}{2} = \frac{18-2}{2} = 8$
6	×	6 = ✓

(10 और 8) प्राकृतिक संख्या

अतः, 2 जोड़ी संभव है।

x और y के धनात्मक पूर्णांक होने के लिए, x और y दोनों को या तो विषम होना चाहिए या दोनों को सम होना चाहिए। यदि एक सम है और दूसरा विषम है, तो x और y का मान दशमलव में होगा।

2-अंकीय संख्या और उसकी विपरीत संख्या

माना, दो अंकों की मूल संख्या = $10x + y$, विपरीत संख्या $10y + x$

मूल और विपरीत संख्या का योग	मूल और विपरीत संख्या का अंतर
$(10x + y) + (10y + x) = 11(x + y)$	$(10x + y) - (10y + x) = 9(x - y)$
Ex: दो अंकों की संख्या और अंकों को आपस में बदलकर प्राप्त संख्या का योग 77 है। यदि अंकों का अंतर 1 है, तो संख्या है: **HINTS** माना, संख्या = $10x + y$ $(10x + y) + (10y + x) = 77$ $\Rightarrow x + y = 7$ .... (i) $x - y = 1$ ....(ii) समीकरण (i) और (ii) को हल करने पर, $x = 4$ और $y = 3$ अतः, संख्या = $10x + y = 10 \times 4 + 3 = 43$	**Ex:** दो अंकों वाली एक संख्या के अंकों का योग 9 है। इसके अंकों को आपस में बदलने पर प्राप्त संख्या दी गई संख्या से 45 अधिक है, तो मूल संख्या क्या है? **HINTS** माना, दो अंकों वाली संख्या $10x + y$ है प्रश्नानुसार, $x + y = 9$ .....(i) $10y + x - (10x + y) = 45$ $\Rightarrow 9y - 9x = 45$ $\Rightarrow y - x = 5$ .....(ii) समीकरण (i) और (ii) से, $x = 2, y = 7$ $\therefore$ मूल संख्या = $10x + y = 10 \times 2 + 7 = 27$

3-अंकीय संख्या और उसकी विपरीत संख्या

माना, सैकड़ा अंक = x, दहाई अंक = y, इकाई अंक = z, अतः, मूल संख्या = $100x + 10y + z$

मूल संख्या ($100x + 10y + z$)

सैकड़ा और इकाई अंक को आपस में बदलते हैं	सैकड़ा और दहाई अंक को आपस में बदलते हैं
नई संख्या = $100z + 10y + x$ घटाने के बाद = मूल संख्या – नई संख्या $= 100x + 10y + z - (100z + 10y + x)$ $= 99(x - z)$ $= 99(z - x)$ यदि विपरीत हो	नई संख्या = $100y + 10x + z$ घटाने के बाद = मूल संख्या – नई संख्या $= 100x + 10y + z - (100y + 10x + z)$ $= 90(x - y)$ $= 90(y - x)$ यदि विपरीत हो
Ex: यदि तीन अंकों वाली एक संख्या के सैकड़ा और इकाई के अंकों को आपस में बदल दिया जाए, तो परिणामी संख्या मूल संख्या से 198 कम होगी। सैकड़ा और इकाई के अंकों के बीच क्या अंतर है? **HINTS** मान लीजिए, मूल संख्या $100x + 10y + z$ है सैकड़ा और इकाई के अंकों को आपस में बदलने के बाद, संख्या $= 100z + 10y + x$ दिया है, $(100x + 10y + z) - (100z + 10y + x) = 198$ $\Rightarrow 99x - 99z = 198$ $\Rightarrow 99(x - z) = 198$ $\Rightarrow x - z = 2$ $\therefore$ सैकड़ा और इकाई अंक के बीच अंतर = 2	**Ex:** यदि तीन अंकों वाली एक संख्या के सैकड़ा और दहाई के अंकों को आपस में बदल दिया जाए, तो परिणामी संख्या मूल संख्या से 360 कम होगी। सैकड़ा और दहाई के अंकों के बीच क्या अंतर है? **HINTS** मान लीजिए, मूल संख्या $100x + 10y + z$ है सैकड़ा और दहाई के अंकों को आपस में बदलने के बाद, संख्या $= 100y + 10x + z$ दिया है, $(100x + 10y + z) - (100y + 10x + z) = 360$ $\Rightarrow 90x - 90y = 360$ $\Rightarrow 90(x - y) = 360$ $\Rightarrow x - y = 4$ $\therefore$ सैकड़ा और दहाई के अंकों का अंतर = 4

आपस में बदलने पर	नयी संख्या	अंतर	परिणाम
सैकड़ा और इकाई	$100z + 10y + x$	$99(x - z)$	99 का गुणज
सैकड़ा और दहाई	$100y + 10x + z$	$90(x - y)$	90 का गुणज

बाइनरी संख्या

बाइनरी → आधार 2

(0, 1)

Ex. $(101010)_2 \rightarrow (?)_8$ में बदलें

HINTS

1	0	1		0	1	0
2^2	2^1	2^0		2^2	2^1	2^0
4	+	1			2	
	5				2	

= 52

Ex. $(1010101)_2 \rightarrow (?)_{10}$ में बदलें

HINTS

1	0	1	0	1	0	1
2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
64		16		4		1

64 + 16 + 4 + 1 = 85

Ex. $(1010101)_2 \rightarrow (?)_{16}$ में बदलें

HINTS

0	1	0	1		0	1	0	1
2^3	2^2	2^1	2^0		2^3	2^2	2^1	2^0
	4		1			4		1
		5					5	

= 55

ऑक्टल → आधार 8

(0,1,2,3,4,5,6,7)

Ex. $(675)_8 \rightarrow (?)_2$ में बदलें

HINTS

	4	2	1
6	1	1	0
7	1	1	1
5	1	0	1

= 1 1 0 1 1 1 1 0 1

Ex. $(175)_8 \rightarrow (?)_{10}$ में बदलें

HINTS

	1	7	5
×	8^2	8^1	8^0
	64	56	5

64 + 56 + 5 = 125

Ex. $(675)_8 \rightarrow (?)_{16}$ में बदलें

HINTS

$(675)_8 \rightarrow (\ )_2 \rightarrow (?)_{16}$

	4	2	1
6	1	1	0
7	1	1	1
5	1	0	1

= 1 1 0 1 1 1 1 0 1

अब, $\rightarrow (?)_{16}$

0 0 0 1	1 0 1 1	1 1 0 1
8 4 2 1	8 4 2 1	8 4 2 1
1	11(B)	13(D)

= 1BD

दशमलव → आधार 10

(0,1,2,3,4,5,6,7,8,9)

Ex. $(63)_{10} \rightarrow (?)_2$ में बदलें

HINTS

2	63	
2	31	1
2	15	1
2	7	1
2	3	1
	1	1

= 1 1 1 1 1 1

Ex. $(67)_{10} \rightarrow (?)_8$ में बदलें

HINTS

8	67	
8	8	3
	1	0

= 103

Ex. $(425)_{10} \rightarrow (?)_{16}$ में बदलें

HINTS

16	425	
16	26	9
	1	10 (A)

= 1A9

हेक्साडेसिमल → आधार 16

(0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A(10), B(11),C(12),D(13),E(14),F(15))

Ex. $(D9)_{16} \rightarrow (?)_2$ में बदलें

HINTS

	8	4	2	1
D(13)	1	1	0	1
9	1	0	0	1

= 1 1 0 1 1 0 0 1

Ex. $(6FD)_{16} \rightarrow (?)_8$ में बदलें

HINTS

$(6FD)_{16} \rightarrow (\ )_2 \rightarrow (?)_8$

	8	4	2	1
6	0	1	1	0
F (15)	1	1	1	1
D (13)	1	1	0	1

= 0 1 1 0 1 1 1 1 1 1 0 1

अब, $\rightarrow (\ ?\ )_8$

0 1 1	0 1 1	1 1 1	1 0 1
4 2 1	4 2 1	4 2 1	4 2 1
3	3	7	5

= 3 3 7 5

Ex. $(1AD)_{16} \rightarrow (?)_{10}$ में बदलें

HINTS

	1	A(10)	D(13)
×	16^2	16^1	16^0
	256	160	13

256 + 160 + 13 = 429

स्वयं करें

Ex. $(4AE)_{16} \rightarrow (?)_8$ में बदलें

Ans. $(2256)_8$

Ex. $(10101)_2 \rightarrow (?)_{16}$ में बदलें

Ans. $(15)_{16}$

Note:

- जब दशमलव बाईं ओर हो तो दी गई संख्या को दाईं ओर के आधार से विभाजित करें।
- जब दशमलव दाईं ओर मौजूद हो तो बाएं आधार की घात की श्रृंखला से गुणा करें।
- बाइनरी से ऑक्टल या ऑक्टल से बाइनरी → 421/3 अंक युग्म
- बाइनरी से हेक्साडेसिमल या हेक्साडेसिमल से बाइनरी → 8421/4 अंक युग्म
- ऑक्टल को हेक्साडेसिमल में या हेक्साडेसिमल को ऑक्टल में सीधे रूपान्तरित करना संभव नहीं है। सबसे पहले आपको इसे बाइनरी में बदलना होगा।

Ex. $(17.125)_{10} = (?)_2$ में परिवर्तित करें

HINTS सबसे पहले, पूर्णांक भाग को परिवर्तित करें

2	17	
2	8	1
2	4	0
2	2	0
	1	0

भिन्नात्मक भाग को परिवर्तित करें

0.125 × 2 = 0.250   0

0.250 × 2 = 0.500   0

0.500 × 2 = 1.00   1

$(17.125)_{10} = (10001.001)_2$

अध्याय 09

बीजगणित

बीजगणित गणित की वह शाखा है जिसमें संख्याओं के स्थान पर सांकेतिक अक्षरों (चर या प्रतीकों) का प्रयोग किया जाता है और इन प्रतीकों पर अंकगणितीय क्रियाएँ (जैसे जोड़, घटा , गुणा, भाग आदि) की जाती हैं।

सम्मिलित विषय

- व्युत्क्रम फलन
- 2V और 3V के लिए वर्ग सूत्र
- 2V और 3V के लिए घन सूत्र
- पूर्ण वर्ग की अवधारणा
- मान रखने की अवधारणा और समरूपता
- द्विघात समीकरण

व्युत्क्रम फलन (Inverse Function)

(A) मूल सूत्र

$$x \pm \frac{1}{x}$$

यदि $x + \frac{1}{x} = n$, तब

- $x^2 + \frac{1}{x^2} = n^2 - 2$
- $x^4 + \frac{1}{x^4} = (n^2 - 2)^2 - 2$
- $x^8 + \frac{1}{x^8} = \left[(n^2 - 2)^2 - 2\right]^2 - 2$
- $x^3 + \frac{1}{x^3} = n^3 - 3n$
- $x^6 + \frac{1}{x^6} = (n^3 - 3n)^2 - 2$

यदि $x - \frac{1}{x} = n$, तब

- $x^2 + \frac{1}{x^2} = n^2 + 2$
- $x^4 + \frac{1}{x^4} = (n^2 + 2)^2 - 2$
- $x^8 + \frac{1}{x^8} = \left[(n^2 + 2)^2 - 2\right]^2 - 2$
- $x^3 - \frac{1}{x^3} = n^3 + 3n$
- $x^6 + \frac{1}{x^6} = (n^3 + 3n)^2 + 2$

Ex. यदि $x + \frac{1}{x} = 3$, तो

HINTS $x^2 + \frac{1}{x^2} = 3^2 - 2 = 7$

- $x^4 + \frac{1}{x^4} = \left(3^2 - 2\right)^2 - 2 = 47$
- $x^8 + \frac{1}{x^8} = \left[\left(3^2 - 2\right)^2 - 2\right]^2 - 2 = 2207$
- $x^3 + \frac{1}{x^3} = 3^3 - 3 \times 3 = 18$
- $x^6 + \frac{1}{x^6} = \left(3^3 - 3 \times 3\right)^2 - 2 = 322$

Ex. यदि $x - \frac{1}{x} = 3$, तब

HINTS $x^2 + \frac{1}{x^2} = 3^2 + 2 = 11$

- $x^4 + \frac{1}{x^4} = \left(3^2 + 2\right)^2 - 2 = 119$
- $x^8 + \frac{1}{x^8} = \left[\left(3^2 + 2\right)^2 - 2\right]^2 - 2 = (119)^2 - 2 = 14159$
- $x^3 - \frac{1}{x^3} = 3^3 + 3 \times 3 = 36$
- $x^6 + \frac{1}{x^6} = (3^3 + 3 \times 3)^2 + 2 = 1298$

$x \pm \frac{1}{x}$

यदि $x + \frac{1}{x} = n$, तब

- $x^5 + \frac{1}{x^5} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right)$
  $= (n^2 - 2)(n^3 - 3n) - n$
- $x^7 + \frac{1}{x^7} = \left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right)$
  $= \left[(n^2 - 2)^2 - 2\right](n^3 - 3n) - n$

यदि $x - \frac{1}{x} = n$, तब

- $x^5 - \frac{1}{x^5} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right) - \left(x - \frac{1}{x}\right)$
  $= (n^2 + 2)(n^3 + 3n) - n$
- $x^7 - \frac{1}{x^7} = \left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right) + \left(x - \frac{1}{x}\right)$
  $= \left[(n^2 + 2)^2 - 2\right](n^3 + 3n) + n$

- $x^5 \pm \frac{1}{x^5}$ और $x^7 \pm \frac{1}{x^7}$, n का गुणज होना चाहिए।
- यदि $x \pm \frac{1}{x} = n$ (इकाई अंक), तब $x^5 \pm \frac{1}{x^5}$ और $x^7 \pm \frac{1}{x^7}$, का इकाई अंक n होना चाहिए।

Ex. यदि $x + \frac{1}{x} = 3$, तब

HINTS $x^5 + \frac{1}{x^5} = (3^2 - 2)\ (3^3 - 3 \times 3) - 3 = 123$

- $x^7 + \frac{1}{x^7} = [(3^2 - 2)^2 - 2]\ (3^3 - 3 \times 3) - 3 = 843$

Ex. यदि $x - \frac{1}{x} = 3$, तब

HINTS $x^5 - \frac{1}{x^5} = (3^2 + 2)\ (3^3 + 3 \times 3) - 3 = 393$

- $x^7 - \frac{1}{x^7} = [(32 + 2)2 - 2]\ (33 + 3 \times 3) + 3 = 4287$

(B) द्विघात समीकरण

हल करने के लिए, पहले द्विघात समीकरण ($ax^2 + bx + c = 0$) को $\left(x + \frac{1}{x}\right)$ या $\left(x - \frac{1}{x}\right)$ में परिवर्तित करें।

Ex. यदि $\frac{2p}{p^2 - 5p + 1} = \frac{1}{10}, p \neq 0$ है, तो $\left(p + \frac{1}{p}\right)$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $\frac{2p}{p^2 - 5p + 1} = \frac{1}{10}$

$\Rightarrow \frac{2}{p - 5 + \frac{1}{p}} = \frac{1}{10} \Rightarrow 20 = p + \frac{1}{p} - 5 \Rightarrow 25 = p + \frac{1}{p}$

Ex. यदि $p^2 - 4p - 1 = 0$ है, तब $p^2 + 3p + \frac{1}{p^2} - \frac{3}{p}$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $p^2 - 4p - 1 = 0$,

$\Rightarrow p - \frac{1}{p} = 4$

$\Rightarrow p^2 + \frac{1}{p^2} = 4^2 + 2 = 18$

$\therefore\ p^2 + \frac{1}{p^2} + 3\left(p - \frac{1}{p}\right)$

$= 18 + 3 \times 4 = 18 + 12 = 30$

(C) रिवर्स केस

यदि $x^4 + \frac{1}{x^4} = n$, तब

$x^2 + \frac{1}{x^2} = \sqrt{n+2}$ $\qquad$ $x^2 - \frac{1}{x^2} = \sqrt{n-2}$

$x + \frac{1}{x} = \sqrt{\sqrt{n+2} + 2}$ $\qquad$ $x - \frac{1}{x} = \sqrt{\sqrt{n+2} - 2}$

हल करने के लिए, पहले दिए गए व्यंजक को $x \pm \frac{1}{x}$ में बदलें फिर प्रश्नों की आवश्यकता के अनुसार आगे बढ़ें।

Ex. यदि $x^2 + \frac{1}{x^2} = 119\ (x > 0)$ है, तब $\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $x^2 + \frac{1}{x^2} = 119$

$\Rightarrow x + \frac{1}{x} = \sqrt{119 + 2} = \sqrt{121} = 11$

$= x^3 + \frac{1}{x^3} = (11)^3 - 3 \times 11 = 1331 - 33 = 1298$

Ex. यदि $k^4 + \frac{1}{k^4} = 194$ है, तब $k^3 + \frac{1}{k^3}$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $k^4 + \frac{1}{k^4} = 194$

$\Rightarrow k^2 + \frac{1}{k^2} = \sqrt{194 + 2} = 14$

$\Rightarrow k + \frac{1}{k} = \sqrt{14 + 2} = 4$

$\therefore\ k^3 + \frac{1}{k^3} = 4^3 - 12 = 52$

Ex. If $x > 1$ और $x^2 + \frac{1}{x^2} = 83$ है, तब $x^3 - \frac{1}{x^3}$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $x^2 + \frac{1}{x^2} = 83$

$x - \frac{1}{x} = \sqrt{83 - 2} = 9$

$\therefore\ x^3 - \frac{1}{x^3} = 9^3 + 3 \times 9 = 729 + 27 = 756$

Ex. दिया है $x^8 - 34x^4 + 1 = 0,\ x > 0$ है, तब $x^3 - \frac{1}{x^3}$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $x^8 - 34x^4 + 1 = 0$

$\Rightarrow x^4 - 34 + \frac{1}{x^4} = 0 \Rightarrow x^4 + \frac{1}{x^4} = 34$

$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = \sqrt{34+2} = 6$

$x - \frac{1}{x} = \sqrt{6-2} = 2$

$\therefore x^3 - \frac{1}{x^3} = 2^3 + 3 \times 2 = 14$

(D) ब्रिंजिंग (Bridging) अवधारणा

$$\boxed{x \pm \frac{1}{x} = n}$$

यदि $x + \frac{1}{x} = n$, तब

- $x - \frac{1}{x} = \pm\sqrt{n^2 - 4}$
- $x^2 - \frac{1}{x^2} = \pm n\sqrt{n^2 - 4}$

यदि $x - \frac{1}{x} = n$, तब

- $x + \frac{1}{x} = \pm\sqrt{n^2 + 4}$
- $x^2 - \frac{1}{x^2} = \pm n\sqrt{n^2 + 4}$

Ex. यदि $x + \frac{1}{x} = 3$, तब

HINTS

- $x - \frac{1}{x} = \pm\sqrt{3^2 - 4} = \pm\sqrt{5}$
- $x^2 - \frac{1}{x^2} = 3 \times (\pm\sqrt{5}) = \pm 3\sqrt{5}$

Ex. यदि $x - \frac{1}{x} = 3$, तब

HINTS

- $x + \frac{1}{x} = \pm\sqrt{3^2 + 4} = \pm\sqrt{13}$
- $x^2 - \frac{1}{x^2} = 3 \times (\pm\sqrt{13}) = \pm 3\sqrt{13}$

Ex. यदि $x + \frac{1}{x} = -14$, और $x < -1$ है, तब $x^2 - \frac{1}{x^2}$ का मान ज्ञात करें

HINTS $x + \frac{1}{x} = -14$

- $x - \frac{1}{x} = \sqrt{(-14)^2 - 4} = \sqrt{192} = \pm 8\sqrt{3}$

$x + \frac{1}{x}$ या $x - \frac{1}{x} = \pm n$ दो मान देता है।

- x की सीमा के आधार पर चिह्न चुनें।
- यदि $x < -1$, तो मान ऋणात्मक है।

यहाँ, $-8\sqrt{3}$ हम लेते हैं क्योंकि $x < -1$,

$x^2 - \frac{1}{x^2} = (-14) \times (-8\sqrt{3}) = 112\sqrt{3}$

सामान्य रूप :-

- यदि $x^m + \frac{1}{x^m} = a$, तब $x^m - \frac{1}{x^m} = \pm\sqrt{a^2 - 4}$
- यदि $x^m - \frac{1}{x^m} = a$, तब $x^m + \frac{1}{x^m} = \pm\sqrt{a^2 + 4}$

Ex. यदि $x^3 + \frac{1}{x^3} = 18$ है, तब $x^3 - \frac{1}{x^3}$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $x^3 - \frac{1}{x^3} = \sqrt{18^2 - 4} = \sqrt{324 - 4} = \sqrt{320} = 8\sqrt{5}$

Ex. यदि $x^5 - \frac{1}{x^5} = 82$ है, तब $x^5 + \frac{1}{x^5}$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $x^5 + \frac{1}{x^5} = \sqrt{82^2 + 4} = \sqrt{6724 + 4} = \sqrt{6728} = 58\sqrt{2}$

Ex. यदि $x > 1$ और $x^2 + \frac{1}{x^2} = 2\sqrt{5}$ है, तब $x^4 - \frac{1}{x^4}$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $x^2 + \frac{1}{x^2} = 2\sqrt{5}$

$x^2 - \frac{1}{x^2} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - 4} = 4$

$\therefore x^4 - \frac{1}{x^4} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) = 2\sqrt{5} \times 4 = 8\sqrt{5}$

Ex. यदि $\left(x + \frac{1}{x}\right) = 2\sqrt{2}$ और $x > 1$ है, तब $\left(x^6 - \frac{1}{x^6}\right)$ का मान ज्ञात करें।

HINTS दिया है,

$x + \frac{1}{x} = 2\sqrt{2}$

$x - \frac{1}{x} = \sqrt{8 - 4} = 2$

$\Rightarrow x^3 - \frac{1}{x^3} = 2^3 + 3 \times 2 = 14$

$\Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = (2\sqrt{2})^3 - 3 \times 2\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$

$\Rightarrow x^6 - \frac{1}{x^6} = (x^3 - \frac{1}{x^3})(x^3 + \frac{1}{x^3})$

$= 14 \times 10\sqrt{2} = 140\sqrt{2}$

Ex. यदि $\left(x - \frac{1}{x}\right) = \sqrt{6}$, और $x > 1$ है, तब $\left(x^8 - \frac{1}{x^8}\right)$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $\left(x - \frac{1}{x}\right) = \sqrt{6}$

$x + \frac{1}{x} = \sqrt{6 + 4} = \sqrt{10}$

$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = (\sqrt{10})^2 - 2 = 8$

$\Rightarrow x^4 + \frac{1}{x^4} = 8^2 - 2 = 62$

$\Rightarrow x^4 - \frac{1}{x^4} = \sqrt{3844 - 4} = \sqrt{3840}$

$\therefore x^8 - \frac{1}{x^8} = \left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)\left(x^4 - \frac{1}{x^4}\right) = 62\sqrt{3840} = 992\sqrt{15}$

(E) असमान गुणांक

$$ax \pm \frac{b}{x} = k$$

यदि $ax + \frac{b}{x} = k$, तब

- $ax - \frac{b}{x} = \pm\sqrt{k^2 - 4ab}$
- $a^2x^2 + \frac{b^2}{x^2} = k^2 - 2ab$
- $a^3x^3 + \frac{b^3}{x^3} = k^3 - 3kab$

यदि $ax - \frac{b}{x} = k$, तब

- $ax + \frac{b}{x} = \pm\sqrt{k^2 + 4ab}$
- $a^2x^2 + \frac{b^2}{x^2} = k^2 + 2ab$
- $a^3x^3 - \frac{b^3}{x^3} = k^3 + 3kab$

Ex. यदि $\left(5a + \frac{4}{a} - 2\right) = 13$ और $a > 0$, तब

HINTS $5a + \frac{4}{a} - 2 = 13$

$\Rightarrow 5a + \frac{4}{a} = 15$

- $5a - \frac{4}{a} = \pm\sqrt{15^2 - 4 \times 5 \times 4} = \pm\sqrt{225 - 80} = \pm\sqrt{145}$
- $25a^2 + \frac{16}{a^2} = 225 - 2 \times 5 \times 4 = 225 - 40 = 185$
- $125a^3 + \frac{64}{a^3} = 3375 - 3 \times 15 \times 5 \times 4 = 3375 - 900 = 2475$

Ex. यदि $\left(5a - \frac{4}{a}\right) = 13$ और $a > 0$, तब

HINTS $5a - \frac{4}{a} = 13$

- $5a + \frac{4}{a} = \pm\sqrt{13^2 + 4 \times 5 \times 4} = \pm\sqrt{169 + 80} = \pm\sqrt{249}$
- $25a^2 + \frac{16}{a^2} = 169 + 2 \times 5 \times 4 = 169 + 40 = 209$
- $125a^3 + \frac{64}{a^3} = (13)^3 + 3 \times 13 \times 5 \times 4 = 2197 + 780 = 2977$

(F) विषेश स्थिति

- यदि $x + \frac{1}{x} = 2$, तब $x = 1$
- यदि $x + \frac{1}{x} = -2$, तब $x = -1$
- यदि $x + \frac{1}{x} = 1$, तब $x^3 = -1$
- यदि $x + \frac{1}{x} = -1$, तब $x^3 = 1$
- यदि $x + \frac{1}{x} = \pm\sqrt{2}$, तब $x^2 + \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x^4 = -1$
- यदि $x + \frac{1}{x} = \pm\sqrt{3}$, तब $x^3 + \frac{1}{x^3} = 0 \Rightarrow x^6 = -1$

Ex. यदि $x + \frac{1}{x} = 2$ है, तब $x^{121} + \frac{1}{x^{121}}$ का मान ज्ञात करें।

HINTS हम जानते है कि, यदि $x + \frac{1}{x} = 2$ तब $x = 1$

$\therefore x^{121} + \frac{1}{x^{121}} = 1 + 1 = 2$

Ex. यदि $x + \frac{1}{x+2} = -4$ है, तब $(x+2)^{231} + \frac{1}{(x+2)^{231}}$ का मान ज्ञात करें।

HINTS दिया है, $x + \frac{1}{x+2} = -4$

$\Rightarrow (x + 2) + \frac{1}{(x+2)} = -2 \Rightarrow x + 2 = -1$

$\therefore (x + 2)^{231} + \frac{1}{(x+2)^{231}} = (-1)^{231} + \frac{1}{(-1)^{231}}$

$= -1 - 1 = -2$

Ex. यदि $\frac{r}{13} + \frac{13}{r} = 1$ है, तब r^3 का मान ज्ञात करें।

HINTS $\frac{r}{13} + \frac{13}{r} = 1$ माना, $x = \frac{r}{13}$

यदि, $x + \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow x^3 = -1 \Rightarrow \left(\frac{r}{13}\right)^3 = -1 \Rightarrow r^3 = -2197$

Ex. यदि $x + \frac{1}{x} = -1$ है, तब $x^{51} + x^{45} + x^{21} + x^{15} + x^3 + 4$ का मान ज्ञात करें।

HINTS हम जानते हैं कि, यदि $x + \frac{1}{x} = -1$ तब $x^3 = 1$

$\therefore x^{51} + x^{45} + x^{21} + x^{15} + x^3 + 4$
$= (x^3)^{17} + (x^3)^{15} + (x^3)^7 + (x^3)^5 + x^3 + 4$
$= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 4 = 9$

Ex. यदि $x + \frac{1}{x} = \sqrt{2}$ है, तब $x^{96} + x^{100} + x^{112} + x^{116} + x^4 + 3$ का मान ज्ञात करें।

HINTS यदि $x + \frac{1}{x} = \sqrt{2}$ तो $x^4 = -1$

$\therefore x^{96} + x^{100} + x^{112} + x^{116} + x^4 + 3$

$= x^{96}(x^4 + 1) + x^{112}(x^4 + 1) + x^4 + 3$

$= 0 + 0 + (-1) + 3 = 2$

Ex. यदि $x + \frac{1}{x} = \sqrt{3}$ है, तब $x^{1012} + x^{1006} + x^{506} + x^{500} + x^{400} + x^{406} + x^{206} + x^{200} + x^6 + 5$ का मान ज्ञात करें।

HINTS हम जानते हैं कि, $x + \frac{1}{x} = \sqrt{3}$ तब $x^6 + 1 = 0$ या $x^6 = -1$.

$\therefore x^{1012} + x^{1006} + x^{506} + x^{500} + x^{400} + x^{406} + x^{206} + x^{200} + x^6 + 5$

$= x^{1006}(x^6 + 1) + x^{500}(x^6 + 1) + x^{400}(x^6 + 1) + x^{200}(x^6 + 1) + x^6 + 5 = -1 + 5 = 4$

(G) विविध अवधारणा

☞ यदि $x = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$ तब, $x + \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{2(a + b)}{(a - b)}$

Ex. यदि $x = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{4}}{\sqrt{5} + \sqrt{4}}$ या $y = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{4}}{\sqrt{5} - \sqrt{4}}$ है, तो $\frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + xy + y^2}$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $xy = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{4}}{\sqrt{5} + \sqrt{4}} \times \frac{\sqrt{5} + \sqrt{4}}{\sqrt{5} - \sqrt{4}} = 1$

जब दो संख्याएँ x और y व्युत्क्रमानुपाती हो तब,

$x + y = \frac{2(a + b)}{(a - b)} = \frac{2(5 + 4)}{(5 - 4)} = 18$

$x^2 + y^2 = 18^2 - 2 = 322$

$\therefore \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + xy + y^2} = \frac{322 - 1}{322 + 1} = \frac{321}{323}$

Ex. यदि $x^2 - 11x + 1 = 0$, है, तब $x^8 - 14159x^4 + 11$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $x^2 - 11x + 1 = 0$

$\Rightarrow x + \frac{1}{x} = 11$

$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 121 - 2 = 119$

$\Rightarrow x^4 + \frac{1}{x^4} = 119^2 - 2 = 14161 - 2$

$\Rightarrow x^4 + \frac{1}{x^4} = 14159 \Rightarrow x^8 + 1 = 14159x^4$

$\Rightarrow x^8 - 14159x^4 = -1$

$\therefore x^8 - 14159x^4 + 11 = -1 + 11 = 10$

Ex. यदि $x(x - 5) = -1$ है, तब $x^3(x^3 - 110)$ का मान ज्ञात करें।

HINTS दिया है, $x(x - 5) = -1$

$\Rightarrow x - 5 = \frac{-1}{x} \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 5$

$\Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = 5^3 - 3 \times 5$

$\Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = 110 \Rightarrow x^6 + 1 = 110x^3$

$\Rightarrow x^6 - 110x^3 = -1$

$\therefore x^3(x^3 - 110) = -1$

Ex. यदि $8k^6 + 15k^3 - 2 = 0$ है, तब $\left(k + \frac{1}{k}\right)$ का धनात्मक मान ज्ञात करें।

HINTS माना, $k^3 = x$

इसलिए,

$8x^2 + 15x - 2 = 0$

$\Rightarrow 8x^2 + 16x - x - 2 = 0$

$\Rightarrow 8x(x + 2) - 1(x + 2) = 0$

$\Rightarrow (8x - 1)(x + 2) = 0$

$\Rightarrow 8x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{8}$

or $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

[यह ऋणात्मक मान के कारण संभव नहीं है।]

अब,

$k^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow k = \frac{1}{2}$

$\therefore (k + \frac{1}{k}) = (\frac{1}{2} + 2) = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$

Ex. यदि $x^2 + 6x + 1 = 0$ है, तब $(x + 6)^3 + \frac{1}{(x+6)^3}$ का मान ज्ञात करें।

HINTS माना, $x + 6 = t \Rightarrow x = t - 6$

$x^2 + 6x + 1 = 0$

$\Rightarrow (t - 6)^2 + 6(t - 6) + 1 = 0$

$\Rightarrow t^2 + 36 - 12t + 6t - 36 + 1 = 0$

$\Rightarrow t^2 - 6t + 1 = 0 \Rightarrow t + \frac{1}{t} = 6$

$t^3 + \frac{1}{t^3} = 6^3 - 3 \times 6 = 198$

$\therefore (x + 6)^3 + \frac{1}{(x+6)^3} = 198$

वैकल्पिक विधि

$x^2 + 6x + 1 = 0 \Rightarrow x + 6 = \frac{-1}{x} \Rightarrow x + \frac{1}{x} = -6$

$x^3 + \frac{1}{x^3} = -216 + 18 = -198$

$\therefore (x + 6)^3 + \frac{1}{(x+6)^3} = \left(\frac{-1}{x}\right)^3 + (-x)^3 = -\left(\frac{1}{x^3} + x^3\right)$

$= -(-198) = 198$

Ex. यदि $x^2 - 16x + 59 = 0$ है, तब $(x - 6)^2 + \frac{1}{(x-6)^2}$ का मान ज्ञात करें।

HINTS माना $y = x - 6 \Rightarrow x = y + 6$

अब, $(y + 6)^2 - 16(y + 6) + 59 = 0$

$\Rightarrow y^2 + 36 + 12y - 16y - 96 + 59 = 0$

$\Rightarrow y^2 - 4y = 1$

$\Rightarrow y - \frac{1}{y} = 4$

$\Rightarrow y^2 + \frac{1}{y^2} = 18$

$\therefore (x - 6)^2 + \frac{1}{(x-6)^2} = 18$

वर्ग का सूत्र (दो चर)

$(a + b)^2$ = $a^2 + b^2 + 2ab$ = $(a - b)^2 + 4ab$

$(a - b)^2$ = $a^2 + b^2 - 2ab$ = $(a + b)^2 - 4ab$

- $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$
- $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$
- $ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$
- $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$a^4 - b^4$ = $(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$ = $(a^2 + b^2)(a + b)(a - b)$

$a^4 + b^4$ = $(a^2 - b^2)^2 + 2a^2b^2$ = $(a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2$

Ex. $(7x + 4y)^2 + (7x - 4y)^2$ का सरलीकृत मान ज्ञात करें।

HINTS $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$

$(7x + 4y)^2 + (7x - 4y)^2 = 2[(7x)^2 + (4y)^2]$

$= 2(49x^2 + 16y^2)$

$= 98x^2 + 32y^2$

Ex. $\left(\frac{2x+3y}{2}\right)^2 - \left(\frac{2x-3y}{2}\right)^2 = ?$

HINTS $\left(\frac{2x+3y}{2}\right)^2 - \left(\frac{2x-3y}{2}\right)^2 = 2x \times 3y = 6xy$

घन का सूत्र (दो चर)

- $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab\,(a + b)$
- $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab\,(a - b)$
- $(a + b)^3 + (a - b)^3 = 2a^3 + 6ab^2$
- $(a + b)^3 - (a - b)^3 = 2b^3 + 6a^2b$

$a^3 + b^3$:
- $(a + b)\,(a^2 - ab + b^2)$
- $(a + b)[(a + b)^2 - 3ab]$
- $(a + b)^3 - 3ab(a + b)$

$a^3 - b^3$:
- $(a - b)\,(a^2 + ab + b^2)$
- $(a - b)[(a - b)^2 + 3ab]$
- $(a - b)^3 + 3ab(a - b)$

- यदि $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \pm 1$, तो $a^3 \pm b^3 = 0$
- यदि $\frac{1}{a} \pm \frac{1}{b} = \frac{1}{a \pm b}$, तो $a^3 \mp b^3 = 0$
- यदि $ab(a + b) = 1$, तो $\frac{1}{a^3b^3} - a^3 - b^3 = 3$

Ex. यदि $x + y = 1$ है, तब $x^3 + 3xy + y^3$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $x + y = 1$

दोनों तरफ घन करने पर

$x^3 + y^3 + 3xy\,(x + y) = 1^3$

$\Rightarrow x^3 + y^3 + 3xy = 1$

Ex. यदि $a = 999$ है, तब $\sqrt[3]{a(a^2 + 3a + 3) + 1}$ is का मान ज्ञात करें।

HINTS हम जानते हैं कि, $(a + 1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$

यहाँ, $a = 999$

$\therefore \sqrt[3]{a(a^2 + 3a + 3) + 1} = (a + 1) = 999 + 1 = 1000$

Ex. $(x + y)^3 - (x - y)^3 - 6y(x^2 - y^2)$ को सरल करें।

HINTS $(x + y)^3 - (x - y)^3 = 2y^3 + 6x^2y$

$\therefore (x + y)^3 - (x - y)^3 - 6y(x^2 - y^2)$

$= 2y^3 + 6x^2y - 6x^2y + 6y^3 = 8y^3$

Ex. निम्नलिखित व्यंजक को सरल करें।

$$\left(x - \frac{1}{y}\right)^3 + \left(x + \frac{1}{y}\right)^3$$

HINTS $(a + b)^3 + (a - b)^3 = 2a^3 + 6ab^2$

$$\left(x - \frac{1}{y}\right)^3 + \left(x + \frac{1}{y}\right)^3 = 2(x)^3 + 6(x)\left(\frac{1}{y}\right)^2 = 2x^3 + \frac{6x}{y^2}$$

Ex. यदि $(2x - 5y)^3 - (2x + 5y)^3 = y\,[Ax^2 + By^2]$ है, तब $(2A - B)$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $(a - b)^3 - (a + b)^3 = -2b(b^2 + 3a^2)$

$(2x - 5y)^3 - (2x + 5y)^3 = -\,2 \times 5y\,[(5y)^2 + 3 \times (2x)^2]$

$= -\,10y\,(25y^2 + 12x^2) = y\,(-120x^2 - 250y^2)$

$\Rightarrow A = -120,\ B = -250$

$\therefore (2A - B) = 2 \times (-120) + 250 = 10$

Ex. यदि $a + b = 10$ और $ab = 6$ है, तब $a^3 + b^3$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $a + b = 10,\ ab = 6$

$a^3 + b^3 = (a + b)\,\{(a + b)^2 - 3ab\}$

$= 10\,\{(10)^2 - 3 \times 6\} = 10 \times 82$

$= 820$

Ex. यदि $x - y = 25$ और $xy = 444$ है, तब $x^3 - y^3$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $x^3 - y^3 = (x - y)\,[(x - y)^2 + 3xy]$

$= 25\,[25^2 + 3 \times 444]$

$= 25\,[625 + 1332]$

$= 48925$

वर्ग का सूत्र (तीन चर)

- $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$
- $(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2(ab - bc + ca)$
- $(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab - bc - ca)$
- $(a + b + c)^2 + (a - b - c)^2 = 2\,[a^2 + (b + c)^2]$
- $(a + b + c)^2 - (a - b - c)^2 = 4a\,(b + c)$
- $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 2\,(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$

Ex. यदि $a + b + c = 10$ और $ab + bc + ca = 30$ है, तब $a^2 + b^2 + c^2$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2\,(ab + bc + ca)$

$= (10)^2 - 2(30) = 40$

Ex. यदि $x + y + z = 13$, $x^2 + y^2 + z^2 = 91$ और $xz = y^2$, तब z और x के बीच अंतर ज्ञात करें।

HINTS $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$

$\Rightarrow 169 = 91 + 2(xy + yz + y^2)$

$\Rightarrow 78 = 2y(x + z + y)$

$\Rightarrow 39 = y \times 13 \Rightarrow y = 3$

$(z - x)^2 = x^2 + z^2 - 2xz$

$\Rightarrow (z - x)^2 = 82 - 2 \times 9$

$\Rightarrow (z - x)^2 = 64 \Rightarrow z - x = 8$

वैकल्पिक विधि

$x = 1,\ y = 3$ और $z = 9$ रखने पर सभी समीकरणों को संतुष्ट करता है

$\therefore z - x = 9 - 1 = 8$

Ex. यदि $a + b + c = 10$ और $a^2 + b^2 + c^2 = 38$ है, तब $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $ab + bc + ca = \frac{(a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}{2}$

$= \frac{100 - 38}{2} = \frac{62}{2} = 31$

$\therefore (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 2(38 - 31) = 14$

वैकल्पिक विधि

$a = 5,\ b = 3$ और $c = 2$ रखने पर सभी समीकरणों को संतुष्ट करता है

$\therefore (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 2^2 + 1^2 + (-3)^2 = 4 + 1 + 9 = 14$

घन का सूत्र (तीन चर)

$a^3+b^3+c^3-3abc$

- **F-1** $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
- **F-2** $(a+b+c)[(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)]$
- **F-3** $\frac{1}{2}(a+b+c)[3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2]$
- **F-4** $\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$

Ex. यदि $a + b + c = 6$, $a^2 + b^2 + c^2 = 14$ और $ab + bc + ca = 11$ है, तब $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $a + b + c = 6$, $a^2 + b^2 + c^2 = 14$,

$ab + bc + ca = 11$

$\therefore a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 6(14 - 11) = 6 \times 3 = 18$

Ex. यदि $x + y + z = 7$ और $xy + yz + zx = 8$ है, तब $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 7(49 - 3 \times 8)$

$= 7(49 - 24) = 7 \times 25 = 175$

Ex. यदि $a + b + c = 6$, $a^2 + b^2 + c^2 = 32$ और $a^3 + b^3 + c^3 = 189$ है, तब $abc - 3$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

$= \frac{(a+b+c)}{2}[3(a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c)^2]$

$\Rightarrow 189 - 3abc = 3[3 \times 32 - 36]$

$\Rightarrow 189 - 3abc = 3 \times 60 \Rightarrow abc = 3$

$\therefore abc - 3 = 3 - 3 = 0$

Ex. यदि $x = 32$, $y = 33$ और $z = 35$ है, तब $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $x - y = -1$, $y - z = -2$, $z - x = 3$

$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{100}{2}(1 + 4 + 9) = 700$

विशेष स्थिति

स्थिति-I	स्थिति-II	स्थिति-III	स्थिति-IV
यदि $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$ $a + b + c = 0$ (जब, a, b, c भिन्न पूर्णांक हों) $a = b = c$ (जब, a, b, c समान पूर्णांक हों)	यदि a, b और c समांतर श्रेणी में हैं और सार्व अंतर d है तब, $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 9bd^2$ जहाँ b मध्य पद है।	यदि a, b और c समांतर श्रेणी में हैं और सार्व अंतर d है, तब, $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 3d^2$	यदि दो संख्याएँ बराबर हैं और तीसरी संख्या उन संख्याओं में से एक अधिक है तो, $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = a + b + c$

Ex. यदि $(3x + 1)^3 + (x - 3)^3 + (4 - 2x)^3 + 6(3x + 1)(x - 3)(x - 2) = 0$ है, तब x का मान ज्ञात करें।

HINTS यदि $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$ तब $a + b + c = 0$

$\Rightarrow 3x + 1 + x - 3 + 4 - 2x = 0$

$\Rightarrow 2x + 2 = 0$

$\Rightarrow x = -1$

Ex. यदि $(4x - 3)^3 + (2x + 5)^3 + (5x - 7)^3 = (4x - 3)(6x + 15)(5x - 7)$ और $x \neq \frac{5}{11}$ है, तब x का मान ज्ञात करें।

HINTS **स्थिति 1 :-** यदि $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$ तब $a + b + c = 0$

$\Rightarrow 4x - 3 + 2x + 5 + 5x - 7 = 0$

$\Rightarrow 11x - 5 = 0$

$\Rightarrow x = \frac{5}{11}$ (यह संभव नहीं है)

स्थिति 2 :- यदि $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$ तब $a = b = c$

$\Rightarrow 4x - 3 = 2x + 5$

$\Rightarrow 2x = 8$

$\Rightarrow x = 4$

Ex. यदि $a = 199$, $b = 200$, $c = 201$ है, तब $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ का मान ज्ञात करें।

HINTS यहाँ, $a = 199$ $b = 200$ और $c = 201$ तथा a, b, c समांतर श्रेणी में हैं।

सार्व अंतर (d) $= 200 - 199 = 1$,

$b = 200$

$\therefore a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 9bd^2 = 9 \times 200 \times 1 = 1800$

Ex. यदि $a = 2001$, $b = 2002$ और $c = 2003$ है, तब $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$ का मान ज्ञात करें।

HINTS यहाँ, $a = 2001$, $b = 2002$ और $c = 2003$ तथा a, b और c समांतर श्रेणी में हैं।

सार्व अंतर (d) $= 2002 - 2001 = 1$

$\therefore a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 3d^2$

$= 3 \times (1)^2 = 3$

Ex. यदि $a = b = 336$ और $c = 337$ है, तब $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $a = b = 336$ और $c = 337$

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = a + b + c$

$= 336 + 336 + 337 = 1009$

पूर्ण वर्ग की अवधारणा

यदि $x + y = 0$ है तब या तो x या y ऋणात्मक होना चाहिए लेकिन यदि $x^2 + y^2 = 0$ है तो x और y दोनों 0 होने चाहिए क्योंकि न तो x और न ही y ऋणात्मक हो सकते हैं।

(i) यदि $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ तो $x = y = z = 0$

(ii) यदि $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = 0$

तब $x - a = 0 \Rightarrow x = a$

$y - b = 0 \Rightarrow y = b$

$z - c = 0 \Rightarrow z = c$

जब n पदों के वर्गों का योग शून्य के बराबर होता है तब प्रत्येक पद स्वयं भी शून्य होता है:-

यदि $(x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + (x - a_3)^2 + ... (x - a_n)^2 = 0$

तो, $x - a_1 = 0,\ x - a_2 = 0 .... x - a_n = 0$

Ex. यदि $(a - 18)^2 + (b - 12)^2 + (c - 6)^2 = 0$ है, तब $(a + b + c)^{1/2}$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $(a - 18)^2 + (b - 12)^2 + (c - 6)^2 = 0$

$\Rightarrow a = 18$; $b = 12$; $c = 6$

$\therefore (a + b + c)^{1/2} = (36)^{1/2} = \pm 6$

Ex. यदि $(a + b - 2)^2 + (b + c - 5)^2 + (c + a - 5)^2 = 0$ है, तब $\sqrt{(b+c)^a + (c+a)^b - 1}$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $(a + b - 2)^2 + (b + c - 5)^2 + (c + a - 5)^2 = 0$

$a + b = 2$ ......(i)

$b + c = 5$ ......(ii)

$c + a = 5$ .....(iii)

समीकरण (i), (ii) और (iii) को जोड़ने पर

$\therefore 2(a + b + c) = 12$

$\Rightarrow a + b + c = 6$ ......(iv)

$\Rightarrow a = 1, b = 1, c = 4$

$\therefore \sqrt{(b+c)^a + (c+a)^b - 1} = \sqrt{(5)^1 + (5)^1 - 1} = \sqrt{9} = 3$

Ex. यदि $x^2 + 4y^2 + 2x + 1 = 0$ है, तब $x^{39} + y^{36}$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $x^2 + 4y^2 + 2x + 1 = 0$

$\Rightarrow (x + 1)^2 + (2y)^2 = 0$

$\Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

$2y = 0 \Rightarrow y = 0$

$\therefore x^{39} + y^{36} = (-1)^{39} + (0)^{36} = -1$

Ex. यदि $a^2 + b^2 + 49c^2 + 18 = 2(b - 28c - a)$ है, तब $(a + b - 7c)$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $a = \dfrac{a \text{ का गुणांक}}{a^2 \text{ का गुणांक}} = \dfrac{-1}{1} = -1$

$b = \dfrac{b \text{ का गुणांक}}{b^2 \text{ का गुणांक}} = 1$

$c = \dfrac{c \text{ का गुणांक}}{c^2 \text{ का गुणांक}} = \dfrac{-28}{49} = \dfrac{-4}{7}$

$\therefore a + b - 7c = -1 + 1 - 7 \times \left(\dfrac{-4}{7}\right) = 4$

मान रखने की अवधारणा पर आधारित

यदि $x + y = 7$ तो $5(x + y)$

x	y
↓	↓
7	0
6	1
5	2
4	3

हम x और y का सही मान ज्ञात नहीं कर सकते है।

लेकिन $5(x + y) = 5 \times 7 = 35$

$\Rightarrow 5(x + y)$ का मान $(x + y)$ पर निर्भर करता है, x और y पर नहीं।

यदि किसी समीकरण में दो चर हैं, तो दोनों चरों के मान ज्ञात करने के लिए दो समीकरणों की आवश्यकता होती है।

- यदि केवल एक समीकरण दिया गया है (जैसे $x + y = 7$), तो हम किसी एक चर का मान निश्चित कर सकते हैं। दूसरा चर अनिश्चित रहेगा और हम अपनी सुविधानुसार उसका मान सकते हैं, बशर्ते वह दी गई शर्त को पूरा करता हो।

ध्यान दें:

(i) जब आप किसी समीकरण में मान रखें, तो ध्यान रखें कि वह समीकरण $\frac{0}{0}$ जैसी **अनिर्धारित स्थिति में न** चला जाये या अनंत या कोई अन्य अनिर्धारित रूप न बन जाये।

(ii) पहले किसी एक चर के लिए 0 लगाने का प्रयास करें। यदि वह काम न करे, तो किसी अन्य चर के लिए 0 लगाने का प्रयास करें।

(iii) यदि 0 रखने से समीकरण संतुष्ट नहीं होता है, तो समीकरण में जो भी उपयुक्त हो, उसके आधार पर +1, –1, –2, –6 आदि जैसे अन्य मानों का प्रयास करें।

(iv) हम जो भी मान मानते हैं वह प्रश्न में दी गई किसी भी शर्त का **उल्लंघन नहीं करना** चाहिए।

- यदि दो/तीन समीकरण दिए गए हैं तो दो/तीन चरों का मान स्थिर होगा तथा शेष सभी चर अनिश्चित होंगे, जिनके मान हम तब तक मान सकते हैं जब तक समीकरण संतुष्ट हों।

Ex. यदि $2a + 2b + c = 0$ है, तब $\dfrac{4a^2 + 4b^2 + 4c^2}{5c^2 - 8ab}$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $a = b = 1$ रखने पर

$\Rightarrow c = -4$

$\therefore \dfrac{4a^2 + 4b^2 + 4c^2}{5c^2 - 8ab} = \dfrac{4 + 4 + 64}{80 - 8} = \dfrac{72}{72} = 1$

Ex. यदि $\alpha + \beta + \gamma = 0$, तो $\dfrac{3\beta^2 + \alpha^2 + \gamma^2}{2\beta^2 - \alpha\gamma} = ?$

HINTS $\alpha = \beta = 1; \gamma = -2$ रखने पर

$\therefore \dfrac{3\beta^2 + \alpha^2 + \gamma^2}{2\beta^2 - \alpha\gamma}$

$= \dfrac{3 \times (1)^2 + (1)^2 + (-2)^2}{2 \times (1)^2 - 1 \times (-2)} = 2$

Ex. यदि $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$ है, तब $\left(\dfrac{17x^4 + 9y^4 + 16z^4}{8x^2y^2 + 6y^2z^2 + 10z^2x^2}\right)$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $x = y = z = 1$ रखने पर

$\therefore \dfrac{17 + 9 + 16}{8 + 6 + 10} = \dfrac{42}{24} = 1.75$

समरूपता की अवधारणा

जब भी किसी व्यंजक में प्रत्येक पद की घात समान हो और वे दिए गए व्यंजक में समान संख्याओं में आते हों, तो समरूपता की अवधारणा लागू करें। अर्थात् प्रत्येक चर/पद को दूसरे के बराबर करें और व्यंजक को सरल करें।

- एक बीजीय व्यंजक अपने चरों में समरूपता होता है, किसी भी चर को आपस में बदलने से व्यंजक में कोई परिवर्तन नहीं होता है।

  यदि $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$, तब $a = b = c$
- दोनों पक्षों में प्रत्येक पद की घात समान होनी चाहिए।

Ex. यदि $a^2 = b + c, b^2 = c + a$ और $c^2 = a + b$ है, तब $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}$ का मान ज्ञात करें।

HINTS जांच करने पर $a^2 = b + c,\ b^2 = c + a,\ c^2 = a + b$ में $a = b = c = 2$ रखते हैं और ये मान समीकरण को संतुष्ट करते हैं।

$$\Rightarrow \frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2}=1$$

Ex. यदि $\frac{x^2}{by+cz}=\frac{y^2}{ax+cz}=\frac{z^2}{ax+by}=1$ है, तब $\frac{x}{x+a}+\frac{y}{y+b}+\frac{z}{z+a}$ का मान ज्ञात करें।

HINTS जांच करने पर $x = y = z = 2$, तथा $a = b = c = 1$ और ये मान समीकरण को संतुष्ट करते हैं।

$x = y = z = 2$ और $a = b = c = 1$ रखने पर

$$\Rightarrow \frac{x}{x+a}+\frac{y}{y+b}+\frac{z}{z+c}$$

$$=\frac{2}{2+1}+\frac{2}{2+1}+\frac{2}{2+1}=2$$

डिग्री की अवधारणा

बीजगणित में, घात बहुपद व्यंजक में चरों की उच्चतम घात (घातांक) को संदर्भित करता है (चर की अधिकतम घात को डिग्री कहते हैं)

मुख्य बिंदुः-

(i) रैखिक बहुपद: $ax + b$(डिग्री $= 1$)

(ii) द्विघात बहुपद: $ax^2 + bx + c$ (डिग्री $= 2$)

(iii) घन बहुपद: $ax^3 + bx^2 + cx + d$ (डिग्री $= 3$)

1. **एकल-चर बहुपद के लिए:** डिग्री उस चर का उच्चतम घातांक है:

Ex. $4x^3 + 2x^2 - x + 7$ में डिग्री 3 है (x^3 की उच्चतम घात के कारण)

2. **बहुचर बहुपद के लिए:** डिग्री किसी भी पद में घातांक का उच्चतम योग है:

$$3x^2y + 2xy^3 + y$$

$$\begin{array}{ccccc} \downarrow\ \downarrow & & \downarrow\ \downarrow & & \downarrow \\ \underbrace{2\ \ 1}_{3} & & \underbrace{1\ \ 3}_{4} & & \underbrace{1}_{1} \end{array}$$

अतः समीकरण की घात 4 है।

Ex. $7x^8 - 9x^5 + 13x^4 + 12x^2 - 37 \rightarrow$ डिग्री $= 8$

3. किसी स्थिरांक (जैसे 5 या -2) की घात 0 होती है, तथा शून्य बहुपद (केवल 0) की घात अपरिभाषित होती है, या कभी-कभी संदर्भ के आधार पर ऋणात्मक अनंत के रूप में परिभाषित होती है।

- यदि चर गुणज में है तो घात जोड़ी जाएगी।

Ex. $a^1b^1 + bc + ca \Rightarrow$ डिग्री $(a^1b^1) = 1+ 1 = 2$

- यदि चर भाग में है तो घात घटा दी जाएगी

Ex. $\frac{b^2}{a^1} \Rightarrow$ डिग्री $= 2 - 1 = 10$

Ex. $\frac{ab+bc+ca}{a-b-c} \Rightarrow \frac{a^1b^1}{a^1}=\frac{2}{1}= 2 - 1 = 1$

- किसी भी समरूप व्यंजक में प्रश्न की डिग्री उत्तर की डिग्री के बराबर होनी चाहिए।

Ex. $\frac{a(b-c)^2}{(c-a)(a-b)}+\frac{b(c-a)^2}{(a-b)(b-c)}+\frac{c(a-b)^2}{(b-c)(c-a)}$ में डिग्री है____.

HINTS यहाँ,

$(b - c)^2$ डिग्री है $= 2$

$a (b - c)^2$ डिग्री है $= 2 + 1 = 3$

तथा,

$(c - a)$ डिग्री है $= 1$

$(a - b)$ डिग्री है $= 1$

इसलिए, $(c - a)\ (a - b)$ डिग्री है $= 1 + 1 = 2$

इसलिए,

$\frac{a(b-c)^2}{(c-a)(a-b)}$ डिग्री है $= 3 - 2 = 1$

Ex. $\frac{\{(m^2+n^2)(m-n)-(m-n)^3\}}{(m^2n-mn^2)}$ का मान ज्ञात करें।

(a) $m + n$ (b) $m - n$
(c) 2 (d) mn

HINTS यहाँ, बहुपद की डिग्री $= \frac{2+1}{2+1} = \frac{3}{3} = 3 - 3 = 0$

अतः बहुपद का मान भी 0 डिग्री का होगा अर्थात् मान स्थिर रहेगा।

चूँकि केवल विकल्प (c) में स्थिर मान है।

$\therefore$ विकल्प (c) सही उत्तर है।

योगान्तरानुपात (कंपोनेंडो और डिविडेंडो नियम)

यदि $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$ तब $\frac{a+b}{a-b} = \frac{x+y}{x-y}$

☞ यदि $x = \frac{2ab}{a+b}$ तब $\frac{x+2a}{x-2a}+\frac{x+2b}{x-2b} = 2$

जहाँ, $\frac{2ab}{2a} = b$ और $\frac{2ab}{2b} = a$

Ex. यदि $x = \frac{4\sqrt{15}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ है, तब $\frac{x+\sqrt{20}}{x-\sqrt{20}}+\frac{x+\sqrt{12}}{x-\sqrt{12}}$ का मान ज्ञात करें।

HINTS ऊपर बताई गई अवधारणा का उपयोग करके, हम व्यंजक का परिणाम 2 प्राप्त करेंगे।

$$\therefore \frac{x+\sqrt{20}}{x-\sqrt{20}}+\frac{x+\sqrt{12}}{x-\sqrt{12}} = 2$$

☞ यदि $\frac{1}{(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}+1)} = A\sqrt[3]{a^2}+B\sqrt[3]{a}+C,$ तब

$A = 0;\ B = \frac{1}{a-1};\ C = \frac{-1}{a-1}$

Ex. यदि $\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1} = a\sqrt[3]{4} + b\sqrt[3]{2} + c$ और a, b, c एक अभाज्य संख्या है, तब a + b + c का मान ज्ञात करें।

HINTS उपरोक्त परिणाम का उपयोग करते हुए, $a = 0, b = 1, c = -1$

अतः , $a + b + c = 0 + 1 - 1 = 0$

सर्वसमिका आधारित बीजगणितीय रूपांतरण

Ex. यदि $a^3 + 3a^2 + 9a = 1$ है, तब $a^3 + \frac{3}{a}$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $a^3 + 3a^2 + 9a = 1$ ......(i) × 3

$3a^3 + 9a^2 + 27a = 3$ ......(ii)

समीकरण (i) में 'a' से गुणा करें,

$a^4 + 3a^3 + 9a^2 = a$ .....(iii)

(ii) को (iii) से घटाएँ,

$a^4 - 27a = a - 3$

$\Rightarrow a^4 + 3 = 28a$

$\Rightarrow a^3 + \frac{3}{a} = 28$

Ex. यदि $a^2 + 3a + 3 = 0$ है, तब $a^3 + 6a^2 + 12a + 10$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $a^2 + 3a + 3 = 0$ .....(i) × a

$a^3 + 3a^2 + 3a = 0$ ....(ii)

समीकरण (i) में '3' से गुणा करें

$3a^2 + 9a + 9 = 3$ ... (iii)

समीकरण (ii) और (ii) को जोड़ें,

$a^3 + 6a^2 + 12a + 9 = 0$

$\therefore a^3 + 6a^2 + 12a + 10 = 1$

Ex. यदि $x^2 + 2 = 2x$, है, तो $x^4 - x^3 + x^2 + 2$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $x^2 - 2x + 2 = 0$ ...... (i) × x

$x^3 - 2x^2 + 2x = 0$ ...... (ii) × x

$x^4 - 2x^3 + 2x^2 = 0$ ...... (iii)

समीकरण (ii) और (iii) को जोड़ने पर,

$x^4 - x^3 + 2x = 0$

$\Rightarrow x^4 - x^3 + x^2 + 2 = 0$

कुछ महत्वपूर्ण सूत्र और परिणाम

सूत्र 1:-

- $1 + A + B + AB = (1 + A)(1 + B)$
- $(a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2) = a^4 + a^2b^2 + b^4$
- $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2$

सूत्र 2:-

$$ab + bc + ca = \frac{a^3(b^2 - c^2) + b^3(c^2 - a^2) + c^3(a^2 - b^2)}{a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)}$$

$$ab + bc + ca = \frac{a^3(b + c)}{(a - b)(a - c)} + \frac{b^3(c + a)}{(b - c)(b - a)} + \frac{c^3(a + b)}{(c - a)(c - b)}$$

सूत्र 3:-

- $\frac{a \times (b - c)^2}{(c - a)(a - b)} + \frac{b \times (c - a)^2}{(a - b)(b - c)} + \frac{c \times (a - b)^2}{(b - c)(c - a)} = a + b + c$
- $(a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2a(b + c + d) + 2b(c + d) + 2cd$
- $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b) = -(b - c)(c - a)(a - b)$
- $a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b) = (a + b + c)(ab + bc + ca) - 3abc$
- $a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2) = (b - c)(c - a)(a - b)$
- $ab(a - b) + bc(b - c) + ca(c - a) = (b - a)(b - c)(c - a)$
- $(b + c)(c + a)(a + b) + abc = (a + b + c)(ab + bc + ca)$
- $(x + a)(x + b)(x + c) = x^3 + x^2(a + b + c) + x(ab + bc + ca) + abc$

Ex. यदि $a^4 + a^2b^2 + b^4 = 24$ और $a^2 + ab + b^2 = 8$ है, तब ab का मान ज्ञात करें।

HINTS $a^2 + ab + b^2 = 8$

$a^4 + a^2b^2 + b^4 = 24$

$\Rightarrow a^2 - ab + b^2 = \frac{24}{8} = 3$

$a^2 - ab + b^2 = 3$ ...(i)

$a^2 + ab + b^2 = 8$ ...(ii)

समीकरण (i) और (ii) घटाने पर

$\Rightarrow -2ab = -5 \Rightarrow ab = 2.5$

Ex. यदि $ax + by = 8$, $ay - bx = 6$ और $a^2 + b^2 + x^2 + y^2 = 29$ है, तब $\frac{a^2+b^2}{x^2+y^2}$; $a^2 + b^2 > x^2 + y^2$ का मान ज्ञात करें।

HINTS $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2 = 8^2 + 6^2$

$= 100$

25 4

$\therefore \frac{a^2+b^2}{x^2+y^2} = \frac{25}{4}$

परिणाम 1:-

यदि $xy + yz + zx = 0$, तो

- $\frac{1}{x^2 - yz} + \frac{1}{y^2 - zx} + \frac{1}{z^2 - xy} = 0$ $(x, y, z) \neq 0$
- $\frac{x^2}{x^2 - yz} + \frac{y^2}{y^2 - zx} + \frac{z^2}{z^2 - xy} = 1$

परिणाम 2:-

- यदि $xy = 1$ या $x = \frac{1}{y}$ तो $\frac{1}{1+x^n} + \frac{1}{1+y^n} = 1$
- यदि $x = a + \frac{1}{a}$ और $y = a - \frac{1}{a}$ तो $\sqrt{x^4 + y^4 - 2x^2y^2} = 4$
- यदि $x \pm \frac{1}{y} = a$, $y \pm \frac{1}{z} = b$, $z \pm \frac{1}{x} = c$ तो, $xyz \pm \frac{1}{xyz} = abc \mp (a + b + c)$
- यदि $(a^2 + 1)(b^2 + 1) + N^2 = 2N(a + b)$ तो $a + \frac{1}{a} = N$
- यदि $a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}$ $(a \neq b \neq c)$ तो abc बराबर है ±1
- यदि $bc + ca + ab = abc$, तो $\frac{b+c}{bc(a-1)} + \frac{c+a}{ca(b-1)} + \frac{a+b}{ab(c-1)} = 1$
- यदि $x^2 + y^2 = z + 1$, $y^2 + z^2 = x + 1$, $z^2 + x^2 = y + 1$,
  तो $xyz = 1$ or $-\frac{1}{8}$
- यदि $a + b + c = 2s$, तो $\frac{(s-a)^2 + (s-b)^2 + (s-c)^2 + s^2}{a^2 + b^2 + c^2} = 1$
- यदि $\left[\sqrt{(a^2 + b^2 + ab)} + \sqrt{(a^2 + b^2 - ab)}\right] = 1$ तो $(1 - a^2)(1 - b^2) = \frac{3}{4}$

Ex. यदि $x = \frac{\sqrt{87}-\sqrt{71}}{\sqrt{55}+\sqrt{39}}$ और $y = \frac{\sqrt{87}+\sqrt{71}}{\sqrt{55}-\sqrt{39}}$ तो $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y} = ?$

HINTS यहाँ, $xy = \frac{\sqrt{87}-\sqrt{71}}{\sqrt{55}+\sqrt{39}} \times \frac{\sqrt{87}+\sqrt{71}}{\sqrt{55}-\sqrt{39}} = \frac{87-71}{55-39} = \frac{16}{16} = 1$

$\therefore \frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y} = 1$

Ex. यदि $x(x+y+z) = 9$, $y(x+y+z) = 16$ और $z(x+y+z) = 144$ है, तो x का मान ज्ञात करें।

HINTS $x(x+y+z)+y(x+y+z)+z(x+y+z) = 9+16+144$

$\Rightarrow (x+y+z)(x+y+z) = 169 \Rightarrow (x+y+z) = 13$

$\therefore x(x+y+z) = 9$

$\Rightarrow x = \frac{9}{13}$

द्विघात समीकरण

द्विघात समीकरण घात 2 का एक बहुपद समीकरण है।

इसका मानक रूप है:

$ax^2 + bx + c = 0$

जहाँ a, b, c, वास्तविक संख्याएँ हैं, और $a \neq 0$

- चर x के वे मान जो द्विघात समीकरण को संतुष्ट करते हैं, द्विघात समीकरण के मूल कहलाते हैं।

मूलों और गुणांकों के बीच संबंध

☞ यदि α और β समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल हैं

(i) मूलों का योग = $(\alpha+\beta) = \frac{-b}{a} = \frac{-x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

(ii) मूलों का गुणनफल = $(\alpha.\beta) = \frac{c}{a} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

☞ यदि मूल α और β ज्ञात हैं तो समीकरण इस प्रकार दिया गया है $x^2 - (\alpha+\beta)x + (\alpha.\beta) = 0$

☞ यदि a और b परिमेय संख्याएँ हैं और द्विघात समीकरण का एक मूल है $a + \sqrt{b}$ तो अन्य मूल है $(a-\sqrt{b})$ अर्थात (और इसके विपरीत)

Ex. द्विघात समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका एक मूल है $2 + \sqrt{3}$.

HINTS जैसे $\alpha = 2 +$, $\beta = 2 - \sqrt{3}$

मूलों का योग $(\alpha + \beta) = (2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) = 4$

मूलों का गुणनफल $(\alpha . \beta) = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$

सूत्र का उपयोग करने पर

$x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha.\beta = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$

द्विघात समीकरण को हल करने की विधियाँ

गुणनखण्ड
- सबसे सरल विधि
- पारंपरिक रूप से सभी द्विघात समीकरणों पर लागू नहीं होता

पूर्ण वर्ग
- नियतांक को दूसरी ओर ले जाएं
- $x^2 = 1$ का गुणांक बनाएं
- x के गुणांक का आधा लें, उसका वर्ग करें और दोनों पक्षों में जोड़ें
- वर्गमूल निकालें

द्विघात सूत्र
- सूत्र:-

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

- सभी समीकरणों के लिए लागू

(1) गुणनखंडन विधि

Ex. $x^2 - 15x + 56 = 0$

चरण 1: गुणनखंड निकालिए

56 के दो गुणनखंड ज्ञात कीजिए जिनका योग 15 हो। गुणनखंड 8 और 7 हैं क्योंकि $8 \times 7 = 56$ और $8 + 7 = 15$

चरण 2: चिन्ह बदलना

द्विघात समीकरण	धनात्मक/ऋणात्मक मूल
• $ax^2 + bx + c = 0$	x के दोनों मान ऋणात्मक हैं
• $ax^2 - bx + c = 0$	x के दोनों मान धनात्मक हैं
• $ax^2 + bx - c = 0$	x का एक मान –ve है और एक +ve है
• $ax^2 - bx - c = 0$	x का एक मान +ve है और एक –ve है

गुणनखंडों के चिह्न बदलें। अतः, गुणनखंड = 8, 7

चरण 3 : x^2 के गुणांक से विभाजित करें

चूँकि x^2 का गुणांक 1 है, इसलिए 1 से भाग देने पर मान नहीं बदलता।

चरण 4: मूल

द्विघात समीकरण के मूल 8 और 7 हैं।

(2) पूर्ण वर्ग

Ex. $x^2 - 15x + 56 = 0$

HINTS $x^2 - 15x = -56$

$\Rightarrow x^2 - 15x + \left(\frac{15}{2}\right)^2 = -56 + \left(\frac{15}{2}\right)^2$

$\Rightarrow \left(x - \frac{15}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow x - \frac{15}{2} = \pm\frac{1}{2}$

$\Rightarrow x = 8, 7$

(3) द्विघात सूत्र (श्रीधराचार्य सूत्र)

☞ समीकरण के दो मूल $ax^2 + bx + c = 0$ हैं

$= \alpha = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$

$= \beta = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$

Ex. $x^2 - 15x + 56 = 0$

HINTS $D = b^2 - 4ac = 15^2 - 4 \times 1 \times 56 = 1$

$\alpha = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{15+1}{2} = 8$

$= \beta = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{15-1}{2} = 7$

मूलों की प्रकृति

द्विघात समीकरण के मूलों की प्रकृति विभेदक पर निर्भर करती है, जो द्विघात सूत्र में वर्गमूल के अंतर्गत व्यंजक है।

$ax^2 + bx + c = 0$

विभेदक (D) = $b^2 - 4ac$

मूल की प्रकृति

- **यदि D = 0** → मूल वास्तविक और समान हैं
- **यदि D > 0**
  - D = पूर्ण वर्ग → मूल, वास्तविक, असमान और परिमेय हैं
  - D = पूर्ण वर्ग नहीं → मूल, वास्तविक, असमान और अपरिमेय हैं
- **यदि D < 0** → मूल काल्पनिक हैं

Ex. m के किस मान के लिए समीकरण $4x^2 + 6mx + 9 = 0$ के मूल समान हैं।

HINTS द्विघात समीकरण का मानक रूप

$ax^2 + bx + c = 0$ और $4x^2 + 6mx + 9 = 0$

मानक समीकरण की तुलना करने पर हमें मिलता है।

$a = 4,\ b = 6m$ और $c = 9$

यदि मूल समान हैं $\Rightarrow b^2 - 4ac = 0$

$\Rightarrow 36m^2 = 144 \Rightarrow m = \pm 2$

Ex. यदि $x^2 - 5x + 6 = 0$, मूलों की प्रकृति का पता लगाएं।

HINTS $a = 1,\ b = -5,\ c = 6$

$D = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6$

$= 25 - 24 = 1$ (पूर्ण वर्ग)

अतः, मूल वास्तविक, परिमेय और भिन्न हैं।

Ex. यदि $\sqrt{2}\,t^2 - 3t + 3\sqrt{2} = 0$, मूलों की प्रकृति का पता लगाएं।

HINTS यहाँ, $a = \sqrt{2}$, $b = -3$, $c = 3$

$D = b^2 - 4ac = 9 - 24 = -15$

$D < 0$

$\therefore$ मूल काल्पनिक हैं।

समान मूलों के लिए शर्तें

दो द्विघात समीकरणों पर विचार करें: $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$

$a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$

(i) दोनों समान मूल होने की शर्त :

(ii) एक समान मूल होने की शर्त :

$(a_1b_2 - a_2b_1)(b_1c_2 - b_2c_1) = (c_1a_2 - c_2a_1)^2$

Ex. यदि समीकरण $x^2 + 2x - 3 = 0$ तथा $x^2 + 3x - m = 0$ एक समान मूल है, तो m का गैर-शून्य मान है।

HINTS $(a_1b_2 - a_2b_1)(b_1c_2 - b_2c_1) = (c_1a_2 - c_2a_1)^2$

$\Rightarrow [1 \times 3 - 1 \times 2][2 \times (-m) - 3 \times (-3)] = [(-3) \times 1 - (-m) \times 1]^2$

$\Rightarrow (3 - 2)(-2m + 9) = (-3 + m)^2$

$\Rightarrow -2m + 9 = 9 + m^2 - 6m$

$\Rightarrow m^2 - 4m = 0$

$\Rightarrow m(m - 4) = 0$

$\Rightarrow m = 4\ (\because m \neq 0)$

त्रिघात समीकरण

- यदि α, β और γ घन समीकरण के मूल हैं।

  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

  तो,

  मूलों का योग $(\alpha + \beta + \gamma) = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{x^2 \text{ का गुणांक}}{x^3 \text{ का गुणांक}}$

  दो मूलों के गुणनफल का योग $(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = \dfrac{c}{a} = \dfrac{x \text{ का गुणांक}}{x^3 \text{ का गुणांक}}$

  मूलों का गुणनफल $(\alpha\beta\gamma) = -\dfrac{d}{a} = -\dfrac{\text{अचर पद}}{x^3 \text{ का गुणांक}}$

- यदि α, β और γ घन समीकरण के मूल हैं, तो समीकरण है:

  $x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma = 0$

गुणनखंड सूत्र

- $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$
- $(x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab$
- $(x - a)(x + b) = x^2 - (a - b)x - ab$
- $(x + a)(x - b) = x^2 + (a - b)x - ab$

द्विघात समीकरण गुणनखंड और शेषफल प्रमेय

☞ $(x + k)$ एक बहुपद $f(x)$ का गुणनखंड है तो $f(-k) = 0$

☞ $(ax + k)$ एक बहुपद $f(x)$ का गुणनखंड है तो $f\left(-\dfrac{k}{a}\right) = 0$

☞ $(ax - k)$ एक बहुपद $f(x)$ का गुणनखंड है तो $f\left(\dfrac{k}{a}\right) = 0$

☞ $(x - a)(x - b)$ एक बहुपद $f(x)$ का गुणनखंड है तो $f(a) = 0$ और $f(b) = 0$

☞ यदि एक बहुपद $f(x)$ को $(x + k)$ से विभाजित किया जाता है, तो शेषफल $x = -k$ पर $f(x)$ का मान होता है अर्थात $f(-k)$

☞ यदि एक बहुपद $f(x)$ को $(k - ax)$ से विभाजित किया जाता है तो शेषफल $x = \dfrac{k}{a}$ पर $f(x)$ का मान होता है अर्थात $f\left(\dfrac{k}{a}\right)$

Ex. यदि $2x^2 + kx + 8$ को $(x + 2)$ से विभाजित किया जाता है तो शेषफल 3k आता है, तो k का मान ज्ञात करें।

HINTS $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

$R = 2(-2)^2 + (-2)k + 8 = 8 - 2k + 8 = 16 - 2k$

$\Rightarrow 3k = 16 - 2k \Rightarrow 5k = 16 \Rightarrow k = \dfrac{16}{5}$

Ex. जब $3x^4 - 2x^2 + 4x - 1$ को $2x - 1$ से विभाजित करते हैं, तो शेषफल ज्ञात कीजिए।

HINTS शेषफल ज्ञात करने के लिए $2x - 1$ रखने पर $= 2x - 1 = 0$

$\Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$

शेषफल $= 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^4 - 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + 4\left(\dfrac{1}{2}\right) - 1$

$= \dfrac{3}{16} - \dfrac{1}{2} + 2 - 1 = \dfrac{3}{16} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{11}{16}$

Ex. जब $f(x) = 15x^3 - 14x^2 - 4x + 10$ को $(3x + 2)$ से विभाजित किया जाता है, तो शेषफल है:

HINTS $f(x) = 15x^3 - 14x^2 - 4x + 10$

$3x + 2 = 0 \Rightarrow 3x = -2$

$R = 3x \times 5x^2 - 14x^2 - 4x + 10$

$= -2 \times 5x^2 - 14x^2 - 4x + 10$

$= -24x^2 - 4x + 10$

$= -3x \times 8x - 4x + 10$

$= 16x - 4x + 10 = 12x + 10$

$= 3x \times 4 + 10 = -2 \times 4 + 10 = 2$

बीजगणित में अधिकतम और न्यूनतम मानों की अवधारणा

अवधारणा-01

	अधिकतम मान	न्यूनतम मान
विषम घात (x)	$+\infty$	$-\infty$
सम घात (x^2)	$+\infty$	0

Ex. (i)

$18 + x^2$ → अधिकतम $\rightarrow +\infty$

$18 + x^2$ → न्यूनतम $\rightarrow 0$

$(18 + x^2)$ का न्यूनतम मान $= 18 + 0 = 18$

$(18 + x^2)$ का अधिकतम मान $= 18 + \infty = \infty$

(ii)

$18 + x^3$ → अधिकतम $\rightarrow +\infty$

$18 + x^3$ → न्यूनतम $\rightarrow -\infty$

$(18 + x^3)$ का न्यूनतम मान $= 18 - \infty = -\infty$

$(18 + x^3)$ का अधिकतम मान $= 18 + \infty = \infty$

अवधारणा-02

द्विघात समीकरण में $ax^2 + bx + c = 0$

- यदि $a > 0$, तो द्विघात समीकरण का मान $x = \frac{-b}{2a}$ पर न्यूनतम होगा। यह न्यूनतम मान द्वारा $\frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{-D}{4a}$ दिया गया है लेकिन सबसे बड़ा मान नहीं है।
- यदि $a < 0$, तो द्विघात समीकरण का मान $x = \frac{-b}{2a}$ पर अधिकतम होगा। यह अधिकतम मान द्वारा $\frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{-D}{4a}$ दिया गया है लेकिन इसका कोई न्यूनतम मान नहीं है।

Ex. $f(x) = x^2 - 4x + 3$

HINTS यहाँ, $a > 0$,

$a = 1, b = -4, c = 3$

न्यूनतम मान $= \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 \times 3 \times 1 - (-4)^2}{4 \times 1} = -1$

Ex. $f(x) = -2x^2 + 8x + 1$

HINTS यहाँ, $a < 0$,

$a = -2, b = 8, c = 1$

अधिकतम मान $= \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 \times (-2) \times 1 - 8^2}{4 \times (-2)} = 9$

अवधारणा-03

यदि a, b +ve संख्याएँ हैं तो,

AM ≥ GM

$\Rightarrow \frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}$, $(a, b > 0) \Rightarrow (a + b) \geq 2\sqrt{ab}$

Ex. यदि x एक वास्तविक संख्या है, तो $x^2 + \frac{1}{x^2} = ?$ का न्यूनतम मान क्या होगा?

HINTS माना, $a = x^2$, $b = \frac{1}{x^2}$

AM ≥ GM $\Rightarrow \frac{x^2 + \frac{1}{x^2}}{2} \geq \sqrt{x^2 \times \frac{1}{x^2}} \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2$

समानता तब होती है जब, $x^2 = \frac{1}{x^2} \Rightarrow x^4 = 1$

चूँकि x वास्तविक है, $x = 1$ या $x = -1$

इन मानों के लिए, $x^2 + \frac{1}{x^2} = (1)^2 + \frac{1}{(1)^2} = 2$

$x^2 + \frac{1}{x^2} = (-1)^2 + \frac{1}{(1)^2} = 2$

> यदि a +ve संख्या है, तो $a + \frac{1}{a} \geq 2 \rightarrow$ न्यूनतम

यदि a वास्तविक संख्या है तो , तो $a^2 + \frac{1}{a^2} \geq 2 \rightarrow$ न्यूनतम

अधिकतम मान $\rightarrow \infty$

अवधारणा-04

यदि $x + y = a$, तो $x \times y$ का मान $x = y$ पर अधिकतम होगा, **'या'**

> यदि $a + b + c$ ......(n संख्या) = k
>
> तो, अधिकतम मान $(abc) = \left(\frac{k}{n}\right)^n$

Ex. यदि $x + y = 100$, xy का अधिकतम मान क्या है ?

HINTS $x + y = 100$

$\Rightarrow x = y = 50$

$\therefore xy = 50 \times 50 = 2500$

अवधारणा - 05

यदि abc = k, तो a + b + c का न्यूनतम मान तभी संभव है जब a = b = c, 'या'

> यदि abc ......(n संख्या) = k
>
> तो न्यूनतम (a + b + c + ...)
>
> $= n\sqrt[n]{k}$

Ex. यदि a, b, c +ve हैं और abc = 125 है, तब a + b + c का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए।

HINTS abc = 125

$\Rightarrow a = b = c = 5$

$\therefore a + b + c = 5 + 5 + 5 = 15$

Ex. यदि x, y और z धनात्मक हैं और $x + y + z = 1$ है, तो $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए।

HINTS $x + y + z = 1$

$\Rightarrow x = y = z = \frac{1}{3}$

$\therefore$ न्यूनतम मान $= \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{\frac{1}{3}} + \frac{1}{\frac{1}{3}} + \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3 + 3 + 3 = 9$

अध्याय 13

लाभ और हानि

कुछ सामान्य तथ्य

- **क्रय मूल्य (CP):** वह मूल्य जिस पर हम चीजें खरीदते हैं।
- **विक्रय मूल्य (SP) :** वह मूल्य जिस पर हम चीजें बेचते हैं।
- यदि SP > CP तबः

  लाभ (Profit) = विक्रय मूल्य (SP) – क्रय मूल्य (CP)

- यदि CP > SP तबः

  हानि (Loss) = क्रय मूल्य (CP) - विक्रय मूल्य (SP)

- $\text{लाभ \%} = \left(\frac{\text{लाभ}}{\text{क्रय मूल्य}}\right) \times 100\%$

- $\text{हानि \%} = \left(\frac{\text{हानि}}{\text{क्रय मूल्य}}\right) \times 100\%$

- जब लाभ % दिया गया है तो विक्रय मूल्यः

  $\text{विक्रय मूल्य} = \text{क्रय मूल्य} \times \left(\frac{100 + \text{लाभ \%}}{100}\right)$

- जब हानि % दी गई है तो विक्रय मूल्यः

  $\text{विक्रय मूल्य} = \text{क्रय मूल्य} \times \left(\frac{100 - \text{हानि \%}}{100}\right)$

Ex. एक उत्पाद को ₹20 में खरीदा जाता है और ₹50 में बेचा जाता है। लाभ प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

HINTS लाभ = 50 – 20 = ₹30

$\therefore$ लाभ % = $\frac{30}{20} \times 100\% = 150\%$

Ex. एक मोबाइल फोन का विक्रय मूल्य ₹59,620 है और इसे 8.4% लाभ पर बेचा गया। मोबाइल फोन का क्रय मूल्य (₹ में) ज्ञात कीजिए।

HINTS SP = ₹59,620, P = 8.4%, CP = ?

CP	SP
100	108.4
↓ ×550	↓ ×550
$\boxed{₹55,000}$	₹59,620

$\therefore$ मोबाइल फोन का क्रय मूल्य = ₹55,000

Ex. यदि एक वस्तु को ₹355 में बेचा जाता है, तो 29% की हानि होती है। 31% लाभ प्राप्त करने के लिए इसे किस मूल्य (₹ में) पर बेचा जाना चाहिए?

HINTS माना, वस्तु का क्रय मूल्य = 100 इकाई

SP_1	CP	SP_2
71	100	131
↓ ×5		↓ ×5
₹355		$\boxed{₹655}$

$\therefore$ वस्तु को ₹655 में बेचा जाना चाहिए।

Ex. एक वस्तु को 15% लाभ और 17% हानि पर बेचने पर उसके विक्रय मूल्य में अंतर ₹96 है। यदि इसे 10% लाभ पर बेचा जाए, तो विक्रय मूल्य क्या है?

HINTS माना, वस्तु का क्रय मूल्य = 100 इकाई

SP_1	CP	SP_2
83	100	115

अंतर
32 इकाई

प्रश्नानुसार,

32 इकाई → ₹96

110 इकाई → $\frac{96}{32} \times 110 = \boxed{₹330}$

$\therefore$ विक्रय मूल्य = ₹330

विक्रय मूल्य और क्रय मूल्य के अंतर पर आधारित

Ex. एक वस्तु के क्रय मूल्य और विक्रय मूल्य के बीच का अंतर ₹1,800 है। यदि 20% का लाभ होता है, तो वस्तु का क्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

HINTS 20% = $\frac{1}{5}$ + ⟶ 6→SP, 5→CP

$\because$ (6 – 5) = 1 इकाई → ₹1,800

5 इकाई → ₹9,000

$\therefore$ वस्तु का क्रय मूल्य = ₹9,000

X वस्तुओं का क्रय मूल्य = Y वस्तुओं का विक्रय मूल्य

यदि 'x' वस्तुओं का क्रय मूल्य 'y' वस्तुओं के विक्रय मूल्य के बराबर है, तो विक्रय मूल्य = x, क्रय मूल्य = y

$\text{हानि या लाभ \%} = \frac{x - y}{y} \times 100\%$

Ex. 15 वस्तुओं का क्रय मूल्य 10 वस्तुओं के विक्रय मूल्य के बराबर है। लाभ या हानि प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

HINTS x = 15, y = 10

$\therefore$ लाभ % = $\frac{x - y}{y} \times 100\% = \frac{15 - 10}{10} \times 100\% = 50\%$

वैकल्पिक विधि

$CP \times 15 = SP \times 10 \Rightarrow \frac{CP}{SP} = \frac{2}{3}$ +1

$\therefore$ लाभ % = $\frac{1}{2} \times 100\% = 50\%$

Ex. 44 वस्तुओं का क्रय मूल्य 'x' वस्तुओं के विक्रय मूल्य के बराबर है। यदि लाभ 10% है, तो 'x' का मान क्या है?

HINTS 10% = $\frac{1}{10}$ + ⟶ 11→SP, 10→CP

प्रश्नानुसार,

44CP = xSP

$\Rightarrow \frac{SP}{CP} = \frac{44}{x} \Rightarrow \frac{11}{10} = \frac{44}{x} \Rightarrow \boxed{x = 40}$

Ex. यदि किसी वस्तु के क्रय मूल्य का 70% उसके विक्रय मूल्य के 40% के बराबर है, तो लाभ प्रतिशत क्या है?

HINTS प्रश्नानुसार,

$70CP = 40SP \Rightarrow \frac{CP}{SP} = \frac{4}{7}$

$\therefore$ लाभ % = $\frac{7-4}{4} \times 100\% = \frac{300}{4}\% = 75\%$

Ex. 36 वस्तुओं का क्रय मूल्य N वस्तुओं के विक्रय मूल्य के समान है। यदि लाभ 20% है, तो N का मान ज्ञात कीजिए।

HINTS 20% = $\frac{1}{5}$ +$\longrightarrow$ $\frac{6 \rightarrow SP}{5 \rightarrow CP}$

प्रश्नानुसार,

$36 \times CP = N \times SP$

$\Rightarrow \frac{SP}{CP} = \frac{36}{N} \Rightarrow \frac{6}{5} = \frac{36}{N} \Rightarrow \boxed{N = 30}$

लाभ/हानि = कुछ वस्तुओं का क्रय/विक्रय मूल्य

Ex. दो वस्तुओं को ₹800 में बेचकर एक व्यक्ति को 5 वस्तुओं के क्रय मूल्य के बराबर लाभ होता है। लाभ प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

HINTS प्रश्नानुसार,

$2SP - 2CP = 5CP \Rightarrow 2SP = 7CP \Rightarrow \frac{SP}{CP} = \frac{7}{2}$

$\therefore$ लाभ % = $\frac{5}{2} \times 100\% = 250\%$

Ex. 42 मीटर कपड़ा बेचकर विजय को 7 मीटर कपड़े के विक्रय मूल्य के बराबर लाभ प्राप्त होता है। लाभ प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

HINTS प्रश्नानुसार,

$42SP - 42CP = 7SP \Rightarrow 35SP = 42CP$

$\Rightarrow \frac{SP}{CP} = \frac{6}{5}$ +1

$\therefore$ लाभ % = $\frac{1}{5} \times 100\% = 20\%$

Ex. एक मेडिकल सौदे में, क्रय मूल्य का 17 गुना, क्रय मूल्य और विक्रय मूल्य के योग के 8 गुना के बराबर है। लाभ या हानि प्रतिशत क्या है?

HINTS प्रश्नानुसार,

$17CP = 8(CP + SP) \Rightarrow 17CP - 8CP = 8SP$

$\Rightarrow 9CP = 8SP \Rightarrow \frac{CP}{SP} = \frac{8}{9}$

$\therefore$ लाभ % = $\frac{1}{8} \times 100\% = 12.5\%$

विक्रय मूल्य पर लाभ/हानि

Ex. यदि कोई व्यक्ति विक्रय मूल्य पर लाभ % की गणना करता है और उसके अनुसार उसका लाभ 20% है, तो उसका वास्तविक लाभ % ज्ञात कीजिए।

HINTS 20% = $\frac{1 \rightarrow \text{लाभ}}{5 \rightarrow \text{विक्रय मूल्य}} \longrightarrow \frac{4 \rightarrow \text{क्रय मूल्य}}{5 \rightarrow \text{विक्रय मूल्य}}$

$\therefore$ वास्तविक लाभ % = $\frac{1}{4} \times 100\% = 25\%$

Ex. यदि हानि विक्रय मूल्य की $\frac{1}{8}$ है, तो वास्तविक हानि प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

HINTS $\frac{1 \rightarrow \text{हानि}}{8 \rightarrow \text{विक्रय मूल्य}} \longrightarrow \frac{9 \rightarrow \text{क्रय मूल्य}}{8 \rightarrow \text{विक्रय मूल्य}}$

$\therefore$ वास्तविक हानि % = $\frac{1}{9} \times 100\% = 11\frac{1}{9}\%$

Ex. अदिति ने अपना स्कूटर ₹40,620 में बेचा, जिससे उसे विक्रय मूल्य का $\frac{1}{5}$ वाँ हिस्सा लाभ के रूप में प्राप्त हुआ। लाभ प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

HINTS $\frac{1 \rightarrow \text{लाभ}}{5 \rightarrow \text{विक्रय मूल्य}} \longrightarrow \frac{4 \rightarrow \text{क्रय मूल्य}}{5 \rightarrow \text{विक्रय मूल्य}}$

$\therefore$ लाभ % = $\frac{1}{4} \times 100\% = 25\%$

बटरफ्लाई कॉन्सेप्ट

क्रय मूल्य = विक्रय मूल्य$_1$ + हानि = विक्रय मूल्य$_2$ – लाभ

Ex. किसी वस्तु को ₹13,400 में बेचने पर प्राप्त लाभ उसी वस्तु को ₹11,600 में बेचने पर हुई हानि के बराबर है। यदि इसे ₹14,750 में बेचा जाए तो लाभ (₹ में) क्या होगा?

HINTS प्रश्नानुसार,

1 : 1

L P

SP_1 CP SP_2

₹11,600 ₹13,400

$CP = \frac{11600 + 13400}{2} = ₹12,500$

SP = ₹14,750 (दिया है)

$\therefore$ अभीष्ट लाभ = 14,750 – 12,500 = ₹2,250

Ex. एक दुकानदार ने एक वस्तु को हानि पर ₹455 में बेचा। यदि वह इसे ₹490 में बेचता, तो उसे हानि के चार गुना के बराबर राशि का लाभ होता। 25% लाभ प्राप्त करने के लिए उसे वस्तु को किस मूल्य (₹ में) पर बेचना चाहिए?

HINTS प्रश्नानुसार,

1 : 4

L P

SP_1 CP SP_2

₹455 ₹490

₹35

$\because$ (4 + 1) = 5 इकाई $\rightarrow$ ₹35

1 इकाई $\rightarrow$ ₹7

CP = 455 + (1 × 7) = ₹462

या

CP = 490 – (4 × 7) = ₹462

$\therefore$ अभीष्ट विक्रय मूल्य = $462 \times \frac{5}{4}$ = ₹577.5

Ex. एक वस्तु को ₹86 में बेचने पर प्राप्त लाभ उसी वस्तु को ₹53 में बेचने पर प्राप्त हानि का दोगुना है। क्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

HINTS प्रश्नानुसार,

1 : 2

हानि लाभ

SP_1 CP SP_2

₹53 ₹86

₹33

$\because$ (2 + 1) = 3 इकाई $\rightarrow$ ₹33

1 इकाई $\rightarrow$ ₹11

$\therefore$ क्रय मूल्य = 53 + (1 × 11) = ₹64

Ex. एक आदमी एक मोबाइल फोन को ₹680 में बेचता है और उसे कुछ हानि होती है। यदि उसने इसे ₹1,070 में बेचा होता, तो उसका लाभपहले की हानि से दोगुना होता। मोबाइल फोन का क्रय मूल्य (₹ में) ज्ञात कीजिए।

HINTS प्रश्नानुसार,

1 : 2

हानि लाभ

SP_1 — CP — SP_2

₹680 ₹1,070

₹390

∵ 3 इकाई → ₹390

1 इकाई → ₹130

क्रय मूल्य = विक्रय मूल्य + हानि = 680 + 130 = ₹810

∴ मोबाइल फोन का क्रय मूल्य = ₹810

वस्तुओं की संख्या पर आधारित

Ex. एक व्यक्ति ने कुछ वस्तुएँ ₹10 में 11 की दर से खरीदीं और उन्हें ₹11 में 10 की दर से बेच दिया। लाभ/हानि % ज्ञात कीजिए।

HINTS

	मूल्य		वस्तु		मूल्य		वस्तु
खरीद →	$10_{\times 10}$	:	$11_{\times 10}$	=	100	:	110
बिक्री →	$11_{\times 11}$	:	$10_{\times 11}$		121	:	110

$$\therefore \text{लाभ \%} = \frac{21}{100} \times 100\% = 21\%$$

वैकल्पिक विधि

	खरीद	बिक्री
मूल्य →	10	11
वस्तु →	11	10
	100	121

+21

∴ लाभ % = 21%

Ex. एक व्यापारी ने कुछ संतरे ₹11 में 7 की दर से खरीदे। उसने सारे संतरे ₹3 में 2 के हिसाब से बेच दिए। इस लेन-देन में उसे ₹30 की हानि हुई। ज्ञात कीजिये कि उसने कितने संतरे बेचे।

HINTS

	मूल्य		संतरे		मूल्य		संतरे
खरीद →	$11_{\times 2}$	:	$7_{\times 2}$	=	22	:	14
					↓ -1		
बिक्री →	$3_{\times 7}$	:	$2_{\times 7}$		21	:	14

∵ ₹1 हानि → 14 संतरे

₹30 हानि → 14 × 30 = 420 संतरे

∴ उसके द्वारा बेचे गए संतरों की संख्या = 420

Ex. एक दुकानदार ने 60 पेंसिलें ₹5 में 4 की दर से खरीदीं और अन्य 60 पेंसिलें ₹3 में 2 की दर से खरीदीं। उसने सभी पेंसिलो को मिलाकर ₹4 में 3 की दर से बेच दिया। उसका लाभ या हानि प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

HINTS

	मूल्य	:	पेंसिल
स्थिति-I →	5	:	4
स्थिति-II →	$3_{\times 2}$	:	$2_{\times 2}$
कुल →	11	:	8

⇒

	मूल्य	:	पेंसिल
खरीद →	$11_{\times 3}$	:	$8_{\times 3}$
बिक्री →	$4_{\times 8}$	:	$3_{\times 8}$
	33		24
	↓ -1		
	32		24

$$\therefore \text{हानि \%} = \frac{1}{33} \times 100\% = 3\frac{1}{33}\%$$

वैकल्पिक विधि

CP	:	SP
$\frac{5}{4}\times 60+\frac{3}{2}\times 60$	:	$\frac{4}{3}\times 120$
75 + 90	:	160
165	:	160

–5

$$\therefore \text{हानि \%} = \frac{5}{165}\times 100\% = 3\frac{1}{33}\%$$

इस प्रकार के प्रश्नों में, हम खरीदते और बेचते समय वस्तुओं की संख्या बराबर कर देते हैं।

औसत की अवधारणा (जब CP समान हो)

Ex. एक व्यक्ति ने तीन वस्तुएँ प्रत्येक ₹6,000 में खरीदीं। उसने उन्हें क्रमशः 15% लाभ, 12% लाभ तथा 15% हानि पर बेचा। उसके द्वारा अर्जित कुल लाभ/हानि प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

HINTS

वस्तु →	1st	2nd	3rd
लाभ →	15%	12%	–15%

$$\therefore \text{लाभ \%} = \frac{15+12-15}{3} = 4\%$$

Ex. एक फल विक्रेता ने कुछ केले खरीदे। उनमें से पाँचवाँ हिस्सा सड़ गया और फेंक दिया गया। उसके पास जो केले बचे, उनमें से दो-पाँचवाँ भाग उसने 15% लाभ पर बेचा और शेष को 10% लाभ पर बेचा। उसका कुल लाभ या हानि प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

HINTS माना, कुल केलों की संख्या 50 इकाई है।

50 इकाई

$\times\frac{1}{5}$ $\times\frac{4}{5}$

40 इकाई

$\times\frac{2}{5}$

	सड़ा हुआ		बचा हुआ
	10	16	24
लाभ/हानि % =	–100%	+15%	+10%
कुल	–1000%	+240%	+240% = – 520%

$$\therefore \text{हानि \%} = \frac{520}{50}\% = 10.4\%$$

Ex. एक सब्जी विक्रेता ने 100 किलोग्राम आलू ₹19 प्रति किलोग्राम की दर से खरीदे और ₹100 ढुलाई में खर्च किए। उसने 60 किलोग्राम आलू 50% लाभ पर बेचे और शेष में से आधे को 40% लाभ पर बेचा। फिर उसने बचे हुए आधे को 25% लाभ पर बेचा। अब वह शेष बचे हुए आलुओं पर कितने प्रतिशत लाभ कमाए ताकि उसे कुल मिलाकर 42% का लाभ हो?

HINTS

	60	:	20	:	10	:	10	= 100
	50%		40%		25%		x%	42%
लाभ =	30		8		2.5		10x%	= 42

⇒ 10x% = 42 – 40.5

$$\Rightarrow 10x\% = 1.5 \Rightarrow \frac{10x}{100} = 1.5 \Rightarrow x = 15$$

∴ अभीष्ट लाभ % = 15%

Ex. एक दुकानदार ने 1600 आम ₹120 प्रति दर्जन की दर से खरीदे। इनमें से उसने 900 आम ₹15 प्रति आम की दर से बेचे और शेष आम ₹14 प्रति आम की दर से बेचे। उसका लाभ प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

HINTS कुल क्रय मूल्य = $1600 \times \frac{120}{12}$ = ₹16,000

कुल विक्रय मूल्य = (900 × 15) + (14 × 700) = ₹23,300

लाभ = 23,300 – 16,000 = ₹7,300

$\therefore$ लाभ % = $\frac{7300}{16000} \times 100\% = 45.625\%$

वैकल्पिक विधि

1 आम का क्रय मूल्य = $\frac{120}{12}$ = ₹10

शुद्ध लाभ = 900 × (15 – 10) + 700 × (14 – 10)

= 4500 + 2800 = ₹7,300

$\therefore$ लाभ % = $\frac{7300}{16000} \times 100\% = 45.625\%$

जब विक्रय मूल्य समान हो

- यदि दो वस्तुएँ समान मूल्य पर बेची गई। पहली वस्तु को $x\%$ लाभ पर और दूसरी को y% हानि पर बेचा गया, तो कुल लाभ या हानि प्रतिशत इस प्रकार है:

$$\text{लाभ/हानि\%} = \frac{100(x+y)+2xy}{200+x+y}\%$$

- यदि दो वस्तुएँ समान मूल्य पर बेची गई। पहली वस्तु को $x\%$ लाभ पर और दूसरी को $x\%$ हानि पर बेचा गया, तो कुल हानि प्रतिशत इस प्रकार है:

$$\text{हानि\%} = \frac{x^2}{100}\%$$

Ex. दो घोड़े ₹1,599 प्रति घोड़ा की दर से बेचे गए। पहला घोड़ा 25% लाभ पर और दूसरा 20% हानि पर बेचा गया। कुल लाभ या हानि प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

HINTS लाभ/हानि % = $\frac{100(x+y)+2xy}{200+x+y}\%$

$= \frac{100(25-20)+2\times25\times(-20)}{200+25-20}\% = \frac{500-1000}{205}\%$

$= \frac{-500}{205}\% = \frac{-100}{41}\% = -2.43\%$

$\therefore$ कुल हानि % = 2.43%

वैकल्पिक विधि $25\% = \frac{+1}{4}$, $20\% = \frac{-1}{5}$

	CP		SP		CP		SP
I →	$4_{\times4}$	:	$5_{\times4}$	=	16	:	20
II →	$5_{\times5}$	:	$4_{\times5}$		25	:	20
					41		40

–1

$\therefore$ हानि % = $\frac{1}{41} \times 100\% = 2.43\%$

दोनों स्थितियों में विक्रय मूल्य (SP) को समान बनाने के लिए, 5 और 4 का लघुत्तम समापवर्त्य (LCM) लें।

Ex. दो घोड़े ₹1,920 प्रति घोड़ा की दर से बेचे गए। पहला घोड़ा 20% हानि पर और दूसरा 20% लाभ पर बेचा गया। कुल लाभ या हानि प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

HINTS हानि % = 20%, लाभ % = 20%

$\therefore$ हानि % = $\frac{x^2}{100}\% = \frac{20^2}{100}\% = 4\%$

Ex. एक व्यक्ति दो घड़ियाँ, 'A' और 'B' कुल ₹800 में खरीदता है। वह दोनों घड़ियों को एक ही मूल्य पर बेचता है। घड़ी 'A' पर उसे 18% लाभ होता है और घड़ी 'B' पर 22% हानि होती है। घड़ियों का क्रय मूल्य ज्ञात कीजिए (दो दशमलव स्थान तक)।

HINTS कुल लाभ/हानि % = $\frac{100(x+y)+2xy}{200+x+y}\%$

$= \frac{100(18-22)+2\times18\times(-22)}{200+18-22}\%$

$= \frac{-400-792}{196}\% = -\frac{298}{49}\% = -6.08\%$

अब,

A		B
18%		–22%
	–6.08%	
15.92%		24.08%

प्रश्नानुसार,

40% → ₹800

1% → ₹20

$\therefore$ क्रय मूल्य$_A$ = 15.92 × 20 = ₹318.4

क्रय मूल्य$_B$ = 24.08 × 20 = ₹481.6

वैकल्पिक विधि

$18\% = \frac{+9}{50}$, $22\% = \frac{-11}{50}$

	CP	SP	CP		SP
A →	$50_{\times39}$	$59_{\times39}$	1950	:	2301
B →	$50_{\times59}$	$39_{\times59}$	2950	:	2301

कुल क्रय मूल्य = (1950 + 2950) = 4900 इकाई

$\because$ 4900 इकाई → ₹800

1950 इकाई → ₹318.37

2950 इकाई → ₹481.63

$\therefore$ क्रय मूल्य$_A$ = ₹318.37, क्रय मूल्य$_B$ = ₹481.63

पहली वस्तु का क्रय मूल्य = दूसरी वस्तु का विक्रय मूल्य

Ex. एक दुकानदार ने दो वस्तुएँ बेचीं। पहली वस्तु का विक्रय मूल्य दूसरी वस्तु के क्रय मूल्य के बराबर है। उसने पहली वस्तु को 20% लाभ पर और दूसरी वस्तु को 10% हानि पर बेचा। उसका कुल लाभ या हानि प्रतिशत कितना है?

HINTS माना, दो वस्तुएँ 'A' और 'B' हैं।

माना, SP_A = 100 इकाई

$\therefore$ CP_B = 100 इकाई

$CP_A = 100 \times \frac{100}{120} = \frac{1000}{12}$ इकाई

$SP_B = 100 \times \frac{90}{100}$ = 90 इकाई

$\therefore$ लाभ % $= \frac{190 - \left(\frac{1000}{12}+100\right)}{\left(\frac{1000}{12}+100\right)} \times 100\%$

$= \frac{\frac{80}{12}}{\frac{2200}{12}} \times 100\% = 3\frac{7}{11}\%$

वैकल्पिक विधि

$20\% = \frac{+1}{5}$, $10\% = \frac{-1}{10}$

माना, दो वस्तुएँ 'A' और 'B' हैं।

$SP_A = CP_B$

	CP	SP		CP	SP
A →	(5	$6)_{\times 5}$	=	25	30
B →	(10	$9)_{\times 3}$		30	27
				55	57

$$55 \xrightarrow{+2} 57$$

$\therefore$ लाभ % = $\frac{2}{55} \times 100\% = 3\frac{7}{11}\%$

बेईमान दुकानदार

	मूल्य	:	पेंसिल			मूल्य	:	पेंसिल
स्थिति-I →	5	:	4	⇒	खरीद →	$11_{\times 3}$	:	$8_{\times 3}$
स्थिति-II →	$3_{\times 2}$	:	$2_{\times 2}$		बिक्री →	$4_{\times 8}$	:	$3_{\times 8}$
कुल →	11	:	8			33		24
						–1		

एक बेईमान दुकानदार अपने सामान को क्रय मूल्य पर बेचता है, लेकिन गलत वजन का उपयोग करता है, तो उसका लाभः

$$\text{लाभ\%} = \frac{\text{वास्तविक वजन} - \text{गलत वजन}}{\text{गलत वजन}} \times 100\%$$

Ex. एक बेईमान दुकानदार अपने सामान को क्रय मूल्य पर बेचने का वादा करता है, लेकिन वह 30% कम तौल का उपयोग करता है। उसका लाभ प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

HINTS माना, वास्तविक वजन = 100 इकाई, गलत वजन = 70 इकाई

$$70 \xrightarrow{+30} 100$$

$\therefore$ लाभ % = $\frac{30}{70} \times 100\% = \frac{300}{7}\% = 42\frac{6}{7}\%$

वैकल्पिक विधि

$30\% = \frac{3}{10} \longrightarrow \frac{7 \rightarrow CP}{10 \rightarrow SP}$

$$7 \xrightarrow{+3} 10$$

$\therefore$ लाभ % = $\frac{3}{7} \times 100\% = \frac{300}{7}\% = 42\frac{6}{7}\%$

Ex. एक बेईमान दुकानदार अपने सामान को 44% हानि पर बेचने का वादा करता है, लेकिन वह 1 किलोग्राम के बजाय 910 ग्राम तौलता है। उसकी वास्तविक हानि प्रतिशत (लगभग) ज्ञात कीजिए।

HINTS

CP	:	SP
100	:	56
910	:	1000
91	:	56

$$91 \xrightarrow{-35} 56$$

$\therefore$ हानि % = $\frac{35}{91} \times 100\% = 38.4\%$

Ex. एक दुकानदार अपने माल पर क्रय मूल्य से 35% अधिक मूल्य अंकित करता है तथा ग्राहक को 23% छूट देता है। खरीदते समय वह 1 किग्रा के स्थान पर 1120 ग्राम वजन का उपयोग करता है तथा बेचते समय वह 1 किग्रा के स्थान पर 880 ग्राम वजन देता है। उसका लाभ % ज्ञात कीजिए।

HINTS

CP	:	SP
100	:	135
100	:	77
1000	:	1120
880	:	1000
1000		1323

$$1000 \xrightarrow{+323} 1323$$

$\therefore$ लाभ % = $\frac{323}{1000} \times 100\% = 32.3\%$

चारमीनार कॉन्सेप्ट

इस प्रकार के प्रश्नों में दो स्थितियाँ दी जाती हैं। पहली स्थिति में, एक वस्तु को कुछ लाभ/हानि % पर बेचा जाता है और दूसरी स्थिति में यह दिया जाता है कि यदि वस्तु को वास्तविक क्रय मूल्य से एक निश्चित प्रतिशत कम या अधिक पर खरीदा जाता है और वास्तविक विक्रय मूल्य से एक निश्चित राशि अधिक या कम पर बेचा जाता है, तो खरीदार को एक निश्चित लाभ/हानि % प्राप्त होता है। वस्तु का क्रय मूल्य ज्ञात करना होता है।

Ex. एक आदमी ने एक वस्तु खरीदी और उसे 10% लाभ पर बेचा। यदि उसने वस्तु को 20% कम पर खरीदा होता और उसे ₹1,000 अधिक में बेचा होता, तो उसे 40% का लाभ होता। वस्तु का क्रय मूल्य (₹ में) ज्ञात कीजिए।

HINTS माना, वस्तु का क्रय मूल्य 100 इकाई है।

$$\begin{tikzcd}
\underset{100}{CP_1} \arrow[r, "+10\%"] \arrow[d, "-20\%"'] & \underset{110}{SP_1} \arrow[d, "+2 \text{ इकाई}"] \\
\underset{80}{CP_2} \arrow[r, "+40\%"] & \underset{112}{SP_2}
\end{tikzcd}$$

$\because$ 2 इकाई → ₹1,000

100 इकाई → ₹50,000

$\therefore$ वस्तु का क्रय मूल्य = ₹50,000

Ex. एक व्यक्ति ने एक मकान 15% लाभ पर बेचा। यदि उसने इसे 25% कम कीमत पर खरीदा होता और ₹60 कम में बेचा होता, तो उसे 32% का लाभ होता। मकान का क्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

HINTS माना, मकान का क्रय मूल्य 100 इकाई है।

$$\begin{tikzcd}
\underset{100}{CP_1} \arrow[r, "+15\%"] \arrow[d, "-25\%"'] & \underset{115}{SP_1} \arrow[d, "-16 \text{ इकाई}"] \\
\underset{75}{CP_2} \arrow[r, "+32\%"] & \underset{99}{SP_2}
\end{tikzcd}$$

$\because$ 16 इकाई → ₹60

100 इकाई → ₹375

$\therefore$ मकान का क्रय मूल्य = ₹375

एलिगेशन पर आधारित

Ex. एक व्यक्ति 5 टेबल और 9 कुर्सियाँ ₹15,400 में खरीदता है। वह टेबल को 10% लाभ पर और कुर्सियाँ को 20% लाभ पर बेचता है। यदि सभी टेबल और कुर्सियों को बेचने पर उसका कुल लाभ ₹2,080 है, तो 3 कुर्सियों का क्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

HINTS कुल लाभ % = $\frac{2080}{15400} \times 100\,\% = \frac{1040}{77}\,\%$

टेबल — कुर्सी

$10\%_{\times 77} = 770$ — $20\%_{\times 77} = 1540$

$\frac{1040}{77}\%\ {\times 77}$

500 : 270

मूल्य/मात्रा → 50 : 27

$\because$ 77 इकाई → ₹15,400

1 इकाई → ₹200

27 इकाई → ₹5,400

9 कुर्सियों का क्रय मूल्य = ₹5,400

$\therefore$ 3 कुर्सियों का क्रय मूल्य = ₹1,800

वैकल्पिक विधि

5 टेबल — 9 कुर्सी

लाभ % → 10% — 10% + 10%

लाभ = 15,400 × 10%
= ₹1,540

शेष लाभ = 2,080 – 1,540 = ₹540

$\because$ 10% → ₹540

100% → ₹5,400

9 कुर्सियों का क्रय मूल्य = ₹5,400

$\therefore$ 3 कुर्सियों का क्रय मूल्य = ₹1,800

$\frac{P_1}{Q_1 \times (100 \pm P_1 / L_1)\%} = \frac{P_2}{Q_2 \times (100 \pm P_2 / L_2)\%}$

Ex. 3 दर्जन संतरे ₹405 में बेचकर एक व्यापारी को 25% की हानि होती है। यदि उसे सौदे में 20% का लाभ कमाना है, तो उसे ₹288 में कितने संतरे बेचने चाहिए?

HINTS माना, संतरों की अभीष्ट संख्या 'x' है।

$$\because \frac{P_1}{Q_1 \times (100 \pm P_1 / L_1)\%} = \frac{P_2}{Q_2 \times (100 \pm P_2 / L_2)\%}$$

$$\Rightarrow \frac{405}{12 \times 3 \times (100 - 25)\%} = \frac{228}{x \times (100 + 20)\%}$$

$$\Rightarrow \frac{405}{12 \times 3 \times 75\%} = \frac{228}{x \times 120\%} \Rightarrow x = 16$$

$\therefore$ संतरों की अभीष्ट संख्या = 16

Ex. 18 टेबल पंखे ₹11,664 में बेचकर एक आदमी को 10% की हानि होती है। 10% लाभ कमाने के लिए उसे ₹17,424 में कितने टेबल पंखे बेचने चाहिए?

HINTS माना, टेबल पंखों की अभीष्ट संख्या 'x' है।

$$\because \frac{P_1}{Q_1 \times (100 \pm P_1 / L_1)\%} = \frac{P_2}{Q_2 \times (100 \pm P_2 / L_2)\%}$$

$$\Rightarrow \frac{11664}{18 \times (100 - 10)\%} = \frac{17424}{x \times (100 + 10)\%}$$

$$\Rightarrow \frac{11664}{18 \times 90\%} = \frac{17424}{x \times 110\%} \Rightarrow x = 22$$

$\therefore$ टेबल पंखों की अभीष्ट संख्या = 22

Ex. 90 बॉल पेन को ₹160 में बेचने पर एक व्यक्ति को 20% की हानि होती है। 20% का लाभ प्राप्त करने के लिए कितने बॉल पेन को ₹96 में बेचा जाना चाहिए?

HINTS माना, बॉल पेनों की अभीष्ट संख्या 'x' है।

$$\because \frac{P_1}{Q_1 \times (100 \pm P_1 / L_1)\%} = \frac{P_2}{Q_2 \times (100 \pm P_2 / L_2)\%}$$

$$\Rightarrow \frac{160}{90 \times 80\%} = \frac{96}{x \times 120\%} \Rightarrow x = 36$$

$\therefore$ बॉल पेनों की अभीष्ट संख्या = 36

Ex. 70 वस्तुओं को ₹160 में बेचने पर एक व्यक्ति को 20% की हानि हुई। 20% का लाभ कमाने के लिए उसे कितनी वस्तुएं ₹96 में बेचनी चाहिए?

HINTS माना, वस्तुओं की अभीष्ट संख्या 'x' है।

$$\because \frac{P_1}{Q_1 \times (100 \pm P_1 / L_1)\%} = \frac{P_2}{Q_2 \times (100 \pm P_2 / L_2)\%}$$

$$\Rightarrow \frac{160}{70 \times 80\%} = \frac{96}{x \times 120\%} \Rightarrow x = 28$$

$\therefore$ वस्तुओं की अभीष्ट संख्या = 28

यदि P% = CP, तब CP = $10\left(\sqrt{25 + SP} - 5\right)$

Ex. एक कलाई घड़ी को उसके क्रय मूल्य के बराबर लाभ प्रतिशत पर ₹1,200 में बेचा जाता है। कलाई घड़ी का क्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

HINTS क्रय मूल्य = $10\left(\sqrt{25 + 1200} - 5\right)$ = 10(35 – 5) = ₹300

$\therefore$ कलाई घड़ी का क्रय मूल्य = ₹300

वैकल्पिक विधि

जब लाभ % क्रय मूल्य के बराबर होता है तो हम दो संख्याएँ लेते हैं जिनका गुणनफल विक्रय मूल्य के बराबर होता है तथा अंतर **10** होता है। क्रय मूल्य सबसे छोटी संख्या और **10** के गुणनफल के बराबर होता है।

विक्रय मूल्य = 1200 = $40 \underbrace{\times}_{\text{अंतर } 10} 30$

क्रय मूल्य = 30 × 10 = ₹300

↑ छोटी संख्या

$\therefore$ कलाई घड़ी का क्रय मूल्य = ₹300

विविध

Ex. यदि कोई दुकानदार चीनी को ₹44.8 प्रति किलोग्राम की दर से बेचता है, तो वह 12% लाभ कमा पाता है। पानी के रिसाव के कारण चीनी का $\frac{1}{5}$ भाग खराब हो जाता है। अब शेष चीनी का प्रति किलोग्राम विक्रय मूल्य क्या होना चाहिए ताकि उसे 5% लाभ हो?

HINTS माना, चीनी की प्रारंभिक मात्रा 5 किग्रा है।

$\because$ चीनी का $\frac{1}{5}$ भाग खराब हो जाता है।

$\therefore$ चीनी की शेष मात्रा = $5 \times \frac{4}{5}$ = 4 किग्रा

5 किग्रा चीनी का क्रय मूल्य = $\left(44.8 \times \frac{100}{112}\right) \times 5$

5% लाभ अर्जित करने के लिए शेष 4 किग्रा चीनी का विक्रय मूल्य

$= \left(44.8 \times \frac{100}{112} \times 5\right) \times \frac{105}{100}$

$\therefore$ 1 किग्रा चीनी का अभीष्ट विक्रय मूल्य

$= \left(44.8 \times \frac{100}{112} \times 5 \times \frac{105}{100}\right) \times \frac{1}{4}$ = ₹52.5

वैकल्पिक विधि

विक्रय मूल्य प्रति किग्रा = $44.8 \times \frac{100}{112} \times \frac{5}{4} \times \frac{105}{100} = \frac{105}{2}$ = ₹52.5

Ex. किसी वस्तु के क्रय मूल्य में 7.5% की कमी करने पर एक दुकानदार ₹7,400 में पहले की तुलना में 15 किग्रा अधिक वस्तु खरीद सकता है। वस्तु के कटौती-पूर्व क्रय मूल्य पर 32.5% का लाभ कमाने के लिए, वस्तु को प्रति किग्रा किस मूल्य (₹ में) पर बेचा जाना चाहिए?

HINTS 7.5% ↓= $\frac{3}{40}$

	पुराना		नया
मूल्य→	40	:	37
मात्रा→	37	:	40

+3 इकाई

$\because$ 3 इकाई → 15 किग्रा

1 इकाई → 5 किग्रा

37 इकाई → 185 किग्रा

$CP_{\text{पुराना}} = \frac{7400}{185}$ = ₹40/किग्रा

$\therefore$ अभीष्ट विक्रय मूल्य = $40 \times \frac{132.5}{100}$ = ₹53/किग्रा

Ex. एक आदमी एक मेज को 12% हानि पर और एक किताब को 19% लाभ पर बेचता है। उसे ₹160 का लाभ होता है। यदि वह मेज को 12% लाभ पर और किताब को 16% हानि पर बेचता है, तो उसे ₹40 की हानि होती है। मेज और किताब की कीमत के बीच का अंतर ज्ञात कीजिए।

HINTS माना, मेज का क्रय मूल्य '$100x$' तथा किताब का क्रय मूल्य '100y' है।

प्रश्नानुसार,

$$\begin{aligned} -12x + 19y &= 160 \\ +12x - 16y &= -40 \\ \hline 3y &= 120 \\ \Rightarrow y &= 40 \end{aligned}$$

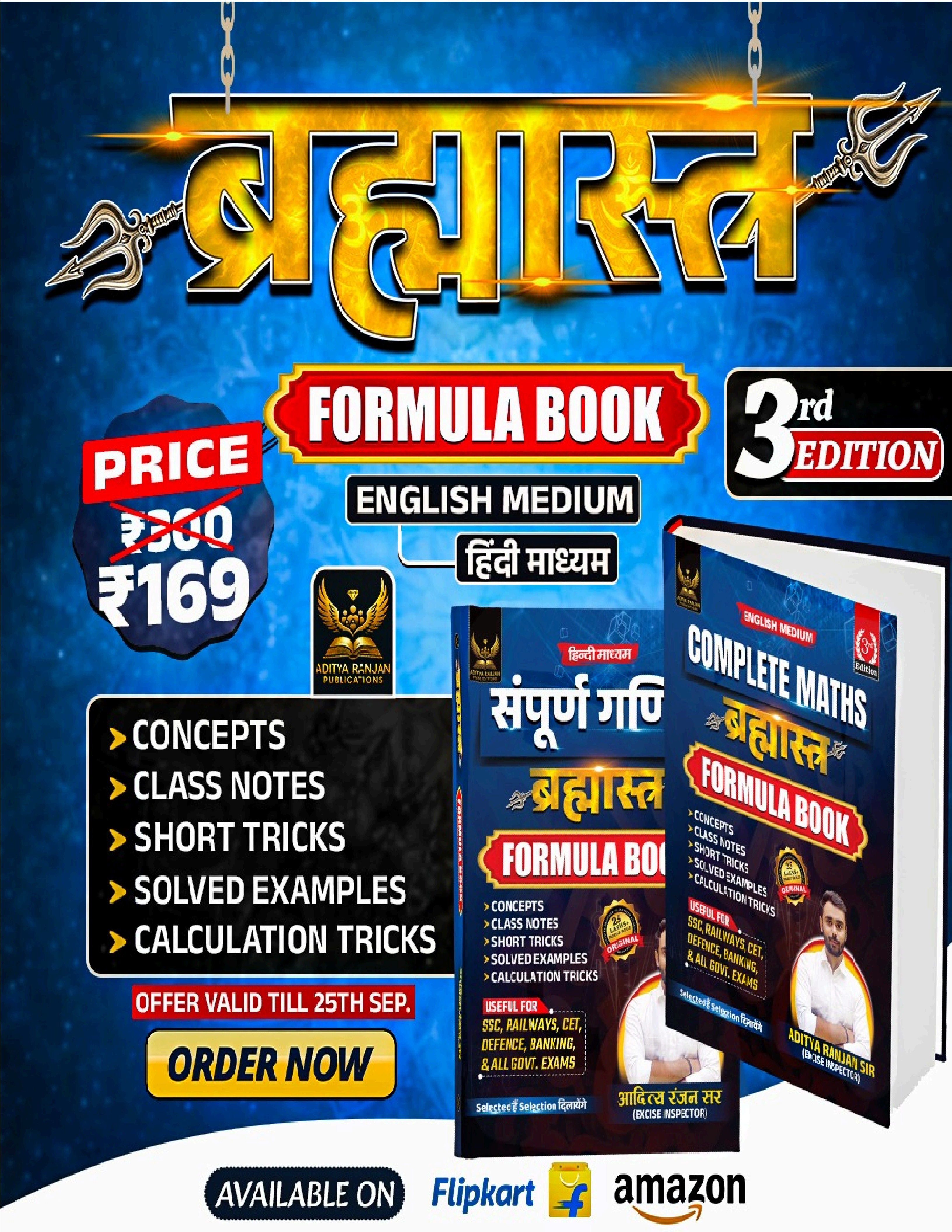
$\therefore CP_{\text{किताब}} = 100y = 100 \times 40$ = ₹4,000

$-12x + 760 = 160 \Rightarrow 600 = 12x \Rightarrow x = 50$

$\therefore CP_{\text{मेज}} = 100x = 100 \times 50$ = ₹5,000

$\therefore$ अभीष्ट अंतर = 5,000 – 4,000 = ₹1,000

हिंदी माध्यम
संपूर्ण गणित
3rd EDITION
ब्रह्मास्त्र
FORMULA BOOK
PRICE
~~₹300~~
₹169
OFFER VALID TILL 25TH SEP.
ORDER NOW
AVAILABLE ON
amazon
Flipkart
हिन्दी माध्यम
संपूर्ण गणित
3rd Edition
ब्रह्मास्त्र
FORMULA BOOK
CONCEPTS
CLASS NOTES
SHORT TRICKS
SOLVED EXAMPLES
CALCULATION TRICKS
USEFUL FOR
SSC, RAILWAYS, CET, DEFENCE, BANKING, & ALL GOVT. EXAMS
Selected हैं Selection दिलायेंगे
आदित्य रंजन सर
(EXCISE INSPECTOR)
ADITYA RANJAN SIR
ABOUT ADITYA RANJAN SIR
ADITYA RANJAN PUBL


ब्रह्मास्त्र
FORMULA BOOK
3rd EDITION
PRICE
~~₹300~~
₹169
ENGLISH MEDIUM
हिंदी माध्यम
ADITYA RANJAN PUBLICATIONS
CONCEPTS
CLASS NOTES
SHORT TRICKS
SOLVED EXAMPLES
CALCULATION TRICKS
OFFER VALID TILL 25TH SEP.
ORDER NOW
हिन्दी माध्यम
संपूर्ण गणि
ENGLISH MEDIUM
COMPLETE MATHS
USEFUL FOR
SSC, RAILWAYS, CET, DEFENCE, BANKING, & ALL GOVT. EXAMS
Selected हैं Selection दिलायेंगे
आदित्य रंजन सर
(EXCISE INSPECTOR)
ADITYA RANJAN SIR
AVAILABLE ON
Flipkart
amazon